

Ecuatii cu Derivate Parțiale

Note de curs

Sebastian Anița

Contents

1	CURS 1	3
2	CURS 2	9
3	CURS 3	15
4	CURS 4	21
5	CURS 5	27
6	CURS 6	33
7	CURS 7	39
8	CURS 8	45
9	CURS 9	53
10	CURS 10	59
11	CURS 11	65
12	CURS 12	71
13	CURS 13	77
14	BIBLIOGRAFIE	81

1 CURS 1

Se vor studia următoarele tipuri de ecuații:

- **Ecuații eliptice de forma**

$$\Delta u(x) = f(x)$$

- **Ecuații parabolice de forma**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k\Delta u(x, t) = f(x, t)$$

$$(k \in (0, +\infty))$$

- **Ecuații hiperbolice de forma**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - k\Delta u(x, t) = f(x, t)$$

Vor fi foarte utilizați următorii operatori diferențiali:

Gradientul:

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_N}(x) \right),$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), iar g este o funcție scalară;

Divergența:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{G}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right) \cdot (G_1(x), G_2(x), \dots, G_N(x)) \\ &= \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial G_N}{\partial x_N}(x), \end{aligned}$$

unde $\underline{G} = (G_1, G_2, \dots, G_N)$ este o funcție vectorială.

Laplaceanul:

$$\Delta g(x) = \nabla \cdot \nabla g(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}(x)$$

$$(\nabla \cdot \nabla = \Delta).$$

Ecuatiile se vor studia împreună cu condiții la limită și cu condiții inițiale (în cazul celor de evoluție).

Reamintim câteva rezultate utile:

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă.

- Dacă $\partial\Omega$ are ecuația $\psi(x) = c$ (c este o constantă), atunci

$$\underline{n}(x) = \frac{\nabla\psi(x)}{|\nabla\psi(x)|}$$

este un versor normal la $\partial\Omega$ în x (notații: $|\cdot|$ este norma euclideană, iar $\frac{z}{d} = \frac{1}{d}z$, unde $d \in \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{R}^N$)

- Dacă $\Omega = \overline{B(x_0; r)}$ (unde $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, $B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| < r\}$), atunci $\underline{n}(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$ este un versor normal orientat spre exterior

- **Teorema divergenței.** Dacă $\underline{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, atunci

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \underline{F}(x) \cdot \underline{n}(x) d\sigma,$$

unde $\underline{n}(x)$ este versorul normal la $\partial\Omega$ în x , orientat spre exterior

- **Teorema lui Gauss-Ostrogradski.** Dacă $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, atunci

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\sigma,$$

unde

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x + h\underline{n}(x)) - u(x)}{h} = \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x), \quad x \in \partial\Omega$$

este derivata normală a lui u în $x \in \partial\Omega$

- **Teorema lui Green.** Dacă $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, atunci

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) - u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x) \right] d\sigma.$$

Integrala Lebesgue (recapitulare)

Vom utiliza o serie de noțiuni și rezultate din teoria integralelor Lebesgue (vezi [H. Brezis]) și a spațiilor $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Reamintim doar câteva dintre acestea:

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime măsurabilă.

Teorema convergenței monotone (Lebesgue-Beppo Levi).

Dacă $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este un șir de funcții măsurabile a.î.

$$\begin{cases} f_n(x) \geq 0 & \text{a.p.t. } x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \\ f_n(x) \nearrow f(x) & \text{a.p.t.,} \end{cases}$$

atunci f este măsurabilă și

$$\int_{\Omega} f_n(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)dx.$$

Lemă (Fatou). Dacă $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este un șir de funcții măsurabile a.î. $f_n(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\liminf \int_{\Omega} f_n(x) dx \geq \int_{\Omega} \liminf f_n(x) dx.$$

Teorema convergenței dominate (Lebesgue). Dacă $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este un șir de funcții măsurabile a.î.

$$\begin{cases} f_n(x) \rightarrow f(x) & \text{a.p.t. } x \in \Omega, \\ |f_n(x)| \leq g(x) & \text{a.p.t. } x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \\ g \in L^1(\Omega), \end{cases}$$

atunci $f \in L^1(\Omega)$ și

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Integrala Lebesgue de suprafață

Fie $f : \Gamma = \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuă, unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit, cu frontiera de clasă C^1 . Considerăm o acoperire finită cu deschiși a lui Γ , i.e. $\Gamma \subset \cup_{j=1}^p U_j$, unde U_j sunt deschiși din \mathbb{R}^N . În plus

$$\Gamma_j = \Gamma \cap U_j : x_N = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$$

($\varphi_j : D_j \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1 , $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) < x_N$, $\forall x \in U_j \cap \Omega$, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) > x_N$, $\forall x \in U_j \cap Ext(\Omega)$, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) = x_N$, $\forall x \in U_j \cap \Gamma$; de fapt avem o ecuație explicită pentru Γ_j).

Considerăm funcțiile $\alpha_j \in C_0^\infty(U_j)$ a.î.

$$\alpha_j(x) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

$\sum_{j=1}^p \alpha_j(x) = 1$ în vecinătatea lui Γ (partiția unității).

Avem că $f = \sum_{j=1}^p \alpha_j f$; notăm cu $f_j = \alpha_j f$.

Se definește

$$\int_{\Gamma} f(x) d\sigma = \sum_{j=1}^p \int_{D_j} f_j(x_1, \dots, x_{N-1}, \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}))$$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{N-1}}\right)^2} + 1 dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1}.$$

2 CURS 2

Ecuatii eliptice

Vom deduce pentru început ecuația staționară a căldurii.

Considerăm un conductor termic aflat în regim termic staționar. Notăm cu $u(x)$ temperatura acestuia în punctul $x \in \bar{\Omega}$. Dacă $x_0 \in \Omega$ și $V = B(x_0; \varepsilon) \subset \Omega$, $S = \partial B(x_0; \varepsilon)$, atunci avem din legea lui Fourier “Cantitatea de căldură cedată de V (prin frontiera S) este dată de

$$Q = - \int_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma$$
$$\implies dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Aici $k(x)$ este conductivitatea termică în x . Dacă există și o sursă de căldură de intensitate $f(x)$, $x \in \Omega$, atunci din teorema divergenței avem

$$Q = \int_V f(x) dx = - \int_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma = - \int_S k(x) \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x) d\sigma$$
$$= - \int_V \nabla \cdot (k(x) \nabla u(x)) dx.$$

Făcând pe $\varepsilon \rightarrow 0$ și ținând cont că x_0 este arbitrar în Ω , obținem

$$-\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Dacă corpul este omogen (k constantă), atunci

$$-k \Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Observație. Prin renotări și particularizări se obțin:

Ecuția lui Laplace: $\Delta u(x) = 0$,

Ecuția lui Poisson: $\Delta u(x) = f(x)$.

Condiții la limită Ecuțiilor eliptice li se asociază condiții la limită. Cele uzuale sunt următoarele:

- Condiția Dirichlet: $u(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$ (semnifică faptul că se cunoaște temperatura la suprafața conductorului),
- Condiția Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$ (arată că se cunoaște fluxul de căldură prin frontiera conductorului; dacă $\varphi \equiv 0$, atunci conductorul este izolat termic),
- Condiția Robin: $\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$ (arată după o rearanjare că fluxul de căldură prin frontieră este proporțional cu diferența de temperatură dintre conductor și mediul ambiant).

Problemele la limită de care ne vom ocupa sunt următoarele:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observație. Ecuția eliptică (2.1) descrie și difuzia gazelor în regim staționar. Dacă notăm cu $y(x)$ densitatea unui gaz aflat într-o incintă

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cu $D(x)$ coeficientul de difuzie și cu $f(x)$ intensitatea unei surse de gaz, atunci din legea lui Nernst se deduce exact ca mai sus că

$$-\nabla \cdot (D(x)\nabla y(x)) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Semnificațiile pentru condițiile la limită sunt analoge celor din cazul propagării căldurii.

Soluția fundamentală a operatorului Laplace

Fie $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ și funcția $E : \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & N = 2 \\ -\frac{1}{(N-2)\omega_N |x|^{N-2}}, & N \geq 3, \end{cases}$$

unde ω_N este aria sferei unitate $\{x \in \mathbb{R}^N; |x| = 1\}$.

Această funcție se numește soluția fundamentală a operatorului Laplace.

Teorema 2.1. *Funcția E are următoarele proprietăți*

- (i) $E \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0_N\})$,
- (ii) $\Delta E(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\}$,
- (iii) $\Delta E = \delta_{0_N}$.

Aici, δ_x este distribuția Dirac concentrată în x . Vom vedea că, de fapt, proprietatea (iii) este cea care justifică pentru E numele de soluție fundamentală a operatorului Laplace.

Demonstrația teoremei. Vom demonstra (i) și (ii) pentru cazul $N \geq 3$, lăsând ca exercițiu cazul $N = 2$.

(i) Funcția E este definită pe $\mathbb{R}^N \setminus \{0_N\}$. Să calculăm derivatele de ordinul întâi și al doilea ale lui E . Pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\}$ avem că

$$E(x) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{-\frac{N-2}{2}},$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{\omega_N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{-\frac{N}{2}}x_j = \frac{1}{\omega_N}x_j|x|^{-N}, \quad \forall j = \overline{1, N}$$

și deci

$$\nabla E(x) = \frac{1}{\omega_N}|x|^{-N}x.$$

Derivând încă o dată se obține că

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{1}{\omega_N}[\delta_{ij}|x|^{-N} - Nx_i x_j |x|^{-(N+2)}], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Ceea ce s-a obținut sugerează că are loc următorul rezultat (care se demonstrează prin inducție completă):

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ (un multiindice de derivare), cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq k$ avem că

$$D^\alpha E(x) = P_{\alpha, k}(x)|x|^{-N+2-2k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\},$$

unde $P_{\alpha, k}$ este o funcție polinomială de $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Acest rezultat arată că $E \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0_N\})$.

(ii) Am arătat la (i) că $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2}(x) = \frac{1}{\omega_N}[|x|^{-N} - Nx_j^2|x|^{-N-2}],$$

de unde, prin sumare obținem că $\Delta E(x) = 0$.

Pentru (iii) se va utiliza următorul rezultat auxiliar:

Lema 2.2. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschisă, mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1 , atunci, pentru orice $u \in C^2(\overline{\Omega})$:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(y) E(x-y) dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y \\ = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstrația lemei va fi prezentată în următorul curs.

Demonstrația teoremei (continuare).

(iii) Considerăm $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ oarecare, dar fixat. Fie $R > 0$ a.î. $\text{supp}(\varphi) \subset B(0_N; R) = \Omega$. Aplicând lema 2.2 (pentru $u := \varphi$, $x := 0_N$) obținem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \varphi(y) E(y) dy - \int_{\partial\Omega} E(y) \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y) d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(-y)}{\partial n_y} \varphi(y) d\sigma_y \\ = \varphi(0_N). \end{aligned}$$

Cum $\frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(y) = \varphi(y) = 0$, $\forall y \in \partial\Omega$, rezultă că

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi(y) E(y) dy = \varphi(0_N), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

adică $\Delta E = \delta_{0_N}$.

3 CURS 3

Demonstrația lemei. Pentru claritate vom prezenta demonstrația în cazul $N = 3$.

Dacă $x \in \Omega$, atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $B(x; \varepsilon_0) \subset \Omega$. Considerăm un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ arbitrar, dar fixat și notăm cu

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x; \varepsilon)}.$$

Aplicând formula lui Green pentru funcțiile (de variabilă y) $u(y)$ și $E(x - y)$ și domeniului Ω_ε , se obține că

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) E(x - y) dy - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_y (E(x - y)) u(y) dy \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x - y) d\sigma_y - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial E(x - y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y \end{aligned}$$

Folosind că $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(x; \varepsilon)$, iar pentru orice $y \in \partial B(x; \varepsilon)$ avem că versorul normal la $\partial\Omega_\varepsilon$ orientat spre exteriorul lui Ω_ε este de fapt versor normal la $\partial B(x; \varepsilon)$ orientat spre interiorul lui $B(x; \varepsilon)$, deducem că

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x - y) d\sigma_y - \int_{\partial B(x; \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x - y) d\sigma_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y + \int_{\partial B(x; \varepsilon)} \frac{\partial E(x - y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Cum $\Delta_y E(x - y) = 0$, $\forall y \in \Omega_\varepsilon$, rezultă că

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) E(x - y) dy - \int_{\partial\Omega} E(x - y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x - y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y$$

$$= - \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x-y) d\sigma_y + \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y. \quad (3.1)$$

Avem că

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x-y) d\sigma_y \right| &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \nabla u(y) \cdot \underline{n}(y) \frac{1}{|y-x|} d\sigma_y \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} |\nabla u(y)| \cdot |\underline{n}(y)| \cdot \frac{1}{\varepsilon} d\sigma_y \leq \frac{M}{4\pi\varepsilon} m(\partial B(x;\varepsilon)) \end{aligned}$$

(am folosit mărghinirea lui ∇u pe $\overline{\Omega}$; $m(\partial B(x;\varepsilon)) = 4\pi\varepsilon^2$ este aria sferei $\{y; |y-x| = \varepsilon\}$)

$$= M\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \text{pentru } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \nabla_y(E(x-y)) \cdot \underline{n}(y) u(y) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \frac{y-x}{|y-x|^3} \cdot \frac{y-x}{|y-x|} u(y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} u(y) d\sigma_y \\ &\longrightarrow u(x), \quad \text{pentru } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

deoarece u este continuă în x .

Din (3.1), (3.2) și (3.3) deducem (făcând pe $\varepsilon \rightarrow 0$) concluzia lemei în cazul $x \in \Omega$.

Dacă $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, atunci aplicând formula lui Green pentru funcțiile (de variabilă y) $u(y)$ și $E(x-y)$ și domeniul Ω , se obține concluzia.

Observație. Se poate demonstra analog că

$$\int_{\Omega} \Delta u(y) E(x-y) dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} u(y) d\sigma_y = \frac{u(x)}{2}, \quad \text{dacă } x \in \partial\Omega.$$

Soluții generalizate pentru ecuații eliptice. Spații de distribuții

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschisă și spațiile de funcții

$$C_0^k(\Omega) = \{\varphi \in C^k(\Omega); \text{supp}(\varphi) \subset \Omega, \text{supp}(\varphi) \text{ compact}\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(\varphi) \subset \Omega, \text{supp}(\varphi) \text{ compact}\}.$$

Se mai folosește notația $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

Pentru orice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ (multiindice de derivare) se notează $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ și

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \varphi(x).$$

Un exemplu netrivial de element al spațiului $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ este următorul

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mai mult, avem că $\text{supp}(\varphi) = \overline{B(0_N; 1)}$.

Observăm pentru început că $C_0^k(\Omega)$ și $C_0^\infty(\Omega)$ sunt spații vectoriale peste \mathbb{R} .

Definiție. Un operator liniar $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ este o distribuție (“funcție generalizată”) dacă

$$u(\varphi_n) \rightarrow 0,$$

pentru orice șir $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ cu proprietățile următoare

(i) $\exists K \subset \Omega$, o mulțime compactă a.î.

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ uniform pentru orice multiindice α .

Notăm cu

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ distribuție}\}.$$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ este un spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

Următorul rezultat ne dă o caracterizare extrem de utilă a distribuțiilor.

Proprietate. Fie operatorul liniar $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente

(j) u este distribuție;

(jj) $\forall K \subset \Omega$ compactă, $\exists C_K \geq 0$, $\ell_K \in \mathbb{N}$:

$$|u(\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq \ell_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp}(\varphi) \subset K.$$

Demonstrație. Este evidentă implicația (jj) \implies (j).

Pentru a arăta (j) \implies (jj) vom raționa prin reducere la absurd. Presupunem că există o mulțime compactă $K \subset \Omega$ a.î. $\forall C \geq 0, \forall \ell \in \mathbb{N}, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp}(\varphi) \subset K$:

$$|u(\varphi)| > C \sum_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm $C = \ell = n$ și $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp}(\varphi) \subset K$ a.î.

$$1 = |u(\varphi_n)| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x)|.$$

Rezultă că pentru orice multiindice α :

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_n(x)| = \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq |\alpha|$$

și de aici $D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ uniform, $\forall \alpha$ multiindice.

Pe de altă parte este evident că $u(\varphi_n) \not\rightarrow 0$ și cu aceasta am ajuns la o absurditate.

Oricărei funcții $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ i se asociază $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definită astfel

$$u_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vom identifica în continuare pe u_f și f și astfel vom putea spune că orice funcție local integrabilă este o “funcție generalizată”, i.e.

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Se pune întrebarea firească dacă avem și incluziunea inversă. Răspunsul la această întrebare este negativ. Se poate arăta că distribuția lui Dirac (concentrată în $x_0 \in \Omega$):

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

nu este de forma u_f , unde $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($\nexists f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a.î. $\delta_{x_0} = u_f$). Deci,

$$L^1_{loc}(\Omega) \neq \mathcal{D}'(\Omega).$$

4 CURS 4

Regularizarea funcțiilor

Fie $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ce satisface

$$\rho(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \text{supp}(\rho) \subset \overline{B(0_N; 1)}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$$

(ρ este o funcție regularizantă sau “mollifier”).

Funcția

$$\rho(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) dy}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

unde

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

satisface condițiile de mai sus.

Definiție. Dacă $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se definește regularizanta lui u astfel

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x - \varepsilon y) \rho(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$x - \varepsilon y = z \implies y = \frac{x - z}{\varepsilon}, \quad dy = (-1)^N \frac{1}{\varepsilon^N} dz,$$

obținem că

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} u(z) \rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) dz, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Cum $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, rezultă că $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 4.1. *Dacă $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, atunci*

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{în } L^p(\mathbb{R}^N), \text{ pentru } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Demonstrație. Avem că

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - \varepsilon y) \rho(y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \rho(y) dy \right|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{B(0_N;1)} (f(x - \varepsilon y) - f(x)) \rho(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(0_N;1)} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|^p dy \left(\int_{B(0_N;1)} \rho(y)^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \end{aligned}$$

(unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dacă $1 < p < +\infty$; altfel se majorează $\rho(y)$)

$$\leq M \int_{B(0_N;1)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|^p dx dy. \quad (4.1)$$

Cum $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \implies \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx \longrightarrow 0$ pentru $h \rightarrow 0_N$.

Dacă notăm

$$g_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|^p dx,$$

atunci rezultă că $g_\varepsilon(y) \rightarrow 0$ a.p.t. $y \in B(0_N;1)$ și cum

$$\begin{aligned} 0 \leq g_\varepsilon(y) &\leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - \varepsilon y)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \right] \\ &= 2C \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \quad \text{a.p.t. } y \in B(0_N;1), \end{aligned}$$

atunci din teorema convergenței dominate (Lebesgue) rezultă că

$$\int_{B(0_N;1)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - \varepsilon y) - f(x)|^p dx dy \longrightarrow 0, \quad \text{pentru } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Din (4.1) rezultă concluzia teoremei.

Observații. Dacă $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ atunci $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ și în plus

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Dacă $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ și $\text{supp}(f) \subset K$, atunci

$$\text{supp}(f_\varepsilon) \subset K + \overline{B(0_N; \varepsilon)}.$$

Teorema 4.2. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă și mărginită și dacă $1 \leq p < +\infty$, atunci*

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega) \text{ dens.}$$

Demonstrație. Fie $f \in L^p(\Omega)$ și

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

(prelungire a lui f). Este evident că $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ și deci $\tilde{f}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \implies \tilde{f}_\varepsilon|_{\overline{\Omega}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\forall \varepsilon > 0$. În plus,

$$\tilde{f}_\varepsilon \longrightarrow \tilde{f} \text{ în } L^p(\mathbb{R}^N) \implies \tilde{f}_\varepsilon|_{\Omega} \longrightarrow \tilde{f}|_{\Omega} = f \text{ în } L^p(\Omega), \quad (4.2)$$

pentru $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Cum $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$, folosind (4.2) tragem concluzia.

Observație. Se poate arăta că avem în plus

$$C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{dens.}$$

Teorema 4.3. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschisă și $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a.î.

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Atunci, $f(x) = 0$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Demonstrație. Fie $r > 0$ a.î. $\overline{B(x_0; r)} \subset \Omega$ și

$$\psi(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x), & x \in B(x_0; r) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B(x_0; r). \end{cases}$$

Pentru orice $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{B(x_0; r)}, \partial\Omega)$ avem că

$$\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp}(\psi_\varepsilon) \subset \overline{B(x_0; r)} + \overline{B(0_N; \varepsilon)}.$$

Din definiția lui ψ_ε avem că

$$|\psi_\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sgn} \tilde{f}(x - \varepsilon y) \rho(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Din ipoteza teoremei avem că

$$0 = \int_{\Omega} f(x)\psi_\varepsilon(x)dx = \int_{B(x_0; r+\varepsilon)} f(x)\psi_\varepsilon(x)dx = \int_{B(x_0; r+\varepsilon)} f(x)\psi_\varepsilon(x)dx \quad (4.3)$$

($\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(\overline{B(x_0; r)}, \partial\Omega)$). Fie un șir $\varepsilon_n \rightarrow 0+$. Avem că $\psi_{\varepsilon_n} \rightarrow \psi$ a.p.t. Cum $f|_{B(x_0; r+\varepsilon_0)} \in L^1(B(x_0; r+\varepsilon_0))$, rezultă din (4.3) că

$$0 = \int_{B(x_0; r+\varepsilon_0)} f(x)\psi(x)dx = \int_{B(x_0; r)} |f(x)|dx$$

și deci $f(x) = 0$ a.p.t. $x \in B(x_0; r)$. Concluzionăm că $f(x) = 0$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Consecință. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschisă și $x_0 \in \Omega$, atunci $\delta_{x_0} \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

Demonstrație. Raționăm prin reducere la absurd.

Presupunem că există $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a.î. $\delta_{x_0} = f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Rezultă că

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.4)$$

De aici deducem că $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\})$:

$$\int_{\Omega \setminus \{x_0\}} f(x)\varphi(x)dx = 0 \implies f(x) = 0 \text{ a.p.t. } x \in \Omega \setminus \{x_0\}.$$

Din (4.4) rezultă că

$$0 = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \text{ absurd.}$$

Deci, $L^1_{loc}(\Omega) \neq \mathcal{D}'(\Omega)$ (δ_{x_0} este o “funcție generalizată” care nu este și funcție (din $L^1_{loc}(\Omega)$)).

Derivatele distribuțiilor

Fie $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ și $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$.

Definiție.

$$D^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi),$$

unde $D^\alpha \varphi$ este derivata lui φ în sens clasic.

Observăm că $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (satisface condiția de caracterizare a distribuției, cu același C_K și cu $\ell_K := \ell_K + |\alpha|$).

Exemplu. Dacă H este funcția lui Heaviside, atunci

$$D^1 H = H' = \delta.$$

Demonstrație. Cum $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, rezultă că $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ și din definiția derivatei

$$D^1 H(\varphi) = -H(D^1 \varphi) = -H(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx$$

(am folosit faptul că $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$)

$$= - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Observație. Dacă $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, f derivabilă în raport cu x_j și $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, atunci

$$D^\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{în } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

unde $\alpha = (\delta_{ij})_{i=1, \dots, N}$ (derivata în sensul teoriei distribuțiilor coincide cu derivata clasică).

Demonstrație. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(\varphi) &= -f(D^\alpha \varphi) = - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi) \end{aligned}$$

(am integrat prin părți și am folosit că $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$). De aici rezultă concluzia.

5 CURS 5

Definiție. Spunem că $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ este soluție fundamentală a operatorului diferențial $P(D)$ dacă

$$P(D)E = \delta.$$

Observație. Funcția E definită în cursul 1 este soluție fundamentală a operatorului Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Spații Sobolev

Definiție. Fie Ω o submulțime a lui \mathbb{R}^N și $m \in \mathbb{N}^*$.

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\},$$

unde D^α este derivata lui u în sensul teoriei distribuțiilor.

Observația 1. Dacă $u \in L^2(\Omega)$, atunci $u \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ și deci există $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$.

Ce înseamnă că $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$?

Înseamnă că există $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ ($\implies g_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$) și că $D^\alpha u = g_\alpha$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e.

$$(D^\alpha u)(\varphi) = g_\alpha(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \iff (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) = g_\alpha(\varphi)$$

$$\iff (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g_\alpha(x) \varphi(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observația 2. $H^m(\Omega)$ se numesc spații Sobolev. Se mai notează $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$ sunt spații vectoriale peste corpul \mathbb{R} .

Teorema 5.1. $(H^m(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu Hilbert, unde

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x) D^{\alpha} g(x) dx, \quad f, g \in H^m(\Omega).$$

Demonstrație. Folosind faptul că $D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ este un operator liniar, se poate verifica imediat că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar în $H^m(\Omega)$.

Fie $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$ norma indusă de produsul scalar. A rămas să demonstrăm că orice șir Cauchy este convergent.

În adevăr, orice șir Cauchy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^m(\Omega)$ verifică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq n(\varepsilon) \implies$$

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u_{n+p}(x) - D^{\alpha} u_n(x)|^2 dx < \varepsilon^2 \quad (5.1)$$

$$\implies \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u_{n+p} - D^{\alpha} u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 < \varepsilon^2.$$

Deci, $\{D^{\alpha} u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este șir Cauchy în $L^2(\Omega)$ ($\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m$). Cum $L^2(\Omega)$ este un spațiu Banach, concluzionăm că $\exists u \in L^2(\Omega)$, $\exists g_{\alpha} \in L^2(\Omega)$ (pentru orice $\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m$) a.î.

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u && \text{în } L^2(\Omega) \\ D^{\alpha} u_n &\longrightarrow g_{\alpha} && \text{în } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vom demonstra că $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, 0 < |\alpha| \leq m: D^{\alpha} u = g_{\alpha}$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$.

În adevăr, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $0 < |\alpha| \leq m$:

$$D^\alpha u_n(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_n(D^\alpha \varphi)$$

$$\iff \int_{\Omega} D^\alpha u_n(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_n(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

(deoarece $D^\alpha u_n \in L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, $u_n \in L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$). Trecând la limită și folosind (5.2) rezultă că

$$\int_{\Omega} g_\alpha(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \iff g_\alpha(\varphi) = D^\alpha u(\varphi)$$

(deoarece $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$)

$$\iff g_\alpha = D^\alpha u \quad (\in L^2(\Omega)).$$

Deci, $D^\alpha u$ se identifică cu $g_\alpha \in L^2(\Omega)$. Putem rescrie (5.2) ca

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u && \text{în } L^2(\Omega) \\ D^\alpha u_n &\longrightarrow D^\alpha u && \text{în } L^2(\Omega) \end{aligned}$$

și folosind acum (5.1) concluzionăm că

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u_{n+p}(x) - D^\alpha u_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2, \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Înseamnă că șirul $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge la u în $H^m(\Omega)$.

Observație. Avem că

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^m(\Omega).$$

Pentru $m = 1$ se obține

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Teorema 5.2. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, avem

$$H^1(a, b) = \{u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ absolut continuă, } u' \in L^2(a, b)\}.$$

Observație. Teorema dă o caracterizare a elementelor din $H^1(\Omega)$, pentru $\Omega = (a, b)$.

Demonstrația teoremei 5.2. Pentru orice $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, u absolut continuă, rezultă că u este derivabilă aproape peste tot în $[a, b]$ (u' este derivata). Rezultă că

$$u' = D^1u \quad \text{în } \mathcal{D}'(a, b),$$

unde D^1u este derivata lui u în sensul teoriei distribuțiilor. Cum $u \in AC([a, b]) \implies u \in L^2(a, b)$. Pe de altă parte, $D^1u = u'$ în $\mathcal{D}'(a, b)$ și $u' \in L^2(a, b)$

$$\implies D^1u \in L^2(a, b) \implies u \in H^1(a, b).$$

Să demonstrăm acum incluziunea inversă. Considerăm $u \in H^1(a, b)$ oarecare, dar fixat și un subinterval $[c, d] \subset (a, b)$ oarecare (cu $c < d$). Fie $\psi \in C_0^\infty((a, b))$ cu proprietatea că $\psi(x) = 1, \forall x \in [c, d]$.

Se consideră funcția

$$v(x) = \begin{cases} u(x)\psi(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \in (-\infty, a) \cap (b, +\infty). \end{cases}$$

Se verifică cu ușurință că

$$D^1v = D^1u\psi + u\psi'$$

(are loc formula de derivare a unui produs de două funcții).

Construim acum șirul regularizatorilor

$$v_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x - \varepsilon y)\rho(y)dy = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} v(z)\rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) dz. \quad (5.3)$$

Este evident că $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$ și cum $v \in L^2(\mathbb{R})$, rezultă că

$$v_\varepsilon \longrightarrow v \quad \text{în } L^2(\mathbb{R}).$$

Din (5.3) rezultă că

$$\begin{aligned} v'_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} v(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) \right) dz \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} v(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) \right) dz = \frac{1}{\varepsilon} D^1v \left(\rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} D^1v(x)\rho\left(\frac{x - z}{\varepsilon}\right) dz = (D^1v)_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(adică derivata regularizatei lui v este regularizata derivatei lui v).

Cum $D^1v \in L^2(\mathbb{R}) \implies (D^1v)_\varepsilon \longrightarrow D^1v$ în $L^2(\mathbb{R})$.

Avem că

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y) &= \int_y^x (D^1v)_\varepsilon(z) dz = \int_y^x v'_\varepsilon(z) dz, \quad \forall y < x \\ \implies v(x) - v(y) &= \int_y^x D^1v(z) dz. \end{aligned}$$

Pentru $c \leq y < x \leq d$ avem că

$$u(x) - u(y) = \int_y^x D^1 u(z) dz.$$

De aici urmează că $\exists u'(z) = D^1 u(z)$ a.p.t. $z \in [c, d]$. Cum $[c, d] \subset (a, b)$ oarecare și $u' = D^1 u \in L^2(a, b)$, rezultă că pentru orice $x, y \in [a, b]$, $y < x$:

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(z) dz \implies u(x) = u(a) + \int_a^x u'(z) dz.$$

Cum $u' \in L^2(a, b) \subset L^1(a, b) \implies u$ este absolut continuă pe $[a, b]$.

Definiție.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Cum $C_0^\infty(\Omega)$ este un subspațiu vectorial, închiderea sa în $H^1(\Omega)$ este un subspațiu vectorial închis al lui $H^1(\Omega)$.

Observații. Se poate demonstra folosind regularizatele că

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}^{H^1(\mathbb{R}^N)} = H^1(\mathbb{R}^N),$$

adică

$$H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N).$$

Dacă $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, atunci $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

Dacă pe $H_0^1(\Omega)$ se consideră produsul scalar de pe $H^1(\Omega)$, atunci

$$(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ este un spațiu Hilbert}$$

(orice subspațiu vectorial închis al unui spațiu Hilbert este un spațiu Hilbert).

6 CURS 6

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă și mărginită, atunci

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \quad \text{continuu și dens.}$$

Lema lui Gagliardo. Fie funcțiile $f_1(x_2, x_3, \dots, x_N)$ (de $N - 1$ variabile; lipsește x_1), $f_2(x_1, x_3, \dots, x_N)$ (de $N - 1$ variabile; lipsește x_2), ..., $f_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ (de $N - 1$ variabile; lipsește x_N), $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ și

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_1(x_2, x_3, \dots, x_N) \cdots f_N(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$$

(de N variabile). Atunci, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ și

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x_1, x_2, \dots, x_N)| dx_1 dx_2 \cdots dx_N \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demonstrație. Vom utiliza metoda inducției matematice. Luăm

$P(N) : \forall f_1, f_2, \dots, f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$, atunci $f = f_1 f_2 \cdots f_N \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|f_1 f_2 \cdots f_N\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

$P(2)$ este adevărată. În adevăr, dacă $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, atunci

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2) f_2(x_1)| dx_1 dx_2 &= \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)| dx_1 \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)| dx_2 \\ \implies \|f_1 f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Să arătăm acum că dacă $P(N)$ adevărată ($N \geq 2$), atunci $P(N+1)$ adevărată.

Fie $f_1(x_2, x_3, \dots, x_{N+1}), f_2(x_1, x_3, \dots, x_{N+1}), \dots, f_{N+1}(x_1, x_2, \dots, x_N) \in L^N(\mathbb{R}^N)$ și notăm cu $\bar{x}_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{N+1})$. Atunci

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{N+1}} |f_1(\bar{x}_1) f_2(\bar{x}_2) \cdots f_{N+1}(\bar{x}_{N+1})| dx_1 dx_2 \cdots dx_{N+1} \\ = & \int_{\mathbb{R}^N} |f_{N+1}(\bar{x}_{N+1})| \int_{\mathbb{R}} |f_1(\bar{x}_1) f_2(\bar{x}_2) \cdots f_N(\bar{x}_N)| dx_{N+1} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_{N+1}(\bar{x}_{N+1})|^N dx_1 dx_2 \cdots dx_N \right)^{\frac{1}{N}} \\ & \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(\bar{x}_1) \cdots f_N(\bar{x}_N)| dx_{N+1} \right)^{\frac{N}{N-1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \right]^{\frac{N-1}{N}} \end{aligned}$$

(din inegalitatea lui Hölder; N și $\frac{N}{N-1}$ sunt conjugate armonice)

$$\begin{aligned} & \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(\bar{x}_1)|^N dx_{N+1} \right)^{\frac{1}{N}} \cdots \right. \right. \\ & \left. \left. \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} |f_N(\bar{x}_N)|^N dx_{N+1} \right)^{\frac{1}{N}} \right]^{\frac{N}{N-1}} dx_1 \cdots dx_N \right\}^{\frac{N-1}{N}} \end{aligned}$$

(din inegalitatea lui Hölder)

$$= \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g_1(x_2, \dots, x_N) \cdots g_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \right)^{\frac{N-1}{N}}$$

$$\text{(unde } g_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_k(\bar{x}_k)|^N dx_{N+1} \right)^{\frac{1}{N-1}} \text{)}$$

$\in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$). Aplicând ipoteza inductivă obținem că

$$\begin{aligned} &\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left[\prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_j(\bar{x}_j)|^N dx_{N+1} dx_1 \cdots dx_N \right)^{\frac{1}{N-1}} \right]^{\frac{N-1}{N}} \\ &= \prod_{j=1}^{N+1} \|f_j\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \implies P(N+1) \text{ adevărată.} \end{aligned}$$

Teorema de scufundare. Dacă $N \geq 3$, atunci

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$$

(scufundarea fiind continuă), unde $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$.

Observație. Aceasta înseamnă că pentru un $p = \frac{2N}{N-2} > 2$ avem că $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \implies u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ și

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

(C fiind o constantă pozitivă).

Observație. Dacă $N \in \{1, 2\}$, atunci se poate demonstra că

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \text{ continuu, } \forall p \geq 2.$$

Demonstrația teoremei de scufundare. Pentru orice $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ fixat, avem că

$$\text{supp}(u) \subset (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N).$$

Avem că $\forall x \in \mathbb{R}^N$:

$$u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) - u(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_N)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_j}^{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_N) dt \\
\implies |u(x)| &\leq \int_{a_j}^{x_j} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_N) \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N) \right| dx_j = g_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N).
\end{aligned}$$

Cum

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N) \right| dx_j \right)^{\frac{1}{N-1}},$$

atunci din lema lui Gagliardo rezultă că

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \prod_{j=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N) \right| dx_1 dx_2 \cdots dx_N \right)^{\frac{1}{N-1}}. \quad (6.1)$$

Considerăm un $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ și $u = |v|^{q-1}v$, unde $q > 1$ va fi precizat ulterior

$$\begin{aligned}
\implies \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= q|v(x)|^{q-1} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x), \quad j \in \{1, 2, \dots, N\} \\
&\implies \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| dx \\
&\leq q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| dx \leq q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Din (6.1) rezultă că

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q \cdot \frac{N}{N-1}} dx &\leq \prod_{j=1}^N \left[q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{N-1}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2(q-1)} dx \right)^{\frac{N}{2(N-1)}} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

(unde $C \geq$ este o constantă). Alegem q astfel încât

$$q \cdot \frac{N}{N-1} = 2(q-1) \iff 2 = 2q - q \frac{N}{N-1} \iff q = \frac{2(N-1)}{N-2}.$$

Rezultă că $2(q-1) = \frac{2N}{N-2} = p$. Din (6.2) obținem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{N}{2(N-1)}} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}} \\ \implies \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{1 - \frac{N}{2(N-1)}} &\leq C \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N}{N-1}} \\ \implies \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right)^{\frac{N-2}{2N}} &\leq \tilde{C} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ \iff \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{C} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Cum $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ este o submulțime densă a lui $H^1(\mathbb{R}^N)$ și a lui $L^p(\mathbb{R}^N)$, rezultă că $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\exists \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ a.î.

$$v_n \longrightarrow v \text{ în } H^1(\mathbb{R}^N), \quad v_n \longrightarrow v \text{ în } L^p(\mathbb{R}^N).$$

(DE CE ?) În adevăr, din (6.3):

$$\|v_{n+m} - v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} \|v_{n+m} - v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Cum $\{v_n\}$ este șir Cauchy în $H^1(\mathbb{R}^N)$ (fiind șir convergent), rezultă că este șir Cauchy și în $L^p(\mathbb{R}^N)$ și deci există $\tilde{v} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ a.î. $v_n \rightarrow \tilde{v}$ în $L^p(\mathbb{R}^N)$. De ce avem că $\tilde{v} = v$?

Din $v_n \rightarrow v$ în $H^1(\mathbb{R}^N)$ și deci și în $L^2(\mathbb{R}^N)$, rezultă

$$\exists \{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} : v_{n_k}(x) \rightarrow v(x) \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Din $v_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ în $L^p(\mathbb{R}^N)$, rezultă

$$\exists \{v_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}} : v_{n_{k_l}}(x) \rightarrow \tilde{v}(x) \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Deci, $v(x) = \tilde{v}(x)$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^N$.

Din (6.3) (pentru $v := v_n$) se obține prin trecere la limită concluzia teoremei.

7 CURS 7

Teorema de prelungire. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă, mărginită, cu frontiera de clasă C^1 , atunci există un operator de prelungire $P : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ liniar, care verifică*

$$(i) \quad Pu|_{\Omega} = u;$$

$$(ii) \quad \|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega);$$

$$(iii) \quad \|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

unde $C_0 \geq 0$ este o constantă ce depinde de Ω .

Pentru demonstrație a se vedea [Barbu], [Brezis].

Teoremă de scufundare. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă, mărginită, cu frontiera de clasă C^1 , atunci*

$$H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

continuu, unde $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ pentru $N \geq 3$ și pentru orice $p \geq 1$ pentru $N \in \{1, 2\}$.

Demonstrație. Fie $P : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ un operator de prelungire. Atunci, pentru orice $u \in H^1(\Omega)$ avem că $Pu \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Din teorema de scufundare din cursul precedent rezultă că

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} \|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Dar $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|Pu\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, iar $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}$ (din teorema de prelungire) și deci putem concluziona că

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0 \tilde{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Teoremă de scufundare compactă. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă, mărginită, cu frontiera de clasă C^1 , atunci

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

($H^1(\Omega)$ este scufundat compact în $L^2(\Omega)$, adică $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, definit prin $i(u) = u$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, este un operator liniar continuu și compact).

Demonstrație. Vom utiliza criteriul de compactitate al lui Fréchet-Kolmogorov: “Fie $q \in [1, +\infty)$ și $\mathcal{M} \subset L^q(\Omega)$. Dacă

$$(j) \quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \quad \forall u \in \mathcal{M} \text{ (}\mathcal{M} \text{ este mărginită),}$$

$$(jj) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \text{ deschisă (adică } \bar{\omega} \subset \Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall h \in \mathbb{R}^N, |h| < \delta(\varepsilon)$$

$$\implies \left(\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon, \quad \forall u \in \mathcal{M},$$

(jjj) $\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \subset\subset \Omega$ deschisă:

$$\left(\int_{\Omega \setminus \omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon, \quad \forall u \in \mathcal{M},$$

atunci \mathcal{M} este relativ compactă în $L^q(\Omega)$.”

Vom mai folosi și următoarea leamnă:

Lemă. Pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$ deschisă:

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq |h|^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$\forall h \in \mathbb{R}^N$ cu $|h|$ suficient de mic.

Demonstrația lemei. $\forall u \in C^1(\overline{\Omega})$ avem că

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x + \lambda h) \cdot h d\lambda$$

(“ \cdot ” este produsul scalar în \mathbb{R}^N), $\forall h \in \mathbb{R}^N$, $|h| < \text{dist}(\overline{\omega}, \partial\Omega)$

$$\begin{aligned} \implies |u(x+h) - u(x)|^2 &\leq \left| \int_0^1 \nabla u(x + \lambda h) \cdot h d\lambda \right|^2 \\ &\leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x + \lambda h)|^2 d\lambda \\ \implies \int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx &\leq |h|^2 \int_{\omega} \int_0^1 |\nabla u(x + \lambda h)|^2 d\lambda dx \\ &= |h|^2 \int_0^1 \int_{\omega} |\nabla u(x + \lambda h)|^2 dx d\lambda. \end{aligned}$$

Dar

$$\int_{\omega} |\nabla u(x + \lambda h)|^2 dx = \int_{\omega + \lambda h} |\nabla u(y)|^2 dy \leq \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Deci,

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq |h|^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad (7.1)$$

$\forall h \in \mathbb{R}^N$ cu $|h|$ suficient de mic. Cum $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ continuu, rezultă că $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\exists \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ a.î.

$$u_n \longrightarrow u \text{ în } H^1(\Omega) \implies u_n \longrightarrow u \text{ în } L^2(\Omega). \quad (7.2)$$

Din (7.1) avem că

$$\int_{\omega} |u_n(x+h) - u_n(x)|^2 dx \leq |h|^2 \|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (7.3)$$

Cum din (7.2) rezultă că $u_n(\cdot+h) - u_n(\cdot) \longrightarrow u(\cdot+h) - u(\cdot)$ în $L^2(\omega)$

$$\implies \int_{\omega} |u_n(x+h) - u_n(x)|^2 dx \longrightarrow \int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx.$$

Folosind (7.3) și (7.2) rezultă concluzia lemei.

Demonstrația teoremei (continuare). Cum $\forall u \in H^1(\Omega) \implies u \in L^2(\Omega)$ și

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

înseamnă că ne mai rămâne să arătăm că $\forall \mathcal{M}$ mărginită în $H^1(\Omega) \implies \mathcal{M}$ relativ compactă în $L^2(\Omega)$. Vom utiliza criteriul lui Fréchet-Kolmogorov.

Cum \mathcal{M} este mărginită în $H^1(\Omega) \implies (j)$ (pentru $q = 2$).

Pentru a demonstra (jj) : $\forall \omega \subset\subset \Omega$ deschisă avem

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \leq |h|^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C|h|^2$$

(din leamnă), $\forall u \in \mathcal{M}$ (deoarece $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \forall u \in \mathcal{M}$), $\forall h \in \mathbb{R}^N$
a.î. $|h| < \text{dist}(\bar{\omega}, \partial\Omega)$

$$\implies \left(\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} |h| < \varepsilon,$$

dacă $|h| < \text{dist}(\bar{\omega}, \partial\Omega)$ și $|h| < C^{-\frac{1}{2}}\varepsilon$. Deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) =$

$\min\{C^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, \text{dist}(\bar{\omega}, \partial\Omega)\}$ a.î. $\forall h \in \mathbb{R}^N, |h| < \delta(\varepsilon)$

$$\implies \left(\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad \forall u \in \mathcal{M} \implies (jj).$$

Pentru a demonstra (jjj) considerăm $\omega \subset\subset \Omega$ deschisă. Avem că

$$\int_{\Omega \setminus \omega} |u(x)|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega \setminus \omega} |u(x)|^{2 \cdot \frac{p}{p-2}} dx \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\Omega \setminus \omega} 1^{\frac{p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}}$$

(aici $p > 2$ este dat de teorema precedentă de scufundare)

$$\leq \left[\left(\int_{\Omega} |u(x)|^{1 \cdot \frac{p}{p-2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^2 m(\Omega \setminus \omega)^{\frac{p-2}{p}} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 m(\Omega \setminus \omega)^{\frac{p-2}{p}}$$

(din $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$)

$$\leq C_1 C^2 m(\Omega \setminus \omega)^{\frac{p-2}{p}} < \varepsilon,$$

dacă $m(\Omega \setminus \omega) < (C_1^{-1} C^{-2} \varepsilon)^{\frac{p}{p-2}}$. Deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \subset\subset \Omega$ deschisă cu

$$m(\Omega \setminus \omega) < (C_1^{-1} C^{-2} \varepsilon)^{\frac{p}{p-2}} \implies \left(\int_{\Omega \setminus \omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad \forall u \in \mathcal{M}$$

\implies (jjj) are loc.

Din criteriul lui Fréchet-Kolmogorov rezultă concluzia.

“Urma” unui element din $H^1(\Omega)$

Avem că $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ dens. Fie $\gamma : C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, definit prin

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

Se poate demonstra că

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad (7.4)$$

unde C este o constantă pozitivă.

Cum $C^1(\bar{\Omega})$ este un subspațiu liniar și dens al lui $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$, rezultă că γ se poate prelungi în mod unic la $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, cu păstrarea liniarității și a mărginirii (7.4), $\forall u \in H^1(\Omega)$.

Observații. $\gamma(u)$ este “urma” lui $u \in H^1(\Omega)$. Se va nota simplu u (atunci când nu există pericol de confuzie).

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \gamma(u) = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}.$$

8 CURS 8

Inegalitatea lui Friedrichs-Poincaré. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschisă și mărginită. Atunci există $C \geq 0$ a.î.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstrație. Cum Ω este mărginită rezultă că

$$\Omega \subset \times_{j=1}^N [-a_j, a_j], \quad \text{unde } a_j \in (0, +\infty).$$

Avem că $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_N) ds \\ &= \int_{-a_i}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_N) ds \\ \implies |u(x)| &\leq \int_{-a_i}^{a_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_N) \right| ds \\ &\leq (2a_i)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a_i}^{a_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_N) \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(din inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

$$\implies \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2a_i)^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (8.1)$$

Fie $u \in H_0^1(\Omega)$ oarecare. Din densitatea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $H_0^1(\Omega)$ rezultă

$$\begin{aligned} \exists \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ a.î. } u_n &\longrightarrow u \text{ în } H_0^1(\Omega) \\ u_n &\longrightarrow u \text{ în } L^2(\Omega), \quad \nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ în } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Din (8.1) rezultă că

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2a_i)^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \implies \text{concluzia.}$$

Consecință. Cum $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + C^2)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, rezultă că

$$u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

este o normă pe $H_0^1(\Omega)$ și este echivalentă cu cea moștenită de pe $H^1(\Omega)$.

De acum înainte, prin normă uzuală pe $H_0^1(\Omega)$ vom înțelege

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observații. $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu Hilbert real, unde

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Inegalitatea lui Friedrichs-Poincaré are loc dacă Ω se găsește între două hiperplane paralele (nu este nevoie ca Ω să fie mărginită).

Dualul lui $H_0^1(\Omega)$

Notăție. $(H_0^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$.

Teorema de caracterizare.

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega); u = f + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, f, f_j \in L^2(\Omega), j = \overline{1, N} \right\}.$$

Demonstrație. Pentru orice $u \in H^{-1}(\Omega)$, există $F \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (teorema lui Riesz):

$$u(\varphi) = \langle F, \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla F(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx$$

(notăm $g_j = \frac{\partial F}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$)

$$= \sum_{j=1}^N \left[- \int_{\Omega} g_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \right] = \sum_{j=1}^N \left[-g_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right] = \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(\varphi)$$

$$\implies u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \implies \text{prima incluziune .}$$

Să demonstrăm acum cea de-a doua incluziune. $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $u = f + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$, $f, f_j \in L^2(\Omega)$, $j = \overline{1, N}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$u(\varphi) = f(\varphi) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\varphi) = f(\varphi) - \sum_{j=1}^N f_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx \\
\Rightarrow |u(\varphi)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \|f_j\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (\text{din inegalitatea lui Poincaré; } M \geq 0).
\end{aligned}$$

Avem deci că $\varphi \mapsto u(\varphi)$ este operator liniar de la $\mathcal{D}(\Omega)$ la \mathbb{R} , ce satisface

$$|u(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cum $\mathcal{D}(\Omega)$ este densă în $H_0^1(\Omega)$, rezultă că acest operator se poate prelungi în mod unic (notându-l tot cu u) cu păstrarea liniarității și mărginirii, i.e. $|u(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Deci, $u = f + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$.

Observație. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}$ deschisă și mărginită și $x_0 \in \Omega$, atunci $\delta_{x_0} \in H^{-1}(\Omega)$ (deoarece $\delta_{x_0} = H'(\cdot - x_0)$).

Probleme la limită pentru ecuații eliptice

Lema lui Lax-Milgram. Fie V un spațiu Hilbert real, V^* dualul său și $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ biliniară, continuă și coercivă. Atunci, $\forall f \in V^*, \exists u \in V$ a.î.

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V^*, V}, \quad \forall v \in V.$$

Dacă în plus a este simetrică, atunci u este unicul punct de minim (pe V) pentru

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{V^*, V}.$$

Observație. Dacă a este biliniară, atunci este continuă dacă și numai dacă a este un operator mărginit, adică

$$\exists M \geq 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

a este coercivă dacă $\exists \omega > 0$ a.î.

$$a(v, v) \geq \omega \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

$\langle f, v \rangle_{V^*, V}$ este o altă notație pentru $f(v)$.

Demonstrația teoremei. Pentru orice $u \in V$, considerăm $Au \in V^*$ definit prin

$$\langle Au, v \rangle_{V^*, V} = a(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Este evident că pentru orice $u \in V$ avem că $v \mapsto a(u, v)$ este un operator liniar și mărginit,

$$|\langle Au, v \rangle_{V^*, V}| = |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V$$

$$\implies Au \in V^* \text{ și } \|Au\|_{V^*} \leq M \|u\|_V, \quad \forall u \in V.$$

Avem deci că $A \in L(V; V^*)$ și $\|A\|_{L(V; V^*)} \leq M$.

Va trebui să demonstrăm întâi că $\forall f \in V^*, \exists u \in V$ a.î.

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V^*, V} \iff Au = f$$

(adică A este operator bijectiv).

Injectivitatea lui A : Pentru orice $u_1, u_2 \in V$ a.î.

$$Au_1 = Au_2 \iff a(u_1, v) = a(u_2, v), \quad \forall v \in V$$

$$\iff a(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Pentru $v = u_1 - u_2$ obținem că

$$\begin{aligned} 0 &= a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \omega \|u_1 - u_2\|_V^2 \\ &\implies u_1 - u_2 = 0_V \iff u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Deci, A este injectiv.

Surjectivitatea lui A : Cum $A : V \longrightarrow V^*$ este un operator liniar, rezultă că $R(A) = A(V)$ este un subspațiu vectorial al lui V^* .

Trebuie să demonstrăm că $R(A) = V^*$. Vom arăta întâi că $R(A)$ este un subspațiu vectorial închis ($R(A) = \overline{R(A)}$) și apoi că este un subspațiu dens în V^* (adică $\overline{R(A)} = V^*$).

Închiderea lui $R(A)$: Pentru orice $\gamma \in \overline{R(A)}$, $\exists \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ a.î. $Av_n \longrightarrow \gamma$ în V^* . Rezultă că $\{Av_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy în V^* , i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq n(\varepsilon) \implies \|Av_{n+p} - Av_n\|_{V^*} < \varepsilon$. Rezultă că

$$\begin{aligned} \langle Av_{n+p} - Av_n, v_{n+p} - v_n \rangle_{V^*, V} &\leq \varepsilon \|v_{n+p} - v_n\|_V \\ \implies \omega \|v_{n+p} - v_n\|_V^2 &\leq a(v_{n+p} - v_n, v_{n+p} - v_n) \leq \varepsilon \|v_{n+p} - v_n\|_V \\ &\implies \omega \|v_{n+p} - v_n\|_V \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Deci, $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy în V . Rezultă că există $v \in V$ astfel ca

$$v_n \longrightarrow v \text{ în } V \implies Av_n \longrightarrow Av \text{ în } V^*.$$

Concluzionăm că $\gamma = Av \in R(A)$. Deci, $\overline{R(A)} \subset R(A)$ și deci $R(A)$ închis în V^* .

Densitatea lui $R(A)$ în V^* : Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că $R(A)$ este un subspațiu vectorial nedens în V^* . Rezultă existența unui $w^{**} \in V^{**}$, $w^{**} \neq 0_{V^{**}}$ a.î.

$$\langle Av, w^{**} \rangle_{V^*, V^{**}} = 0, \quad \forall v \in V.$$

Din teorema lui Riesz avem că există un unic $w^* \in V^*$ a.î. $\|w^*\|_{V^*} = \|w^{**}\|_{V^{**}}$ și

$$\langle v^*, w^{**} \rangle_{V^*, V^{**}} = \langle v^*, w^* \rangle_{V^*}, \quad \forall v^* \in V^*.$$

Tot din teorema lui Riesz avem că există $w \in V$ a.î.

$$\langle v, w^* \rangle_{V, V^*} = \langle v, w \rangle_V, \quad v \in V$$

și $\|w^*\|_{V^*} = \|w\|_V$. Avem deci că

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Av, w^{**} \rangle_{V^*, V^{**}} = \langle Av, w^* \rangle_{V^*} = \langle Av, w \rangle_{V^*, V} \\ &\implies a(v, w) = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Luând $v := w$ și utilizând coercivitatea lui a deducem că $w = 0_V$. Cum

$$\|w^{**}\|_{V^{**}} = \|w^*\|_{V^*} = \|w\|_V = 0,$$

urmează că $w^{**} = 0_{V^{**}}$; contradicție.

Observație. Am folosit faptul că

$$\langle v^*, w^* \rangle_{V^*} = \langle v, w \rangle_V,$$

unde u, w sunt elementele din V care se identifică cu v^* , respectiv w^* (prin teorema lui Riesz).

Partea a doua a demonstrației. Dacă a este și simetrică, atunci

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = a(u, v), \quad u, v \in V$$

definește un produs scalar pe V care induce o normă echivalentă că $\|\cdot\|_V$ (pe care o notăm cu $\|\|\cdot\|\|$).

Fie u soluția ecuației $a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V^*, V}$, $\forall v \in V$. Să demonstrăm întâi că u este punct de minim pentru $\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{V^*, V}$ pe V . În adevăr

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle_{V^*, V} \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{V^*, V} \\
\iff & \frac{1}{2}\langle\langle u, u \rangle\rangle - \langle f, u \rangle_{V^*, V} \leq \frac{1}{2}\langle\langle v, v \rangle\rangle - \langle f, v \rangle_{V^*, V} \\
\iff & \frac{1}{2}\langle\langle u, u \rangle\rangle \leq \frac{1}{2}\langle\langle v, v \rangle\rangle - \langle f, v - u \rangle_{V^*, V} \\
\iff & \frac{1}{2}\langle\langle u, u \rangle\rangle \leq \frac{1}{2}\langle\langle v, v \rangle\rangle - \langle\langle u, v - u \rangle\rangle \\
& \iff 0 \leq \|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

Deci, u este punct de minim pentru funcționala de mai sus. De asemenea rezultă că este unicul punct de minim.

9 CURS 9

Problemă la limită cu condiție Dirichlet omogenă

Considerăm problema

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + a_0(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă și mărginită).

Definiție. Spunem că u este o soluție slabă (variațională) pentru problema (D) dacă

$$(i) \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observație. Cum s-a ajuns la aceasta ?

Condiția (ii) s-a obținut făcând un calcul formal. Am înmulțit (D) cu v și am obținut:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Din formula lui Gauss-Ostrogradski (aplicată formal) obținem

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) d\sigma + \int_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x) dx \\ = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Pentru ca aceste integrale să fie corect definite apare natural ca $u, v \in L^2(\Omega)$, $\nabla u, \nabla v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Cum $u = 0$ pe $\partial\Omega$ rezultă condiția $u \in H_0^1(\Omega)$ ((i)). Deci, v aparține aceluiași spațiu $\implies v \in H_0^1(\Omega) \implies v = 0$ pe $\partial\Omega \implies \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\sigma \implies$ (ii).

Teoremă. Dacă $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \Omega$ și $f \in L^2(\Omega)$, atunci problema (D) admite o unică soluție slabă u . Mai mult, u este unicul punct de minim pe $H_0^1(\Omega)$ pentru

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a_0(x)|v(x)|^2 dx \right] - \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Demonstrație. Fie $V = H_0^1(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x)u(x)v(x)dx,$$

$$F(v) = \langle F, v \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Avem că $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este un operator bilinar. În plus,

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

(din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

$$\leq (1 + C^2 \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

De asemenea

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a_0(x)|v(x)|^2 dx \geq \|v\|_V^2$$

(deci, a este coercivă cu $\omega = 1$).

Avem că $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ este operator liniar și

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

$$\implies F \in V^*.$$

Din lema lui Lax-Milgram rezultă că există un unic $u \in V = H_0^1(\Omega)$ a.î.

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

(adică u este soluție slabă pentru (D)).

Cum a este simetrică $\implies u$ este unicul punct de minim pe $V = H_0^1(\Omega)$ pentru

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a_0(x) |v(x)|^2 dx \right] - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Problemă la limită cu condiție Robin neomogenă

Considerăm problema

$$(R) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + a_0(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este deschisă și mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1 pe porțiuni).

Definiție. Spunem că u este o soluție slabă (variațională) pentru problema (R) dacă

$$(i) \quad u \in H^1(\Omega),$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad & \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) d\sigma \\
& = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v(x) d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Observație. Cum s-a ajuns la aceasta ?

Condiția (ii) s-a obținut făcând un calcul formal. Am înmulțit (R) cu v și am obținut:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Din formula lui Gauss-Ostrogradski (aplicată formal) obținem

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) d\sigma + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx \\
& = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Deci,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) d\sigma + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx \\
& = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v(x) d\sigma
\end{aligned}$$

(adică(ii)). De asemenea este natural să cerem ca $u, v \in H^1(\Omega)$ (de unde și (i)).

Teoremă. Dacă $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq \rho > 0$ a.p.t. $x \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$, $\alpha(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \partial\Omega$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$,

atunci problema (R) admite o unică soluție slabă u . Mai mult, u este unicul punct de minim pe $H^1(\Omega)$ pentru

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a_0(x) |v(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) |v(x)|^2 d\sigma \right] - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \varphi(x)v(x) d\sigma.$$

Observație. Asupra lui a_0 s-a impus o condiție mai tare decât nenegativitatea.

Condiția la limită este de tip Robin neomogenă.

Demonstrație. Fie $V = H^1(\Omega)$, $V^* = (H^1(\Omega))^*$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) d\sigma,$$

$$F(v) = \langle F, v \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v(x) d\sigma.$$

Avem că $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este un operator biliniar. În plus, $\forall u, v \in V$:

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

(din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

$$\begin{aligned} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\alpha_0\|_{L^\infty(\partial\Omega)} C_1^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\implies a \text{ operator mărginit.} \end{aligned}$$

De asemenea

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} a_0(x) |v(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) |v(x)|^2 d\sigma \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \rho \int_{\Omega} |v(x)|^2 = \min\{1, \rho\} \|v\|_V^2 \implies a \text{ coercivă.} \end{aligned}$$

Avem că $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ este operator liniar și

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$\implies F$ mărginit. Deci, $F \in V^*$.

Din lema lui Lax-Milgram rezultă că există un unic $u \in V = H^1(\Omega)$ a.î.

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

(adică u este soluție slabă pentru (R)).

Cum a este simetrică $\implies u$ este unicul punct de minim pe $V = H^1(\Omega)$ pentru

$$\frac{1}{2} a(v, v) - F(v),$$

adică obținem partea a doua a concluziei teoremei.

Observații. Condiția $a_0(x) \geq \rho > 0$ a.p.t. $x \in \Omega$ a fost folosită în demonstrarea coercivității lui a .

Dacă luăm $\alpha \equiv 0$, atunci obținem un rezultat pentru condiția la limită de tip Neumann.

10 CURS 10

Sisteme ortonormale în spații Hilbert

Propoziție. Fie $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un sistem ortonormal în spațiul Hilbert real H . Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este complet;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2 = \|u\|^2, \quad \forall u \in H$ (identitatea lui Parseval);

(iii) $u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n, \quad \forall u \in H$.

Observație. $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H$ este o bază ortonormală dacă $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este sistem ortonormal și $\forall u \in H, \exists^* \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ a.î.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

(iii) ne spune că $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este bază ortonormală și ne dă în plus că $\alpha_n = \langle u_n, u \rangle$.

O serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n$, unde $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este bază ortonormală și $\beta_n \in \mathbb{R}$, se numește *serie Fourier* (în raport cu baza $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$).

Demonstrația propoziției. Să demonstrăm întâi că (ii) \implies (i). Pentru orice $u \in H, \langle u_n, u \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă din (ii) că

$$\|u\|^2 = 0 \implies u = 0_H$$

și deci $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este sistem complet.

Să demonstrăm că $(iii) \implies (ii)$.

Pentru orice $u \in H$, $u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n$

$$\implies \sum_{n=1}^N \langle u_n, u \rangle u_n \longrightarrow u \quad \text{în } H$$

$$\implies \left\| \sum_{n=1}^N \langle u_n, u \rangle u_n \right\|^2 \longrightarrow \|u\|^2 \quad \text{pentru } N \longrightarrow +\infty$$

$$\iff \sum_{n=1}^N |\langle u_n, u \rangle|^2 \longrightarrow \|u\|^2,$$

adică $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2 = \|u\|^2$.

A rămas să demonstrăm că $(i) \implies (iii)$.

Cum

$$0 \leq \left\| u - \sum_{n=1}^N \langle u_n, u \rangle u_n \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle u_n, u \rangle|^2$$

$$\implies \sum_{n=1}^N |\langle u_n, u \rangle|^2 \leq \|u\|^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad (\text{inegalitatea lui Bessel}).$$

Să arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n$ este convergentă în H , adică șirul $\left\{ \sum_{n=1}^N \langle u_n, u \rangle u_n \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este Cauchy.

În adevăr

$$\left\| \sum_{n=1}^{N+p} |\langle u_n, u \rangle| u_n - \sum_{n=1}^N |\langle u_n, u \rangle| u_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} |\langle u_n, u \rangle| u_n \right\|^2 < \varepsilon,$$

$\forall N, p \in \mathbb{N}^*, N \geq N(\varepsilon)$ (deoarece șirul $\{\sum_{n=1}^N |\langle u_n, u \rangle|^2\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ este Cauchy)

$$\implies \exists v \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n = v$$

(H este spațiu complet).

Să arătăm că $v = u$. Pentru aceasta vom demonstra că $v - u$ este ortogonal pe $u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În adevăr

$$\langle v - u, u_n \rangle = \langle u_n, u \rangle - \langle u_n, u \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Din (i) rezultă că $v - u = 0_H \implies v = u$. Deci, are loc (iii).

Autovalori și autofuncții pentru operatorul $-\Delta$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu.

Definiție. Spunem că $\lambda \in \mathbb{C}$ este o autovaloare pentru $-\Delta$ cu condiție Dirichlet omogenă pe $\partial\Omega$ dacă există φ soluție nebanală pentru

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x), & x \in \Omega \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.1)$$

O soluție pentru (10.1) corespunzătoare unei autovalori λ se numește autofuncție corespunzătoare lui λ .

Teorema 10.1. *Dacă Ω este mărginită, cu frontiera de clasă C^2 , atunci există un sistem ortonormal complet $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^2(\Omega)$*

format din autofuncții ale lui $-\Delta$ cu condiție Dirichlet omogenă la frontieră. De fapt

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), & x \in \Omega \\ \varphi_n(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

și $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$.

Observație. Toate autovalorile sunt reale, pozitive. Prima autovaloare este simplă, celelalte autovalori pot avea multiplicitate > 1 , dar finită.

Dacă λ_k are multiplicitate r , atunci convenim să scriem $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+r-1} = \lambda_k$ și $\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r-1}\}$ autofuncții ortogonale în $L^2(\Omega)$ corespunzătoare lui λ_k .

Observație. Autofuncțiile $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstrația teoremei se bazează pe teoria Riesz-Schauder-Fredholm. Aceasta ne asigură că dacă $\mathcal{T} : H \longrightarrow H$ este un operator liniar, compact și autoadjunct, atunci H admite o bază ortonormală formată din autofuncții ale lui \mathcal{T} : $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ a.î.

$$\mathcal{T}\varphi_n = \mu_n\varphi_n.$$

În plus, orice autovaloare este

- reală,
- are multiplicitate finită,
- mulțimea autovalorilor este cel mult numărabilă și are cel mult un punct de acumulare și acesta este 0

(deci avem fie un număr finit de autovalori, fie $\mu_n \longrightarrow 0$).

Demonstrația teoremei (continuare). Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$, fie $\varphi_f \in H_0^1(\Omega)$ soluția slabă a problemei De fapt

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = f(x), & x \in \Omega \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10.2)$$

(existența și unicitatea lui φ_f rezultă din lema lui Lax-Milgram). Fie $\mathcal{T} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{T}f = \varphi_f, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Evident \mathcal{T} este liniar. Să demonstrăm că este compact și autoadjunct.

În adevăr, din (10.2) obținem că

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi_f(x)|^2 dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi_f(x) dx$$

$$\implies \|\varphi_f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_f\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(din inegalitatea lui Poincaré)

$$\implies \|\varphi_f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Deci, $\|\mathcal{T}f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, $\forall f \in L^2(\Omega)$. Rezultă că pentru orice mulțime $\mathcal{M} \subset L^2(\Omega)$ mărginită, $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ este mărginită în $H_0^1(\Omega)$ și deci relativ compactă în $L^2(\Omega)$. În concluzie, \mathcal{T} este operator compact.

Mai rămâne să arătăm că \mathcal{T} este autoadjunct. Pentru orice $f, g \in L^2(\Omega)$ avem că

$$\langle \mathcal{T}f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \mathcal{T}g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Cum

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_f \cdot \nabla\psi dx = \int_{\Omega} f\psi dx, \quad \psi \in H_0^1(\Omega), \quad (10.3)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_g \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} g \psi dx, \quad \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (10.4)$$

Luând $\psi = \varphi_g$ în (10.3) și $\psi = \varphi_f$ în (10.4), rezultă că

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi_f(x) \cdot \nabla \varphi_g(x) dx &= \int_{\Omega} f \mathcal{T} g dx = \int_{\Omega} g \mathcal{T} f dx \\ &\implies \langle f, \mathcal{T} g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathcal{T} f, g \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Deci, \mathcal{T} este autoadjunct.

Din teoria Riesz-Schauder-Fredholm rezultă că avem o bază ortonormală $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ în $L^2(\Omega)$:

$$\mathcal{T} \varphi_n = \mu_n \varphi_n,$$

adică

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\mu_n \varphi_n) \cdot \nabla \psi dx &= \int_{\Omega} \varphi_n \psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \\ \implies \mu_n \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \psi dx &= \int_{\Omega} \varphi_n \psi dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pentru $\psi = \varphi_n \implies \mu_n \|\varphi_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \implies \mu_n > 0$.

Luând $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ obținem concluzia teoremei.

Observație. Analog se arată existența unei baze ortonormale pentru $-\Delta$ cu condiții Neumann sau Robin omogene la frontiera $\partial\Omega$.

11 CURS 11

Ecuatia căldurii (ecuația parabolică)

Deducerea ecuației. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conductor termic. Notăm cu $u(x, t)$ temperatura acestuia în punctul $x \in \Omega$ la momentul t . Dacă $V \subset\subset \Omega$ este un subdomeniu mărginit cu frontiera S netedă, atunci

“Cantitatea de căldură cedată de V , la momentul t , prin frontiera S este dată de

$$Q_c = - \int_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) d\sigma \text{ (legea lui Fourier)”,}$$

unde $k(x)$ este conductivitatea termică.

Dacă există o sursă de căldură de intensitate $F(x, t)$, atunci căldura primită de V la momentul t este

$$Q_p = \int_V F(x, t) dx.$$

Făcând bilanțul termic se obține

$$\begin{aligned} \int_V [u(x, t + dt) - u(x, t)] \rho(x) c(x) dx &= \int_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) dx \cdot dt \\ &+ \int_V F(x, t) dx \cdot dt \end{aligned}$$

($\rho(x)$ = densitatea, $c(x)$ = căldura specifică)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V \frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} \rho(x) c(x) dx &= \int_V \nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) dx \\ &+ \int_V F(x, t) dx. \end{aligned}$$

Alegând $V = B(x_0; r) \subset \Omega \implies$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(B(x_0; r))} \int_{B(x_0; r)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \rho(x) c(x) dx \\ &= \frac{1}{m(B(x_0; r))} \int_{B(x_0; r)} \nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) dx \\ & \quad + \frac{1}{m(B(x_0; r))} \int_{B(x_0; r)} F(x, t) dx \\ & \implies \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t) \rho(x_0) c(x_0) = \nabla \cdot (k(x_0) \nabla u(x_0, t)) + F(x_0, t). \end{aligned}$$

Cum $x_0 \in \Omega$ este arbitrar, rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \rho(x) c(x) = \nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) + F(x, t), \quad x \in \Omega, t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Dacă conductorul este omogen, atunci $\rho(x)$ constant, $c(x)$ constant, $k(x)$ constant, atunci

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= k \Delta u(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, t \in I \\ \implies \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{k}{\rho c} \Delta u(x, t) + \frac{1}{\rho c} F(x, t), \quad x \in \Omega, t \in I. \end{aligned}$$

Printr-o rescalare se obține

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \Delta u + f.$$

Vom studia următoarea problemă

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T) \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (11.1)$$

unde $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1 .

Definiție. Spunem că u este o soluție slabă pentru problema (11.1) dacă

- (i) $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1((0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T]; H_0^1(\Omega))$;
- (ii) $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) dx$,
 $\forall t \in (0, T], \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$;
- (iii) $u(x, 0) = u_0(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Teorema 11.1. Dacă $u_0 \in L^2(\Omega)$ și $f \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$, atunci există o unică soluție slabă u pentru (11.1). Aceasta satisface

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq C \left[\int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right] \end{aligned}$$

($C \geq 0$ este o constantă ce nu depinde de u_0, f ; depinde doar de Ω).

Dacă în plus $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, atunci $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$.

Demonstrație. Se va folosi următorul rezultat din teoria seriilor Fourier:

Lemă. Fie X un spațiu Hilbert real, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ o bază ortonormală și seria de funcții

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e_n, \quad \text{unde } c_n : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

(j) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)^2$ este uniform convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)e_n$ este convergentă uniform în X la $x : [0, T] \longrightarrow X$ continuă și $\|x(t)\|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)^2$;

(jj) Dacă $c_n \in C^1([0, T])$ și

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)^2$ este uniform convergentă, $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t)^2$ este uniform con-

vergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)e_n$ converge uniform la $x : [0, T] \longrightarrow X$.

În plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t)e_n = x'(t) \quad \text{în } X$$

uniform în raport cu $t \in [0, T]$.

Demonstrația teoremei 11.1 (continuare). Metoda este una constructivă. Se caută soluția sub forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x), \quad (11.2)$$

unde $u_n : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, iar $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o bază ortonormală în $L^2(\Omega)$, formată din autofuncții pentru $-\Delta$, cu condiție Dirichlet omogenă la frontieră. φ_n satisface

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), & x \in \Omega \\ \varphi_n(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11.3)$$

$(0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow +\infty)$.

Observație. (2) poate fi văzută ca

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n$$

(serie Fourier în $L^2(\Omega)$ în raport cu baza $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$).

Vom face acum un calcul formal. Pornim de la faptul că

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega), \quad (11.4)$$

unde $u_{0n} \in \mathbb{R}$ (și $\sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ din identitatea lui Parseval).

Cum $f \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \implies$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega), \quad (11.5)$$

unde $f_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \in C^1([0, T])$ și

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)^2 = \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Calculul lui u_{0n} și f_n : Din (11.4) și (11.5) rezultă că

$$u_{0n} = \langle u_0, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad f_n(t) = \langle f(t), \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Vom face în continuare un calcul formal:

Din (11.2) avem că

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \varphi_n,$$

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Delta \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n) u_n(t) \varphi_n,$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n.$$

Din (11.1) și din condiția inițială obținem identificând coeficienții că

$$\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), & t \in (0, T) \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Soluția problemei (11.6) este

$$u_n(t) = e^{-\lambda_n t} u_{0n} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (11.7)$$

Vom demonstra întâi că u dat de (11.2), unde u_n este dat de (11.7), este soluție slabă pentru (11.1).

12 CURS 12

Să începem prin a arăta că $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. În adevăr, $\forall t \in [0, T]$:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega)$$

($u_n \in C([0, T])$) și sunt date de (11.7)). Dacă arătăm că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)^2$ converge uniform, atunci din lema rezultă că $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Pentru $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} u_n(t)^2 &\leq 2e^{-2\lambda_n t} u_{0n}^2 + 2 \left(\int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ &\leq 2u_{0n}^2 + 2 \left(\int_0^T |f_n(s)| ds \right)^2 \leq 2u_{0n}^2 + 2T \int_0^T |f_n(s)|^2 ds = \alpha_n \end{aligned}$$

(constantă nenegativă). Din

$$u_n(t)^2 \leq \alpha_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 2\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2T \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

rezultă că

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n(t)^2 \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n < \varepsilon, \quad \forall N, p \in \mathbb{N}^*, N \geq N(\varepsilon)$$

(cum $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă $\implies \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*, \forall N, p \in \mathbb{N}^*, N \geq N(\varepsilon) \implies \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n < \varepsilon$). Deci, șirul sumelor parțiale pentru $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)^2$ este uniform Cauchy, deci și uniform convergent

$$\implies u \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Să arătăm acum că $u \in C((0, T]; H_0^1(\Omega))$. Vom arăta de fapt că $\forall \theta \in (0, T)$ avem că $u \in C([\theta, T]; H_0^1(\Omega))$.

Din

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n \text{ în } L^2(\Omega) \implies u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} u_n(t) \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \text{ în } H_0^1(\Omega).$$

Cum $\left\{ \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o bază ortonormală în $H_0^1(\Omega)$, este suficient (în virtutea lemei) să demonstrăm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t)^2$$

este uniform convergentă pentru $t \in [\theta, T]$, pentru a obține concluzia.

În adevăr, avem că $\forall t \in [\theta, T]$:

$$\begin{aligned} \lambda_n u_n(t)^2 &\leq \lambda_n \left[2e^{-2\lambda_n t} u_{0n}^2 + 2 \left(\int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2\lambda_n e^{-2\lambda_n t} u_{0n}^2 + 2\lambda_n e^{-2\lambda_n t} \int_0^t e^{2\lambda_n s} ds \int_0^t f_n(s)^2 ds \end{aligned}$$

(folosim că $e^{2\lambda_n t} \geq e^{2\lambda_n \theta} \geq 2\lambda_n \theta$)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\theta} u_{0n}^2 + 2\lambda_n e^{-2\lambda_n t} \frac{e^{2\lambda_n t} - 1}{2\lambda_n} \int_0^T f_n(s)^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\theta} u_{0n}^2 + \int_0^T f_n(s)^2 ds = \beta_n \end{aligned}$$

(avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \frac{1}{\theta} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ este convergentă)

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t)^2 \text{ uniform convergentă pentru } t \in [\theta, T]$$

$$\implies u \in C([\theta, T]; H_0^1(\Omega)).$$

Tot făcând apel la leamnă se poate arăta că $u \in C^1((0, T]; L^2(\Omega))$ și că $\forall t \in (0, T]$:

$$\frac{du}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega). \quad (12.1)$$

Rezultă deci că u satisface condiția (i) din definiția soluției slabe.

Vom demonstra în continuare că u satisface condiția (ii). Din (12.1) obținem că

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), \varphi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \langle \varphi_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar uzual pe $L^2(\Omega)$. Pe de altă parte

$$\langle \nabla u(t), \nabla \varphi \rangle = \langle u(t), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T].$$

Din

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} u_n(t) \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \text{în } H_0^1(\Omega) \\ \implies \langle u(t), \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} u_n(t) \left\langle \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \varphi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \langle \varphi_n, \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t) \langle \varphi_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ținând cont de dezvoltarea în serie Fourier a lui f rezultă (ii). Folosind acum dezvoltările Fourier ale lui $u(0)$ și u_0 , obținem și cea de-a treia condiție (iii).

Deci, u este soluție slabă pentru (11.1).

Unicitatea soluției slabe. Fie y o soluție slabă pentru (11.1). Rezultă că

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega), \quad t \in (0, T]$$

(admite o dezvoltare Fourier). Cum y satisface (i) și de aici urmează că

$$\frac{dy}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega), \quad t \in (0, T].$$

Cum y satisface (ii) rezultă (pentru $\varphi := \varphi_n$):

$$y'_n(t) + \langle y(t), \varphi_n \rangle_{H_0^1(\Omega)} = f_n(t), \quad t \in (0, T]. \quad (12.2)$$

Dar

$$\begin{aligned} \langle y(t), \varphi_n \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} y_m(t) \sqrt{\lambda_m} \frac{\varphi_m}{\sqrt{\lambda_m}}, \varphi_n \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= y_n(t) \|\varphi_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \lambda_n y_n(t). \end{aligned}$$

Folosind relația (12.2) rezultă că

$$y'_n(t) + \lambda_n y_n(t) = f_n(t), \quad t \in (0, T]. \quad (12.3)$$

Pe de altă parte, din (iii) rezultă

$$y_n(0) = u_{0n}. \quad (12.4)$$

Din (12.3) și (12.4) concluzionăm că

$$y_n(t) = e^{-\lambda_n t} u_{0n} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Deci, $y_n(t) = u_n(t)$, $\forall t \in [0, T] \implies y \equiv u \implies \text{unicitatea}$.

Observație. Celelalte concluzii din teoremă rezultă de asemenea din dezvoltările Fourier ale soluției în $L^2(\Omega)$ și $H_0^1(\Omega)$.

13 CURS 13

Ecuatia undelor (ecuația hiperbolică)

Considerăm următoarea problemă

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \Delta y(x, t) + f(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T) \\ y(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (13.1)$$

unde $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1 . Aici $a > 0$.

Este ecuația unei membrane elastice (unde $y(x, t)$ = amplitudinea în x , la momentul t , a^2 = constanta elastică, $f(x, t)$ = forța verticală. Condiția la limită arată că membrana este fixată la frontieră.

Definiție. Spunem că y este soluție slabă pentru (13.1) dacă

- (i) $y \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega))$;
- (ii) Funcția $t \mapsto \int_{\Omega} \frac{dy}{dt}(x, t) \varphi(x) dx$ este absolut continuă pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ și
$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{dy}{dt}(x, t) \varphi(x) dx \right) + a^2 \int_{\Omega} \nabla y(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) dx \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega); \end{aligned}$$
- (iii) $y(x, 0) = y_0(x)$, $\frac{dy}{dt}(x, 0) = y_1(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Teorema 13.1. *Dacă $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$ și $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, atunci există o unică soluție slabă y pentru (13.1).*

În plus,

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dy}{dt}(x, t) \right|^2 dx + a^2 \int_{\Omega} |\nabla y(x, t)|^2 dx \\ \leq C \left[\|y_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|y_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |f(x, s)|^2 dx ds \right]$$

($C \geq 0$ este o constantă).

Dacă $f \equiv 0 \implies$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{dy}{dt}(x, t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla y(x, t)|^2 dx \text{ este constantă.}$$

Metoda de demonstrație este aceeași ca în cazul ecuației parabolice.

Se caută soluția sub forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x).$$

Făcând calculele formal obținem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \varphi_n \quad \text{în } L^2(\Omega),$$

$$\Delta y(x, t) = \Delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Delta \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n) u_n(t) \varphi_n.$$

Avem că

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n, \\y_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n}\varphi_n \\y_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} y_{1n}\varphi_n.\end{aligned}$$

Rezultă că

$$\begin{cases} u_n''(t) + \lambda_n a^2 u_n(t) = f_n(t), & t \in (0, T) \\ u_n(0) = y_{0n} \\ u_n'(0) = y_{1n}. \end{cases}$$

Avem deci o ecuație diferențială de ordinul al doilea. Soluția este dată de

$$\begin{aligned}u_n(t) &= y_{0n} \cos a\sqrt{\lambda_n}t + \frac{y_{1n}}{a\sqrt{\lambda_n}} \sin a\sqrt{\lambda_n}t \\ &+ \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(s) \sin a\sqrt{\lambda_n}(t-s)ds.\end{aligned}$$

Faptul că y satisface (i)-(iii) se demonstrează folosind lema.

14 BIBLIOGRAFIE

References

- [1] G. Aniculăesei, S. Anița, Ecuatii cu derivate parțiale. Culegere de probleme, Editura Universității “Al.I. Cuza”, Iași, 1994.
- [2] V. Barbu, Probleme la limită pentru ecuații cu derivate parțiale, Editura Academiei Române, București, 1993.
- [3] V. Barbu, Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [4] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications, Dunod, Paris, 2005.