

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Note de curs

Sebastian Anița

UNIVERSITATEA “AL.I. CUZA” DIN IAȘI

SEBASTIAN ANIȚA

Note de curs

ECUAȚII DIFERENȚIALE

IAȘI – 2026

CUPRINS

CURS 1	7
I. INTRODUCERE	7
1. Ecuație diferențială ordinară. Soluție a unei ecuații diferențiale ordinare	7
2. Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul 1 și ecuații diferențiale de ordin superior	9
3. Ecuații diferențiale ordinare abordate prin metode elementare	11
3.1. Ecuații cu variabile separabile	11
CURS 2	15
3.2. Ecuații omogene	15
3.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul 1	17
3.4. Ecuații Bernoulli	19
3.5. Ecuații diferențiale exacte	21
CURS 3	25
3.6. Ecuații Riccati	25
3.7. Ecuații Lagrange și ecuații Clairaut	26
3.8. Ecuații de ordin superior	29
CURS 4	33
4. Fenomene modelate de ecuații diferențiale ordinare	33
Exerciții	38

CURS 5	43
II. TEOREME DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE	43
1. Teoreme de existență și unicitate pentru ecuații diferențiale de ordinul 1	43
CURS 6	51
2. Teoreme de existență a soluției problemei Cauchy atașate sistemelor diferențiale de ordinul 1 și ecuațiilor diferențiale de ordin superior	51
CURS 7	57
3. Teorema de unicitate globală	57
4. Continuitatea soluției în raport cu data inițială	61
Exerciții	63
CURS 8	67
III. SISTEME DIFERENȚIALE LINIARE	67
1. Sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1	67
CURS 9	73
1. Sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1 (continuare)	73
CURS 10	79
2. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior	79
CURS 11	87
3. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți	87
Exerciții	97

CURS 12	101
IV. ELEMENTE DE TEORIA STABILITĂȚII	101
1. Criterii de stabilitate a soluției nule pentru sistemele diferențiale liniare	104
CURS 13	109
2. Stabilitatea sistemelor. Metoda primei aproximații	109
Exerciții	118
Bibliografie	120

CURS 1

I. INTRODUCERE

Numeroase fenomene din fizică, chimie, biologie și din alte domenii ale științei pot fi descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale. Studiul acestor ecuații permite o mai bună înțelegere și predicție a fenomenelor descrise de acestea.

O ecuație diferențială este o ecuație în care necunoscuta este o funcție și în care apar funcția și derivatele acesteia până la un anumit ordin $n \in \mathbf{N}^*$. Numărul n se numește ordinul ecuației diferențiale.

Dacă funcția necunoscută depinde de un singur argument, atunci ecuația diferențială respectivă se numește ordinară. În cazul în care funcția necunoscută depinde de mai multe variabile, ecuația se numește cu derivate parțiale.

Prezentul curs este dedicat studierii ecuațiilor diferențiale ordinare.

1. Ecuație diferențială ordinară. Soluție a unei ecuații diferențiale ordinare

Forma generală a unei ecuații diferențiale ordinare de ordin n este următoarea:

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

unde t este variabila independentă, x este funcția necunoscută (este o funcție de variabilă t), iar x' , x'' , ..., $x^{(n)}$ sunt derivatele până la ordinul $n \in \mathbf{N}^*$ ale lui x .

Funcția $F : D \longrightarrow \mathbf{R}$, unde D este un subdomeniu al lui $\mathbf{R}^{n+2}$.

Definiție. Se numește *soluție* pentru (1) o funcție x definită pe un interval I al axei reale (I poate fi un interval deschis (α, β) , închis $[\alpha, \beta]$ sau de forma $(\alpha, \beta]$ sau $[\alpha, \beta)$) cu valori în $\mathbf{R}$, cu proprietatea $x \in C^n(I)$ și care verifică

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I$$

(se subînțelege deci că $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in D$ pentru orice $t \in I$).

Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației (1) se numește *soluția generală* a acesteia.

În anumite situații ecuația (1) se poate scrie sub forma (*normală*):

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (2)$$

Pentru $n = 1$ obținem forma generală a unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul 1:

$$F(t, x, x') = 0, \quad (3)$$

unde $F : D \longrightarrow \mathbf{R}$, (D fiind un domeniu din $\mathbf{R}^3$), precum și forma normală

$$x' = f(t, x). \quad (4)$$

În general, o ecuație diferențială de ordinul 1 se studiază împreună cu o condiție inițială

$$x(t_0) = x_0, \quad (5)$$

unde $t_0 \in I$ și $x_0 \in \mathbf{R}$ sunt date (și se numesc valori inițiale).

Prin problemă Cauchy asociată ecuației (3) (sau (4)) se înțelege găsirea soluțiilor x ale ecuației (3) (sau (4)) care verifică condiția (5).

În cazul în care funcția f din (4) este independentă de x , atunci problema Cauchy atașată ecuației (4) se scrie astfel

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6)$$

unde $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$ și $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Presupunem că f este o funcție continuă. Problema Cauchy revine la a găsi primitivele funcției f , definite pe subintervale ce conțin t_0 , care iau în punctul t_0 valoarea x_0 . Pentru a le găsi nu avem decât de integrat de la t_0 la t și obținem

$$\int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s)ds.$$

Aplicând formula Leibniz-Newton rezultă că

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s)ds$$

și cum $x(t_0) = x_0$, concluzionăm că

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds \quad (7)$$

(care este funcție de clasă C^1) este soluție a problemei (6) și este definită pe întreg intervalul (α, β) . De altfel, cum orice soluție a problemei (6) are forma dată de (7), rezultă și unicitatea soluției problemei Cauchy (6).

2. Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul 1 și ecuații diferențiale de ordin superior

Vom studia în această lucrare și sisteme diferențiale de ordinul 1 de următoarea formă:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (8)$$

unde $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt funcții definite pe un domeniu din $\mathbf{R}^{n+1}$, cu valori în $\mathbf{R}$.

Definiție. Spunem că $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ este o *soluție* pentru (8) dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt funcții de clasă C^1 pe un interval $I \subset \mathbf{R}$ și verifică

$$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \forall t \in I,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (8) se numește *soluția generală* a acestuia.

Dacă atașăm sistemului (8) condiția inițială

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_0^1 \\ x_2(t_0) = x_0^2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_0^n, \end{cases}$$

vom obține o problemă Cauchy.

Considerăm din nou ecuația (2). Dacă x este o soluție a ecuației (2) și dacă considerăm funcțiile

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)},$$

deducem că $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o soluție a următorului sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (9)$$

Reciproc, dacă $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este o soluție pentru sistemul (9), atunci funcția $x(t) = x_1(t)$ este o soluție pentru (8).

Vom spune astfel că ecuația de ordinul n , (8) este echivalentă cu sistemul (9). De asemenea este natural, în virtutea acestei echivalențe,

să se studieze ecuațiile diferențiale de ordinul n împreună cu condiția inițială

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0^1 \\ x'(t_0) = x_0^2 \\ \dots\dots\dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^n, \end{cases}$$

unde $t_0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ sunt numere reale fixate.

3. Ecuații diferențiale ordinare abordate prin metode elementare

În această secțiune vom discuta câteva tipuri de ecuații diferențiale ordinare pentru care se găsesc formule explicite de rezolvare sau metode de reducere a acestora la ecuații mai simple.

3.1. Ecuații cu variabile separabile

Numeroase ecuații diferențiale ordinare se pot reduce printr-un număr finit de operații algebrice la o ecuație de forma:

$$x' = f(t) \cdot g(x), \quad (10)$$

unde $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}, g : (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții continue cu $g(x) \neq 0, \forall x \in (\gamma, \delta)$ (intervalele de definiție putând fi și nemărginite). Ecuația (10) este o *ecuație cu variabile separabile*.

De exemplu, ecuația

$$\frac{1}{t}x' = \frac{\sin t}{x^2 + 1}$$

se reduce prin înmulțire cu t la ecuația:

$$x' = t \sin t \cdot \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Dorim să găsim soluțiile ecuației (10) care verifică condiția:

$$x(t_0) = x_0, \quad (11)$$

unde $t_0 \in (\alpha, \beta)$ și $x_0 \in (\gamma, \delta)$. Împărțind ecuația (10) prin $g(x(t))$ (care este diferit de 0) se obține

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$$

și integrând de la t_0 la t avem:

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds. \quad (12)$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = x(s)$, (12) devine

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t f(s) ds. \quad (13)$$

Notăm cu

$$G(x) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)}, \quad x \in (\gamma, \delta). \quad (14)$$

G este o primitivă a funcției continue $\frac{1}{g}$. Cum g este diferită de 0 pe (γ, δ) și este și continuă, concluzionăm că g este fie strict pozitivă pe (γ, δ) , fie strict negativă pe (γ, δ) . În prima situație rezultă că G este strict crescătoare pe (γ, δ) , iar în a doua situație G este strict descrescătoare pe (γ, δ) .

Deci, G este strict monotonă și continuă. Funcția G^{-1} are deci aceleași proprietăți.

Relația (13) se mai poate scrie ca

$$G(x(t)) = \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

De aici rezultă că

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^t f(s) ds\right) \quad (15)$$

și x este definită pe un subinterval al lui (α, β) care conține pe t_0 (este definită doar pentru acei $t \in (\alpha, \beta)$ cu proprietatea că $\int_{t_0}^t f(s) ds \in G((\alpha, \beta))$).

Reciproc, funcția x definită de (15) pe un subinterval al lui (α, β) , este o funcție de clasă C^1 și verifică

$$x(t_0) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t_0} f(s)ds\right) = G^{-1}(0).$$

Cum $G(x_0) = 0$ (din (15)), rezultă că $G^{-1}(0) = x_0$ și deci x verifică condiția inițială (11). Derivând (15) obținem

$$x'(t) = \frac{f(t)}{G'(G^{-1}(\int_{t_0}^t f(s)ds))} = f(t) \cdot g(x(t)),$$

adică x este soluție a ecuației (10).

Exemplu. Să se găsească soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{2tx}{t^2 + 1}, & t \in \mathbf{R} \\ x(0) = c > 0. \end{cases}$$

Soluție. În cazul acesta $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ este o funcție continuă, iar $g(x) = x$. Pentru a avea că g este diferită de 0 este necesar să o considerăm fie $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, fie $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R}$. În ambele cazuri g este o funcție continuă. Cum $x(0) = c > 0$, este deci necesar să ne limităm la cazul când $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$.

Înseamnă că vom căuta soluții strict pozitive ale problemei Cauchy.

Împărțind ambii membri ai ecuației prin x obținem:

$$\frac{x'}{x} = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Integrând de la 0 la t rezultă

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \int_0^t \frac{2s}{s^2 + 1} ds$$

și deci

$$\int_c^{x(t)} \frac{dy}{y} = \ln(s^2 + 1)|_0^t.$$

Aceasta implică

$$\begin{aligned} \ln x(t) - \ln c &= \ln(t^2 + 1) \\ \iff x(t) &= c(t^2 + 1), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

CURS 2

3.2. Ecuații omogene

Considerăm ecuația

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right), \quad (16)$$

unde $h : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că $h(u) \neq u$, $\forall u \in (a, b)$.

Ecuația (16) se numește *ecuație diferențială omogenă*. Făcând substituția

$$u = \frac{x}{t}$$

se obține imediat că $x' = tu' + u$ și înlocuind în (16) avem

$$tu' + u = h(u) \iff tu' = h(u) - u$$

care se reduce la o ecuație cu variabile separabile.

Un exemplu de ecuație care se reduce la o ecuație omogenă este următorul:

$$x' = \frac{x - t}{x + t}, \quad t > 0.$$

Ecuația se mai poate scrie ca

$$x' = \frac{t\left(\frac{x}{t} - 1\right)}{t\left(\frac{x}{t} + 1\right)} \iff x' = \frac{\frac{x}{t} - 1}{\frac{x}{t} + 1},$$

care este evident o ecuație omogenă. În acest caz $h(u) = \frac{u-1}{u+1}$, $h : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbf{R}$ sau $h : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, iar condiția $h(u) \neq u$ este echivalentă cu

$$\frac{u-1}{u+1} \neq u \iff u-1 \neq u^2+u,$$

care este evident adevărată.

Făcând substituția $u = \frac{x}{t}$ se obține

$$u't + u = \frac{u-1}{u+1} \iff tu' = \frac{u-1}{u+1} - u$$

$$\Longleftrightarrow tu' = \frac{u - 1 - u^2 - u}{u + 1} \Longleftrightarrow u' = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1 + u^2}{u + 1},$$

care este evident o ecuație cu variabile separabile

Exemplul 2. Ecuația

$$txx' = t^2 + x^2, \quad t, x \neq 0$$

se mai poate scrie ca

$$x' = \frac{t^2 + x^2}{tx} = \frac{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}{\frac{x}{t}},$$

care este o ecuație omogenă. În acest caz

$$h(u) = \frac{1 + u^2}{u}$$

este o funcție continuă pe $(0, +\infty)$ și pe $(-\infty, 0)$ și satisface condiția $h(u) \neq u, \forall u \neq 0$. Făcând substituția $u = \frac{x}{t}$, ecuația devine

$$\begin{aligned} tu' + u &= \frac{1 + u^2}{u} \Longleftrightarrow tu' = \frac{1}{u} \\ \Longleftrightarrow u' &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

care este o ecuație cu variabile separabile.

Observație. Ecuația diferențială

$$x' = \frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}$$

($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ și satisfac condiția $a\beta \neq \alpha b$) se reduce la ecuația

$$y'(s) = \frac{as + by}{\alpha s + \beta y}$$

prin substituția $s = t - t_0, y = x - x_0$, unde (t_0, x_0) este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} at_0 + bx_0 + c = 0 \\ \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma = 0. \end{cases}$$

3.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul 1

O ecuație de forma

$$x' = a(t)x + b(t), \quad (17)$$

unde $a, b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, se numește *ecuație diferențială liniară de ordinul 1*.

În cele ce urmează vom găsi soluția generală a ecuației (17).

Fie x_0 valoarea în t_0 a soluției x ($t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbf{R}$ sunt oarecare). Ecuația (17) este echivalentă cu

$$x' - a(t)x = b(t).$$

Înmulțim ultima ecuație cu $e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$ și obținem

$$\left(x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\right)' = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}b(t).$$

Integrând de la t_0 la t și utilizând formula lui Leibniz-Newton rezultă

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - x_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau)d\tau}b(s)ds.$$

De aici deducem că

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}b(s)ds. \quad (18)$$

Reciproc, funcția x dată de formula (18) (cu $t_0 \in (\alpha, \beta)$ și $x_0 \in \mathbf{R}$ oarecare) este de clasă C^1 pe (α, β) . În plus, derivând (18) se obține că x verifică (17).

Concluzia este că soluția generală a ecuației (17) este dată de formula (18), iar intervalul maxim de definiție al acestor soluții este (α, β) .

În cazul particular al funcțiilor a și b constante, ecuația (17) devine

$$x' = ax + b, \quad (19)$$

cu $a, b \in \mathbf{R}$. Soluția generală a ecuației (19) este

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}b ds, \quad t \in \mathbf{R} \quad (20)$$

(formula variației constantelor), cu $x_0 \in \mathbf{R}$ oarecare (l-am ales pe $t_0 = 0$).

Exemplul 1. Ecuația dinamicii populației este

$$y' = ky$$

(modelul lui Malthus; $k = \beta - \mu$, unde β este rata natalității, iar μ este rata mortalității). Aceasta este o ecuație liniară (dar și una cu variabile separabile). Aplicând formula (20) obținem că numărul de indivizi la momentul t este

$$y(t) = e^{kt}y_0, \quad t \geq 0,$$

unde $y_0 \in (0, +\infty)$ este numărul inițial de indivizi. Concluzia lui Malthus era una catastrofică, anume că pentru $k < 0$ (rata natalității este mai mică decât cea a mortalității) avem:

$$y(t) \rightarrow 0, \quad \text{pentru } t \rightarrow +\infty$$

(populația evoluează spre extincție).

Pentru $k > 0$ (rata natalității este mai mare decât cea a mortalității), avem:

$$y(t) \rightarrow +\infty, \quad \text{pentru } t \rightarrow +\infty,$$

ceea ce conduce la înmulțirea necontrolată a populației și implicit la distrugerea resurselor mediului.

Doar pentru $k = 0$ (rata natalității este egală cu cea a mortalității), avem că

$$y(t) = y_0, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

deci populația este staționară.

Această concluzie finală a dus la cea mai importantă critică adusă modelului lui Malthus: el nu ține cont de limitarea resurselor de hrană și de suprapopulare.

Exemplul 2. Să se afle soluția problemei

$$\begin{cases} tx' = 2x + t^2, & t > 1 \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Soluție. Împărțind prin t obținem:

$$x' = \frac{2}{t}x + t.$$

De aici deducem că

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_1^t \frac{2}{s} ds} x(1) + \int_1^t e^{\int_s^t \frac{2}{\tau} d\tau} s \, ds \\ &\iff x(t) = \int_1^t \frac{t^2}{s^2} s \, ds \\ &\iff x(t) = t^2 \ln t, \quad \forall t \in [1, +\infty). \end{aligned}$$

3.4. Ecuații Bernoulli

O ecuație de forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad (21)$$

unde $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ se numește *ecuație Bernoulli*. Dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$, atunci (21) este o ecuație liniară.

Prin substituția $y = x^{1-\alpha}$, ecuația se reduce la o ecuație diferențială liniară de ordinul 1.

Exemplu. Modelul propus de Malthus pentru dinamica unei populații a fost corectat de Verhulst prin luarea în considerare a suprapopulării. Modelul propus de acesta este

$$y' = ky - \gamma y^2 \quad (\gamma > 0), \quad (22)$$

unde γy este o rată suplimentară de mortalitate datorată suprapopulării și proporțională cu y și se folosește pentru situația când $k > 0$.

Presupunem pentru început că $y(0) = y_0 \in (0, \frac{k}{\gamma})$.

Împărțim ambii membri ai ecuației prin y și facem substituția $z = y^{-1}$. Obținem astfel:

$$\begin{aligned} y^{-2}y' &= ky^{-1} - \gamma \iff -z' = kz - \gamma \\ \iff z' &= -kz + \gamma. \end{aligned}$$

Cum $y(0) = y_0$, rezultă deci $z(0) = y_0^{-1}$. Utilizând formula variației constantelor avem

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-kt}y_0^{-1} + \int_0^t e^{-k(t-s)}\gamma ds \\ &= e^{-kt}y_0^{-1} + e^{-kt}\gamma\frac{1}{k}(e^{kt} - 1) \\ &= e^{-kt}(y_0^{-1} - \frac{\gamma}{k}) + \frac{\gamma}{k} > \frac{\gamma}{k}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Deci,

$$y(t) = \frac{1}{e^{-kt}(\frac{1}{y_0} - \frac{\gamma}{k}) + \frac{\gamma}{k}}, \quad \forall t \geq 0. \quad (23)$$

Făcând pe $t \rightarrow +\infty$ rezultă

$$y(t) \rightarrow \frac{k}{\gamma}, \quad \text{pentru } t \rightarrow +\infty$$

($\frac{k}{\gamma}$ este soluție staționară a ecuației (22)).

Observație. Dacă $y_0 > \frac{k}{\gamma}$, atunci rezultă exact la fel că y dat de formula (23) este soluție. Pentru $t \rightarrow +\infty$ se obține de asemenea că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{k}{\gamma}.$$

Dacă $y_0 = \frac{k}{\gamma}$, atunci $y(t) = \frac{k}{\gamma}$, $t \geq 0$, este soluția căutată.

Concluzia este că dacă $y_0 > 0$, atunci soluția y tinde (pentru $t \rightarrow +\infty$) la soluția staționară $\frac{k}{\gamma}$ a ecuației (22).

Studiul modelului lui Verhulst infirmă predicțiile catastrofice ale lui Malthus legate de evoluția unei populații biologice.

3.5. Ecuații diferențiale exacte

Considerăm ecuația

$$x' = \frac{a(t, x)}{b(t, x)}, \quad (24)$$

unde $a, b : D \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții continue, cu $b(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in D$ (D este un domeniu al lui $\mathbf{R}^2$). Ecuația (24) este echivalentă cu

$$a(t, x)dt - b(t, x)dx = 0. \quad (25)$$

Dacă $adt - bdx$ este o diferențială totală exactă pe mulțimea D , adică există $F \in C^1(D)$ astfel încât

$$dF(t, x) = a(t, x)dt - b(t, x)dx,$$

atunci (24) se numește *ecuație cu diferențială totală* sau *ecuație diferențială exactă*.

În acest caz, ecuația (24) este echivalentă cu

$$dF(t, x) = 0.$$

De aici se deduce că

$$F(t, x(t)) = c, \quad (26)$$

unde c este o constantă arbitrară. Formula (26) ne dă soluția generală a ecuației (24) sub formă *implicită*.

Reciproc, pentru orice constantă c reală, formula (26) definește (conform teoremei funcțiilor implicite) o unică funcție x definită pe un interval (α, β) . Diferențiind (26) obținem imediat că x este soluție pentru (25) și deci și pentru (24).

Ne interesează să vedem cum ne dăm seama dacă $a(t, x)dt - b(t, x)dx$ este o diferențială totală exactă.

În cazul în care forma diferențială este o diferențială totală, atunci există $F \in C^1(D)$ astfel ca

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = a(t, x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -b(t, x),$$

pentru orice $(t, x) \in D$. Dacă în plus a și b sunt de clasă C^1 , atunci rezultă conform teoremei lui Schwarz că

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}, \quad \forall (t, x) \in D$$

și de aici

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial t}, \quad \forall (t, x) \in D. \quad (27)$$

Reciproc, dacă $a, b \in C^1(D)$ și dacă relația (27) are loc, atunci există $F \in C^2(D)$ astfel ca

$$dF = a(t, x)dt - b(t, x)dx$$

și deci forma diferențială $a(t, x)dt - b(t, x)dx$ este o diferențială totală exactă și deci (24) este o ecuație diferențială exactă.

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$x' = \frac{t+x}{x-t}. \quad (28)$$

Soluție. Ecuația are forma (24), unde $a(t, x) = t+x$, $b(t, x) = x-t$, iar $D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2; x > t\}$ sau $D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2; x < t\}$.

Pentru oricare din aceste două cazuri avem că $a, b \in C^1(D)$ și $b(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in D$. Rescriem ecuația (28) ca

$$(t+x)dt - (x-t)dx = 0.$$

Cum

$$\frac{\partial(t+x)}{\partial x} = -\frac{\partial(x-t)}{\partial t},$$

rezultă că ecuația este cu diferențiale exacte. Deci, există $F \in C^2(D)$ astfel ca

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -x + t \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = t + x \end{cases} \quad \forall (t, x) \in D \quad (29)$$

Din prima relație din (29) rezultă că

$$F(t, x) = -\frac{1}{2}x^2 + tx + h(t), \quad (30)$$

unde h este o funcție depinzând doar de t . Înlocuind pe F dat de (30) în cea de a doua relație din (29) obținem

$$x + h'(t) = t + x$$

și de aici avem $h(t) = \frac{1}{2}t^2$ verifică condiția de mai sus (evident că nu este singura astfel de funcție). Rezultă că

$$F(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + tx - \frac{1}{2}x^2$$

satisface (29) și că

$$dF(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D.$$

În concluzie

$$dF(t, x) = 0 \iff F(t, x) = c,$$

(unde $c \in \mathbf{R}$) ne dă soluția generală sub formă implicită. Adică

$$\frac{1}{2}t^2 + tx - \frac{1}{2}x^2 = c,$$

$c \in \mathbf{R}$, ne dă soluția generală (pentru ambele cazuri pentru D).

CURS 3

3.6. Ecuații diferențiale Riccati

Sunt de forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t), \quad (31)$$

unde $a, b, c : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții continue.

Ecuațiile de forma (31) nu sunt în general integrabile prin cuadraturi. Totuși, dacă se cunoaște o soluție particulară $\tilde{x}$ a ecuației (31), atunci se poate afla soluția generală x . În adevăr, avem

$$(x - \tilde{x})' = a(t)(x - \tilde{x}) + b(t)(x^2 - \tilde{x}^2)$$

și de aici rezultă

$$(x - \tilde{x})' = a(t)(x - \tilde{x}) + b(t)(x - \tilde{x})(x + \tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow (x - \tilde{x})' = (a(t) + 2b(t)\tilde{x})(x - \tilde{x}) + b(t)(x - \tilde{x})^2.$$

În concluzie, prin substituția $y = x - \tilde{x}$, ecuația (31) se reduce la ecuația Bernoulli

$$y' = (a(t) + 2b(t)\tilde{x})y + b(t)y^2.$$

Dacă a, b și c sunt funcții constante, atunci ecuația (31) este cu variabile separabile.

Exemplu. Să se integreze ecuația Riccati

$$x' = x^2 - 4t^2 + 2.$$

Soluție. Observăm că funcția $\tilde{x} = 2t$ este o soluție a ecuației date. Făcând substituția $y = x - \tilde{x}$, reducem studiul ecuației date la studiul ecuației

$$y' = x^2 - 4t^2 \Leftrightarrow y' = (x - 2t)(x + 2t)$$

$$\Leftrightarrow y' = y(y + 4t) \Leftrightarrow y' = 4ty + y^2.$$

Aceasta este o ecuație Bernoulli și se tratează după cum am arătat mai sus.

3.7. Ecuații Lagrange și ecuații Clairaut

Ecuația Lagrange are forma

$$x = t a(x') + b(x'), \quad (32)$$

unde $a, b : (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții de clasă C^1 și $a(p) \neq p, \forall p \in (\gamma, \delta)$.

Dacă x este o soluție a ecuației (32) definită pe intervalul I , atunci derivând termen cu termen în (32) obținem

$$x' = a(x') + t a'(x') x'' + b'(x') x''.$$

Notând cu $p = x'$, avem că

$$\begin{aligned} p &= a(p) + t a'(p) p' + b'(p) p' \Leftrightarrow p'(t a'(p) + b'(p)) = p - a(p) \\ &\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} (t a'(p) + b'(p)) = p - a(p). \end{aligned}$$

Concluzionăm imediat că

$$\frac{dt}{dp} = \frac{a'(p)}{p - a(p)} t + \frac{b'(p)}{p - a(p)}, \quad (33)$$

care este o ecuație liniară (în necunoscuta t , ca funcție de argumentul p).

Soluția generală pentru (33) este

$$t = f(p, c),$$

unde c este o constantă arbitrară.

Din (32) obținem

$$\begin{cases} t = f(p, c) \\ x = f(p, c) a(p) + b(p), \end{cases}$$

care ne dă soluția *parametrică* generală a ecuației (32).

Ecuția

$$x = t x' + b(x'), \quad (34)$$

unde $b : (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ este de clasă C^1 , se numește *ecuație Clairaut*. Se observă că are forma (32), cu $a(p) = p$, $\forall p \in (\gamma, \delta)$.

Cu toate acestea, ecuația Clairaut nu este un caz particular de ecuație Lagrange.

Prin derivare a ecuației (34) membru cu membru, se obține

$$x' = x' + t x'' + b'(x') x''$$

și deci

$$x''(t + b'(x')) = 0.$$

Primul tip de soluție verifică

$$x'' = 0$$

și deci este de forma

$$x(t) = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Înlocuind în (34) găsim că $c_2 = b(c_1)$ și de aici soluția

$$x(t) = c_1 t + b(c_1), \quad c_1 \in \mathbf{R}.$$

Al doilea tip de soluție verifică

$$t + b(x') = 0.$$

Notând $x' = p$, obținem o soluție parametrică a ecuației Clairaut

$$\begin{cases} t = -b'(p) \\ x = -b'(p)p + b(p) \end{cases}$$

(numită soluție singulară a acesteia).

Exemplul 1. Să se integreze ecuația

$$x = t(1 + x') + (x')^2. \quad (35)$$

Soluție. Aceasta este o ecuație Lagrange cu $a(p) = 1+p$, $b(p) = p^2$, $a, b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Evident că $a, b \in C^1(\mathbf{R})$. Derivând membru cu membru în (35) se obține

$$x' = 1 + x' + tx'' + 2x'x''$$

$$\iff 1 + (t + 2x')x'' = 0.$$

Notând $x' = p$, ecuația devine

$$1 + (t + 2p) \cdot \frac{dp}{dt} = 0$$

și de aici avem

$$\frac{dt}{dp} = -2p - t. \quad (36)$$

Ecuația liniară (36) are soluția generală

$$\begin{aligned} t &= e^{-p}c - 2 \int_0^p e^{-(p-s)} s ds, \quad c \in \mathbf{R} \\ &= e^{-p}c - 2e^{-p} \int_0^p e^s s ds. \end{aligned}$$

Cum

$$\int_0^p e^s s ds = e^s s \Big|_0^p - \int_0^p e^s ds = e^p p - e^p + 1,$$

deducem că

$$\begin{aligned} t &= e^{-p}c - 2e^{-p} \cdot e^p(p - 1) - 2e^{-p} \\ &= e^{-p}(c - 2) - 2(p - 1). \end{aligned}$$

În acest fel am obținut pentru (35) soluția generală

$$\begin{cases} t = e^{-p}c - 2(p - 1) \\ x = (1 + p)[e^{-p}c - 2(p - 1)] + p^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = e^{-p}c - 2(p-1) \\ x = (1+p)e^{-p}c - p^2 + 2, \quad c \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Exemplul 2. Să se integreze ecuația

$$x = tx' + (x')^2. \quad (37)$$

Soluție. Aceasta este o ecuație Clairaut. Derivând se obține

$$x' = x' + tx'' + 2x'x''$$

$$\Longleftrightarrow x''(t + 2x') = 0.$$

Din $x'' = 0$ obținem $x(t) = c_1t + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Înlocuind în (37) rezultă

$$c_1t + c_2 = c_2t + c_1^2$$

de unde concluzionăm că

$$x(t) = c_1t + c_1^2, \quad c_1 \in \mathbf{R}$$

(soluția generală a ecuației Clairaut date).

Din $t + 2x' = 0$, obținem făcând substituția $x' = p$:

$$\begin{cases} t = -2p \\ x = tp + p^2 \end{cases}$$

(soluția singulară parametrică) și de aici se obține această soluție și sub formă explicită

$$x = -\frac{t^2}{4}.$$

3.8. Ecuații de ordin superior

În anumite situații se poate reduce studiul acestor ecuații la ecuații de ordin mai mic.

În cazul ecuației de ordin n :

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0,$$

cu $k, n \in \mathbf{N}^*, k < n$, se utilizează substituția $y = x^{(k)}$ și se obține astfel ecuația de ordinul $n - k$:

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n-k)}) = 0.$$

Soluția x se obține apoi din y prin integrări succesive.

Pentru ecuații de forma:

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

se utilizează substituția $x' = p$ și se obține o ecuație de forma

$$G(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}) = 0$$

(aici apare funcția p și derivatele acesteia, în raport cu x , până la ordinul $n - 1$).

Exemplul 1. Să se găsească soluția generală a ecuației

$$tx'' + x' + t = 0, \quad t > 0.$$

Soluție. Notând $x' = y$, putem rescrie ecuația ca

$$ty' + y + t = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{t}y - 1.$$

Soluția generală a acestei ultime ecuații este

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_1^t \frac{1}{s} ds} c_1 - \int_1^t e^{-\int_s^t \frac{1}{\tau} d\tau} ds, \quad c_1 \in \mathbf{R} \\ &= e^{-\ln t} c_1 - e^{-\ln t} \int_1^t e^{\ln s} ds \\ &= \frac{c_1}{t} - \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} (t^2 - 1) \\ &= \frac{c_1 + \frac{1}{2}}{t} - \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

Notăm $\tilde{c} = c_1 + \frac{1}{2}$. Cum $x' = y$, rezultă

$$\begin{aligned} x' &= \tilde{c} \frac{1}{t} - \frac{1}{2}t \\ \iff x(t) &= \tilde{c} \ln t - \frac{1}{4}t^2 + d, \end{aligned}$$

unde $\tilde{c}, d \in \mathbf{R}$ sunt constante oarecare.

Exemplul 2. Un corp de masă m este lansat de la suprafața Pământului pe verticală cu viteza v_0 . Notăm cu $x(t)$ altitudinea la care se află corpul la momentul t (deci, momentul inițial este $t_0 = 0$ și $x(0) = 0$). Știind că forța de atracție pe care o exercită Pământul asupra corpului aflat la altitudinea x este egală cu $mgR^2/(x+R)^2$ (s-a presupus că Pământul este o sferă de rază R și că rezistența aerului este 0), să se determine viteza inițială minimă pentru care corpul nu mai revine pe Pământ.

Soluție. Din legea a doua a lui Newton se obține că

$$mx'' = -mgR^2/(x+R)^2. \quad (38)$$

Știm de asemenea din ipoteze că $x(0) = 0$ și $x'(0) = v_0$.

Notând $x' = p$, obținem

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p.$$

Înlocuind în (38) obținem

$$p \frac{dp}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

(ecuație cu variabile separabile). Integrând ecuația de la 0 la x rezultă

$$\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gR^2 \int_0^x \frac{1}{(y+R)^2} dy$$

(p este o funcție de x)

$$\iff \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gR^2 \left(-\frac{1}{y+R} \right) \Big|_0^x$$

$$\Longleftrightarrow p^2 - v_0^2 = \frac{2gR^2}{x + R} - 2gR. \quad (39)$$

Dacă $p(x) = v(t) = x'(t)$ rămâne permanent diferit de 0, atunci corpul nu se întoarce pe Pământ (altfel ar exista un $t > 0$ astfel ca $v(t) = 0$).

Dacă $v_0 \geq \sqrt{2gR}$, atunci viteza va fi permanent pozitivă și deci corpul nu revine pe Pământ.

Observație. $v_0 = \sqrt{2gR}$ este prima viteză cosmică. O analiză atentă a relației (39) arată că de fapt dacă $v_0 < \sqrt{2gR}$, atunci în mod necesar corpul revine pe Pământ.

CURS 4

4. Fenomene modelate de ecuații diferențiale ordinare

Vom prezenta în continuare câteva exemple de fenomene din fizică, chimie și biologie care sunt descrise de ecuații diferențiale ordinare.

Răcirea (încălzirea) corpurilor

Conform legii lui Newton *rata de răcire (încălzire) a suprafeței unui corp este direct proporțională cu diferența dintre temperatura suprafeței și cea a mediului înconjurător.*

Notăm cu $T(t)$ temperatura unui corp (în grade Celsius) la momentul t (se presupune că temperatura corpului este aceeași în orice punct al său) și fie T^0 ($T^0 \in \mathbf{R}$) temperatura mediului înconjurător (în grade Celsius).

Legea lui Newton se transcrie matematic astfel:

$$T' = k(T - T^0),$$

unde $k \in \mathbf{R}$ este constanta de proporționalitate, numită și constantă de transfer.

Pendulul simplu

Considerăm un corp punctiform de masă m suspendat de un braț rigid, fără masă, de lungime l (figura I.1). Presupunem că masa se mișcă într-un plan vertical. Notăm cu $\theta(t)$ unghiul (în radiani) pe care îl face la momentul t brațul pendulului cu (OA) . În cazul în care masa m se află la dreapta față de poziția de echilibru, atunci $\theta(t) > 0$, iar dacă se află la stânga, atunci $\theta(t) < 0$.

Figura I.1

Asupra masei m acționează forța $\vec{G}$ de modul mg , care se descompune într-o componentă activă după direcția tangențială, de mărime egală cu $-mg \sin \theta(t)$, și într-o componentă pasivă, după direcția brațului rigid. Cum mărimea arcului Am este egală cu $l\theta(t)$, rezultă utilizând legea a doua a lui Newton că

$$m(l\theta(t))'' = -mg \sin \theta(t).$$

În concluzie, obținem ecuația de ordinul 2:

$$l\theta'' + g \sin \theta = 0.$$

Oscilatorul armonic

Considerăm un corp punctiform de masă m suspendat de un resort fără masă și aflat în poziție de echilibru. Alungirea resortului față de poziția resortului când $m = 0$ este l_0 (figura I.2).

Figura I.2

Notăm cu $y(t)$ elongația la momentul t (deplasarea față de poziția de echilibru). Conform legii lui Hooke (tensiunea = forța elastică, este proporțională cu elongația) avem

$$kl_0 = mg,$$

unde k este constanta lui Hooke.

Corpul este tras în jos și apoi i se dă drumul să oscileze. La momentul t , mărimea rezultantei forțelor care acționează asupra corpului de masă m este

$$mg - k(y(t) + l_0) - \gamma y'(t)$$

(s-a presupus că apare și o forță de frecare proporțională cu viteza; γ = coeficient de frecare) și aceasta este egală cu $my''(t)$ (conform legii a doua a lui Newton). Avem deci,

$$my'' = mg - k(l_0 + y) - \gamma y'.$$

Cum $kl_0 = mg$, concluzionăm că y este soluție a ecuației:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0.$$

În cazul în care asupra masei m acționează o forță verticală externă de mărime $f(t)$, atunci făcând bilanțul forțelor și utilizând legea a doua a lui Newton obținem că y verifică ecuația:

$$my'' + \gamma y' + ky = f(t).$$

Dezintegrarea radioactivă

Experimentele arată că viteza de dezintegrare a unei substanțe radioactive este proporțională cu cantitatea de substanță. Notând cu $y(t)$ cantitatea dintr-o substanță radioactivă la momentul t avem că:

$$y'(t) = -ky(t),$$

unde $k > 0$ este o constantă specifică substanței. O mărime importantă în studiul procesului de dezintegrare al unei substanțe radioactive este timpul în care jumătate din substanță se dezintegrează și se numește timp de înjumătățire.

Dinamica populației

Notăm cu $y(t)$ numărul de indivizi ai unei populații biologice (la momentul t). Rata de creștere a populației datorată natalității este proporțională cu $y(t)$, cu constanta de proporționalitate β , numită și rată a fertilității. Rata de descreștere a populației, datorată mortalității, este de asemenea proporțională cu $y(t)$, cu constanta de proporționalitate μ , numită și rată a mortalității.

Făcând bilanțul concluzionăm că

$$y'(t) = \beta y(t) - \mu y(t)$$

și deci obținem legea lui Malthus pentru dinamica unei populații:

$$y' = ky,$$

unde $k = \beta - \mu$ este o constantă.

Sisteme de tip pradă-răpitor

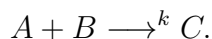
Presupunem că într-o zonă geografică trăiesc două populații biologice, din care una se hrănește cu indivizi din cealaltă populație. Notăm cu $x(t)$ numărul indivizilor pradă și cu $y(t)$ numărul răpitorilor la momentul t . Sistemul biologic descris este modelat de sistemul Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Modelarea reacțiilor chimice

Considerăm două substanțe A și B de concentrații (mol/l) a , respectiv b , care reacționează formând substanța C , de concentrație $x(t)$ la momentul t :



Rata de creștere a lui x este dată de legea acțiunii masei:

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t))$$

(viteza de reacție este proporțională cu produsul concentrațiilor substanțelor care intră în reacție; k este numită viteza de reacție).

Exerciții

1. Să se arate că funcția $x(t) = e^{2t} + t$ este soluție a ecuației

$$x' = 2x - 2t + 1.$$

2. Să se demonstreze că funcțiile $x_1(t) = \cos t$ și $x_2(t) = \sin t$ sunt soluții ale ecuației

$$x'' + x = 0.$$

3. Arătați că $x(t) = e^{\gamma t}$ este soluție a ecuației

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

unde a , b , c , γ sunt constante reale satisfăcând condiția $a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$.

4. Utilizați rezultatul de la exercițiul 3 pentru a găsi o soluție a ecuației

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

care satisface condițiile inițiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Indicație. Funcția $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ ($c_1, c_2 \in \mathbf{R}$) este o soluție a ecuației. Impunând ca $x(0) = 1$ și $x'(0) = 0$ se obțin constantele c_1 și c_2 .

Să se rezolve problemele Cauchy:

- 5.

$$\begin{cases} y' = 2 \sin t \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Indicație. Dacă y este o soluție, atunci rezultă că

$$y(t) - y(0) = \int_0^t 2 \sin s \, ds.$$

6.

$$\begin{cases} y' = t(5 - t) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t) \\ x(t_0) = x_0^1, \quad x'(t_0) = x_0^2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^n, \end{cases}$$

unde $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ și $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n \in \mathbf{R}$.

Indicație. Se integrează ecuația succesiv de n ori.

8.

$$\begin{cases} y'' = \cos t + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Să se rezolve ecuațiile:

9.

$$x' = t^3 x^2$$

10.

$$x' = \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} t}$$

11.

$$x' = \frac{x \sin 2t}{\cos 2t}$$

12.

$$x' = \frac{t^2 x}{t^3 - x^3}$$

13.

$$x' = \frac{2x - t}{2t - x}$$

14.

$$x' = \frac{2x + t^2}{t}$$

15.

$$x' = x + 3e^t$$

16.

$$x' = -\frac{x + t^2 x^4}{t}$$

17.

$$x' = -\frac{1}{t}x^2 - \frac{1}{t}x$$

18. Să se afle soluția generală a ecuației Riccati

$$x' = x^2 + (1 - 2t)x + t^2 - t + 1,$$

observând faptul că $x = t$ este o soluție particulară a acesteia.

Să se rezolve ecuațiile:

19.

$$x' = \frac{3t^2 - 6tx}{3t^2 + 2x}$$

20.

$$x' = \frac{1 - x^2}{2tx - \sin x}$$

21.

$$x = tx' + (x')^3$$

22.

$$x = tx' - 3(x')^4$$

23.

$$x''' + 8x = 0$$

24. O substanță radioactivă are perioada de înjumătățire de 100 ore. După cât timp va dispărea 90% din radioactivitate ?

25. Știind că perioada de înjumătățire pentru radiu este de 1600 ani, aflați ce procent de radiu va rămâne după 30 ani ?

26. Un corp aflat la $15^{\circ}C$ este adus într-o cameră cu temperatura de $23^{\circ}C$. Știind că după 10 minute corpul ajunge la $18^{\circ}C$, să se afle după cât timp ajunge corpul la $22^{\circ}C$?

27. Într-un bazin se află 400 kg de apă în care s-au dizolvat 10 kg sare. În bazin se introduce apă cu un debit de 10 kg/min și în același timp se evacuează soluție cu același debit (se presupune că soluția este permanent omogenă). Care este concentrația de sare după 10 h ?

28. Un corp de masă 400 kg, aflat la suprafața apei, se scufundă într-un lac adânc de 60 m. Știind că volumul obiectului este de $0.1 m^3$, iar forța exercitată de apă este de $0.04 \cdot v(t)$ ($v(t)$ este viteza la momentul t), să se afle după cât timp ajunge corpul pe fundul apei ?

29. Ecuația mișcării în cazul căderii pe verticală a unui parașutist este descrisă de ecuația

$$mx'' + kx' = mg$$

($x(t)$ este distanța parcursă de la momentul inițial până la momentul t , iar k este coeficientul de rezistență al aerului). Presupunem că un om de 80 kg sare de la mare înălțime și atinge viteza de 70 km/h după o lungă perioadă de timp. Aproximați valoarea constantei k .

30. În cazul exercițiului 29 aflați ce distanță a parcurs parașutistul în primele 10 s și ce viteză a atins la acel moment.

CURS 5

II. TEOREME DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

În acest capitol vom prezenta o serie de rezultate de existență și unicitate pentru problema Cauchy, pentru ecuații și sisteme diferențiale ordinare. Vom studia atât rezultate locale cât și rezultate globale.

1. Teorema de existență și unicitate pentru ecuații diferențiale de ordinul 1

În prima parte a acestei secțiuni vom prezenta două rezultate auxiliare. Primul se referă la următoarea inegalitate:

$$x(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (40)$$

unde x , a , $b : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții continue și verifică în plus $b(t) \geq 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

Lemă (Gronwall). În condițiile anterioare rezultă că x verifică

$$x(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}ds, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (41)$$

Demonstrație. Fie funcția $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$y(t) = \int_{\alpha}^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Evident are loc

$$y'(t) = b(t)x(t), \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (42)$$

Înmulțind inegalitatea (40) cu $b(t)$ și ținând cont de (42) obținem:

$$\begin{aligned} y'(t) &\leq a(t)b(t) + b(t)y(t) \\ \iff y'(t) - b(t)y(t) &\leq a(t)b(t), \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Înmulțim ultima inegalitate cu $e^{-\int_{\alpha}^t b(s)ds}$ și deducem că

$$(y(t)e^{-\int_{\alpha}^t b(s)ds})' \leq a(t)b(t)e^{-\int_{\alpha}^t b(s)ds}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Integrând de la α la t rezultă

$$y(t)e^{-\int_{\alpha}^t b(s)ds} - y(\alpha) \leq \int_{\alpha}^t a(s)b(s)e^{-\int_{\alpha}^s b(\tau)d\tau}$$

(iar $y(\alpha) = 0$).

$$\iff y(t) \leq \int_{\alpha}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

De aici și din (40) deducem faptul că x verifică inegalitatea (41).

Observație. În cazul particular al unei funcții a constante ($a \equiv M$) obținem că dacă x verifică inegalitatea

$$x(t) \leq M + \int_{\alpha}^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

unde x , b satisfac ipotezele din lema lui Gronwall, atunci

$$x(t) \leq Me^{\int_{\alpha}^t b(s)ds}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

(inegalitatea lui Bellman).

Demonstrație. În adevăr, din lema lui Gronwall avem

$$\begin{aligned} x(t) &\leq M + M \int_{\alpha}^t b(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds \\ &= M - M \int_{\alpha}^t \frac{d}{ds}(e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}) ds \\ &= M - M(1 - e^{\int_{\alpha}^t b(\tau)d\tau}) \\ &= Me^{\int_{\alpha}^t b(\tau)d\tau}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Al doilea este un rezultat clasic de analiză matematică. Îl vom reaminti doar.

Teorema de punct fix a lui Banach. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F : X \longrightarrow X$ o contracție, i.e.*

$$\exists L \in [0, 1) : \quad d(F(x), F(y)) \leq L d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Atunci, funcția F admite un unic punct fix x^ , i.e.*

$$\exists x^* \in X : \quad F(x^*) = x^*.$$

Demonstrația teoremei este importantă prin faptul că furnizează o metodă de aproximare a punctului fix x^* . Alegând un $x_0 \in X$ arbitrar și construind recurent $x_{k+1} = F(x_k)$, $\forall k \in \mathbf{N}$, se poate demonstra că

$$x_k \longrightarrow x^*.$$

Mai mult, se poate chiar evalua $d(x_n, x^*)$ în funcție de $d(x_0, F(x_0))$, k și α .

Considerăm ecuația

$$x' = f(t, x) \tag{43}$$

cu condiția inițială

$$x(t_0) = x_0. \tag{44}$$

Aici $f : D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2; |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \rightarrow \mathbf{R}$, unde α și β sunt constante pozitive.

Teoremă. Dacă

- (i) f este continuă pe D și
- (ii) lipschitziană ca funcție de x pe D , adică

$$\exists L \geq 0 : \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D,$$

atunci problema Cauchy (43)-(44) admite o soluție unică x definită pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}$, iar $M > 0$ satisface

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in D$$

(M este un majorant strict pozitiv pentru $|f|$).

Demonstrație. Dacă x este o soluție a problemei Cauchy (43)-(44), atunci integrând de la t_0 la t avem

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ \iff x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned} \quad (45)$$

adică x este soluție a ecuației integrale (45).

Reciproc, dacă x este o funcție continuă pe un interval I (care conține t_0) și verifică (45), atunci rezultă că ea este în plus de clasă C^1 pe acest interval și derivând (45) obținem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I.$$

În plus, din (45) avem că $x(t_0) = x_0$.

Concluzia este că orice soluție continuă a ecuației integrale (45) (definită pe un interval ce conține t_0) este și soluție a problemei Cauchy (43)-(44) și reciproc.

Astfel, ecuația (45) este echivalentă cu problema (43)-(44).

În continuare vom utiliza teorema de punct fix a lui Banach.

Folosim faptul că $(C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]), \|\cdot\|)$ (unde $\|\cdot\|$ este norma convergenței uniforme) este un spațiu Banach. Considerând norma echivalentă

$$|||x||| = \max \{e^{-\lambda|t-t_0|} |x(t)|; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\},$$

cu $\lambda > 0$ oarecare, dar fixat, concluzionăm că $(C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]), |||\cdot|||)$ este de asemenea un spațiu Banach.

Considerăm în continuare

$$X = \{x \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]); |x(t) - x_0| \leq \beta, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\},$$

o submulțime închisă a lui $(C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]), \|\cdot\|)$. Rezultă deci că (X, d) , unde d este metrica indusă de norma $\|\cdot\|$, este un spațiu metric complet.

Considerăm operatorul $\mathcal{T} : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, definit prin

$$(\mathcal{T}x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad x \in X.$$

Este evident că pentru orice $x \in X$ avem că $\mathcal{T}x \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}x)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right| \leq \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} |f(s, x(s))|ds \\ &\leq M \delta \leq M \frac{\beta}{M} = \beta, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{aligned}$$

Avem deci că $\mathcal{T}x \in X$ pentru orice $x \in X$.

Să arătăm acum că pentru $\lambda > 0$ convenabil ales (suficient de mare) $\mathcal{T}$ este o contracție.

În adevăr, pentru orice $x, y \in X$ avem că

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) &= \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| \\ &= \max \left\{ e^{-\lambda|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \right|; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\} \\ &\leq \max \left\{ e^{-\lambda|t-t_0|} \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} L |x(s) - y(s)|ds; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\} \end{aligned}$$

(am folosit lipschitzianitatea lui f în raport cu x)

$$\begin{aligned} &= \max \left\{ e^{-\lambda|t-t_0|} \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} L e^{-\lambda|s-t_0|} |x(s) - y(s)| e^{\lambda|s-t_0|} ds; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\} \\ &\leq \max \left\{ e^{-\lambda|t-t_0|} L d(x, y) \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} e^{\lambda|s-t_0|} ds; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\} \\ &= d(x, y) \max \left\{ L e^{-\lambda|t-t_0|} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda|t-t_0|} - 1); t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \right\} \\ &\leq \frac{L}{\lambda} d(x, y). \end{aligned}$$

Dacă fixăm un $\lambda > L$, obținem că $\mathcal{T}$ este o contracție și deci $\mathcal{T}$ admite un unic punct fix x^* .

Deducem că ecuația (45) are o unică soluție $x^* \in X$ și deci problema Cauchy (43)-(44) admite o unică soluție.

Observație. Faptul că am utilizat teorema de punct fix a lui Banach înseamnă că obținem imediat un șir, construit recurent, care converge uniform la soluția problemei (43)-(44):

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, & t &\in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))ds, & t &\in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ &\dots\dots\dots \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))ds, & t &\in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \end{aligned} \quad (46)$$

pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$.

Șirul de mai sus (numit și șirul aproximațiilor Picard) este bine definit, adică

$$|x_k(t) - x_0| \leq \beta, \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

(acest lucru rezultă prin inducție matematică) și satisface

$$x_k \longrightarrow x^* \quad \text{în } C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]).$$

Există în literatura matematică o demonstrație a teoremei de existență și unicitate numită metoda lui Picard (a aproximațiilor succesive) ce pornește de la șirul de funcții definit mai sus și arată convergența lui $\{X_k\}$ la x^* (soluția problemei (45)) folosind argumente legate de seriile de funcții.

Menționăm că metoda lui Picard (metoda aproximațiilor succesive) și cea bazată pe teorema de punct fix a lui Banach sunt de fapt echivalente.

Exemplu. Să se arate că soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + t^2 \\ x(0) = -1 \end{cases} \quad (47)$$

există cel puțin pe intervalul $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ și să se calculeze primele trei iterații Picard ale acestei soluții.

Soluție. Alegem $\alpha = 1$ și $\beta = 1$. În acest caz

$$f : D = [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(t, x) = x^2 + t^2.$$

Cum f este funcție polinomială, ea este continuă pe D și lipschitziană în raport cu x pe D (de fapt $f \in C^\infty(D)$).

Mai mult,

$$|f(t, x)| = x^2 + t^2 \leq 5 = M, \quad \forall (t, x) \in D.$$

Aplicând teorema de existență și unicitate rezultă că problema Cauchy (47) admite o soluție unică definită pe $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$.

Prima iterație Picard este $x_0 : [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$x_0(t) = -1.$$

A doua iterație Picard este $x_1 : [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1 + \int_0^t (1 + s^2) ds \\ &= -1 + t + \frac{1}{3}t^3. \end{aligned}$$

Cea de-a treia iterație Picard este $x_2 : [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -1 + \int_0^t [(-1 + s + \frac{1}{3}s^3)^2 + s^2] ds \\ &= -1 + \int_0^t (1 + s^2 + \frac{1}{9}s^6 - 2s - \frac{2}{3}s^3 + \frac{2}{3}s^4 + s^2) ds \\ &= -1 + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7. \end{aligned}$$

Considerăm problema Cauchy (43)-(44), unde

$$f : D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2; |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \rightarrow \mathbf{R},$$

este o funcție continuă (iar α și β sunt constante pozitive) și în plus

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in D,$$

cu $M > 0$.

În aceste ipoteze mai puțin restrictive are loc următorul rezultat:

Teoremă (Peano). Problema Cauchy (43)-(44) admite cel puțin o soluție pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\}$.

Concluzia se obține din teorema de punct fix a lui Schauder. O altă demonstrație utilizează metoda lui Euler numită și metoda liniilor poligonale și este prezentată în [5].

Observație. În absența lipschitzianității lui f în raport cu x avem asigurată doar existența unei soluții, nu și unicitatea.

De exemplu, în cazul problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2x^{\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

avem că $x(t) = 0$ și $y(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, sunt ambele soluții ale acestei probleme.

CURS 6

2. Teoreme de existență a soluției problemei Cauchy atașată sistemelor diferențiale de ordinul 1 și ecuațiilor diferențiale de ordin superior

Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots\dots\dots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1(t_0) = x_0^1, x_2(t_0) = x_0^2, \dots, x_n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (48)$$

($n \in \mathbf{N}^*$).

Vom utiliza scrierea vectorială în cazul problemei Cauchy (48).
Notăm

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

(care este o funcție vectorială),

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \dots \\ x_0^n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \\ \dots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

unde $f : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ și

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pe $\mathbf{R}^n$ se consideră norma

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\},$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, care este echivalentă cu norma euclidiană.

Funcția x este continuă în t dacă și numai dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt continue în t .

Funcția x este derivabilă în t dacă și numai dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt derivabile în t . În caz de derivabilitate avem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \dots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Funcția f este continuă în $(t, x) \in D$ dacă și numai dacă $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt toate continue în (t, x) .

Funcția f este lipschitziană în raport cu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dacă și numai dacă $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt lipschitziene în raport cu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Funcția $t \mapsto g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \in \mathbf{R}^n$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $g_1, g_2, \dots, g_n$ sunt integrabile pe $[a, b]$. În caz de integrabilitate avem

$$\int_a^b g(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(t) dt \\ \int_a^b g_2(t) dt \\ \dots \\ \int_a^b g_n(t) dt \end{pmatrix}.$$

Are loc următorul rezultat de existență și unicitate:

Teoremă (Picard). Presupunem că $f_1, f_2, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbf{R}$, unde $D = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq \alpha, |x_j - x_0^j| \leq \beta, j = \overline{1, n}\}$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ sunt funcții continue pe D și lipschitziene ca funcții de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, adică $\exists L \geq 0$:

$$\begin{aligned} & |f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \\ & \leq L \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} \end{aligned}$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall (t, x_1, x_2, \dots, x_n), (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$.

Atunci, există o unică soluție a problemei Cauchy, definită pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$, iar $M > 0$ satisface

$$|f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$\forall (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Observație. O clasă importantă de funcții lipschitziene în raport cu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este cea a funcțiilor care admit derivate parțiale în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_n$ și acestea sunt continue.

Problema Cauchy (48) se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

unde $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$.

Continuitatea funcțiilor $f_1, f_2, \dots, f_n$ este echivalentă cu continuitatea funcției $f : D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta\} \rightarrow \mathbf{R}^n$, iar lipschitzianitatea lui $f_1, f_2, \dots, f_n$ în raport cu x este echivalentă cu lipschitzianitatea lui f în raport cu x , care revine la existența unui $L \geq 0$ astfel ca

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D.$$

Demonstrația teoremei este analoagă celei pentru ecuații (cazul $n = 1$; vezi cursul 5). Se pornește de la faptul că x este soluție pentru (48)

dacă și numai dacă este soluție pentru următoarea ecuație integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Se consideră

$$X = \{x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow \mathbf{R}^n \text{ continuă; } \|x(t) - x_0\| \leq \beta, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}$$

înzestrată cu metrica

$$d(x, y) = \min\{e^{-\lambda|t-t_0|} \|x(t) - y(t)\|; t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}$$

unde $\lambda > L$ este o constantă și operatorul

$$\mathcal{T} : X \longrightarrow X,$$

$$(\mathcal{T}x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

$x \in X$. Se aplică apoi teorema de punct fix a lui Banach și se obține concluzia.

Exemplu. Găsiți un interval pe care problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = xy + y^2 \\ y' = x^2 + \sin y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admite soluție unică.

Soluție. În acest caz avem $t_0 = 0$, data inițială $(1, 0)$ și funcțiile $f_1(t, x, y) = xy + x^2$, $f_2(t, x, y) = x^2 + \sin y$. Alegem $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (se pot lua orice valori $\alpha, \beta > 0$, deoarece f_1 și f_2 sunt definite pe $\mathbf{R}^3$) și deci

$$D = \{(t, x, y); |t| \leq 1, |x - 1| \leq 1, |y| \leq 1\} = [-1, 1] \times [0, 2] \times [-1, 1].$$

Următoarele evaluări au loc:

$$|f_1(t, x, y)| \leq 2 + 1 = 3, \quad \forall (t, x, y) \in D$$

$$|f_2(t, x, y)| \leq 4 + 1 = 5, \quad \forall (t, x, y) \in D.$$

Deci, $M = 5$ satisface $|f_1(t, x, y)|, |f_2(t, x, y)| \leq M, \forall (t, x, y) \in D$. Cum funcțiile f_1 și f_2 sunt de clasă C^∞ , rezultă că sunt continue și lipschitziene în raport cu (x, y) și de aici deducem că problema Cauchy dată admite o unică soluție, definită pe $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ ($\delta = \min\left\{1, \frac{1}{5}\right\}$).

Teoremă (Peano). Presupunem că $f_1, f_2, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbf{R}$ ($D = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq \alpha, |x_j - x_0^j| \leq \beta, j = \overline{1, n}\}$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$) sunt funcții continue.

Atunci, problema Cauchy (48) admite cel puțin o soluție, definită pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$, iar $M > 0$ satisface

$$|f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\forall (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Se poate demonstra acest rezultat utilizând teorema de punct fix a lui Schauder.

Considerăm acum problema Cauchy atașată unei ecuații de ordin superior:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0^1, \quad x'(t_0) = x_0^2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^n, \end{cases} \quad (49)$$

unde $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, iar $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, cu $D = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq \alpha, |x_j - x_0^j| \leq \beta, j = \overline{1, n}\}$, $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Problema se poate scrie echivalent sub forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1(t_0) = x_0^1, \quad x_2(t_0) = x_0^2, \dots, \quad x_n(t_0) = x_0^n. \end{cases}$$

Fie $M > 0$ astfel ca

$$|f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M, \quad \forall (t, x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Aplicând teoremele de existență pentru problema Cauchy atașată sistemelor diferențiale de ordinul 1, rezultă

Teoremă. Dacă f este continuă pe D , atunci problema Cauchy (49) admite cel puțin o soluție definită pe intervalul $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{\tilde{M}} \right\}$, iar $\tilde{M}$ satisface

$$\tilde{M} = \max\{M, \beta + |x_0^1|, \dots, \beta + |x_0^n|\}.$$

Dacă în plus f este și lipschitziană în raport cu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci soluția este unică.

Exemplu. Găsiți un interval pe care problema Cauchy

$$\begin{cases} x'' = tx' + t^2x + t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

admite soluție unică.

Soluție. Fie $\alpha = 2$ și $\beta = 1$ și

$$\begin{aligned} D &= \{(t, x, y) \in \mathbf{R}^3; |t| \leq 2, |x - 1| \leq 1, |y - 2| \leq 1\} \\ &= [-2, 2] \times [0, 2] \times [-1, 3]. \end{aligned}$$

Funcția $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, $f(t, x, y) = ty + t^2x + t$ este continuă și lipschitziană în raport cu (x, y) (este chiar de clasă C^∞).

Avem

$$|f(t, x, y)| \leq 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 2 + 2 = 16.$$

Aplicând teorema de mai sus rezultă că problema Cauchy dată admite soluție unică pe $[-\delta, \delta]$, unde

$$\delta = \min \left\{ 2, \frac{1}{16} \right\} = \frac{1}{16}.$$

CURS 7

3. Teorema de unicitate globală

Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (50)$$

unde $f : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$, iar D este un domeniu și $(t_0, x_0) \in D$.

Definiție. Funcția f este local lipschitziană pe D în raport cu x dacă $\forall K \subset D$, K compact, $\exists L_K \geq 0$ astfel ca

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in K.$$

Dacă funcția f este continuă și local lipschitziană în raport cu x pe D , atunci problema Cauchy (50) admite o unică soluție definită pe un interval centrat în t_0 .

Teorema de unicitate globală. Dacă x și y sunt două soluții ale problemei (50) definite pe I , respectiv $\tilde{I}$, atunci

$$x(t) = y(t), \quad \forall t \in I \cap \tilde{I}.$$

Demonstrație. $I \cap \tilde{I}$ este un interval ce conține t_0 . Dacă ar exista $t_1 \in I \cap \tilde{I}$ astfel încât $x(t_1) \neq y(t_1)$, atunci am avea fie $t_1 < t_0$, fie $t_1 > t_0$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $t_1 > t_0$.

Fie $J = \{t \in [t_0, t_1]; x(t) = y(t)\}$. Această mulțime este închisă și are evident un cel mai mare element $\tilde{t}$.

Din teorema de existență și unicitate locală rezultă că soluția problemei (50) este unică pe o vecinătate a lui $\tilde{t}$: $[\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta] \subset I \cap \tilde{I}$. Dar soluțiile x și y sunt definite și pe această mulțime și acesta ar contrazice faptul că $\tilde{t}$ este cel mai mare element al lui J .

Fie x o soluție a problemei (50) definită pe intervalul I , care poate fi de forma: (α, β) , $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ sau $[\alpha, \beta]$.

Definiție. Soluția x este prelungibilă la dreapta dacă există y o soluție pentru (50) definită pe $I \cup [\beta, \gamma)$, cu $\beta < \gamma$ și astfel încât

$$x(t) = y(t), \quad \forall t \in I.$$

Soluția x este saturată la dreapta dacă nu este prelungibilă la dreapta.

Definiție. Soluția x este prelungibilă la stânga dacă există y o soluție pentru (50) definită pe $I \cup (\gamma, \alpha]$, cu $\alpha > \gamma$ și astfel încât

$$x(t) = y(t), \quad \forall t \in I.$$

Soluția x este saturată la stânga dacă nu este prelungibilă la stânga.

Definiție. Soluția x este prelungibilă dacă este prelungibilă la stânga sau la dreapta.

Soluția x este saturată dacă este saturată atât la stânga cât și la dreapta.

Observație. Soluția saturată este soluția definită pe I , cel mai mare interval de definiție al vreunei soluții a problemei (50). Soluția saturată este unică.

O consecință a teoremei de unicitate globală este:

Teoremă. Orice soluție a problemei (50) admite o prelungire unică la o soluție saturată.

Soluția saturată se notează: $x(t; t_0, x_0)$.

Exemplul 1. Să se determine soluția saturată a problemei

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

și domeniul de definiție al acesteia.

Soluție. Problema dată este de forma (50), unde $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(t, x) = x^2 + 1$ este continuă și local lipschitziană în raport cu x , iar $t_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Problema admite deci o soluție saturată unică $x(\cdot; 0, 1)$ definită pe intervalul (α, β) , cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < 0 < \beta$. Intervalul de definiție al soluției saturate nu poate fi închis la dreapta, deoarece soluția s-ar putea prelungi și la dreapta lui β (din teorema de existență și unicitate locală) și nici închis la stânga deoarece s-ar putea prelungi soluția și la stânga lui α . Acest lucru ar nega faptul că soluția este saturată.

Ecuția dată este cu variabilele separabile și ne conduce la

$$\frac{x'(t)}{1 + x^2(t)} = 1.$$

Integrând de la 0 la t se obține

$$\operatorname{arc\,tg} x(t) - \operatorname{arc\,tg} 1 = t$$

$$\iff \operatorname{arc\,tg} x(t) = \frac{\pi}{4} + t.$$

Concluzionăm că

$$\frac{\pi}{4} + t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

și deci $t \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

De asemenea deducem că soluția $x : \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbf{R}$ este definită prin

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Această soluție verifică

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}, t < \frac{\pi}{4}} x(t) = +\infty$$

și deci x nu este prelungibilă la dreapta. De asemenea

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{3\pi}{4}, t > -\frac{3\pi}{4}} x(t) = -\infty$$

și deci x nu este prelungibilă la stânga.

Concluzia este că soluția saturată este definită pe $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Exemplul 2. Să se demonstreze că soluția saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x_1' = \sin x_1 + \sin x_2 \\ x_2' = \frac{x_1}{1+x_1^2} + \cos x_2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

este definită pe $\mathbf{R}$.

Soluție. Problema se poate scrie sub forma (50), unde $f : D = \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

$$f_1(t, x_1, x_2) = \sin x_1 + \sin x_2, \quad f_2(t, x_1, x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} + \cos x_2,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Există o unică soluție saturată

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dacă considerăm restricția lui f la

$$D = \{(t, x_1, x_2); |t| \leq \alpha, |x_1 - 1| \leq \beta, |x_2 - 1| \leq \beta\},$$

unde $\alpha, \beta > 0$ oarecare, atunci rezultă că soluția saturată este definită cel puțin pe $[-\delta, \delta]$, unde $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{2}\right\}$.

Putem alege $\beta = 2\alpha$ și atunci avem evident $\delta = \alpha$. Concluzia este că soluția saturată este definită cel puțin pe $[-\alpha, \alpha]$, oricare ar fi $\alpha > 0$. Rezultă deci că este definită pe $\mathbf{R}$.

4. Teorema de continuitate a soluției în raport cu data inițială

Fie

$$f : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

continuă și local lipschitziană în raport cu x . Considerăm

$$\Delta = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta\} \subset D,$$

unde $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ și M o constantă pozitivă a.î.

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in \Delta.$$

Pentru orice $y_0 \in \mathbf{R}^n$ a.î. $\|y_0 - x_0\| \leq \frac{\beta}{2}$, problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite o unică soluție definită pe $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, unde $\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{2M} \right\}$.

Notăm cu $y(t; t_0, y_0)$ soluția problemei Cauchy definită pe $[t_0, t_0 + \delta]$.

Teoremă. Funcția $y_0 \mapsto y(\cdot; t_0, y_0)$ de la

$$\overline{B \left(x_0; \frac{\beta}{2} \right)} = \left\{ u \in \mathbf{R}^n; \|u - x_0\| \leq \frac{\beta}{2} \right\}$$

la $C([t_0, t_0 + \delta]; \mathbf{R}^n)$ este continuă.

Demonstrație. Pentru orice $y_0, z_0 \in \mathbf{R}^n$, $\|y_0 - x_0\|, \|z_0 - x_0\| \leq \frac{\beta}{2}$ avem că

$$y(t) := y(t; t_0, y_0), \quad z(t) := y(t; t_0, z_0)$$

verifică

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

De aici rezultă că

$$y(t) - z(t) = y_0 - z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

și deci

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

unde L este o constantă Lipschitz pentru f (în raport cu x) pe mulțimea Δ .

Din inegalitatea lui Bellman rezultă că

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(t-t_0)} \leq e^{L\delta} \|y_0 - z_0\|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Deci, $y_0 \mapsto y(\cdot; t_0, y_0)$ este lipschitziană și deci continuă.

Exerciții

Să se demonstreze existența și unicitatea soluției pentru fiecare din următoarele probleme Cauchy și să se găsească un interval pe care aceasta este definită:

1.

$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}, \quad x(0) = 1$$

2.

$$x' = t^2 + x^2, \quad x(2) = 0$$

3.

$$x' = \frac{1 + t + x}{4 + t^2 + x^2}, \quad x(0) = 0$$

4. Să se arate că ecuația $x' = \sqrt{x - t} + 1$ admite soluțiile $x(t) = t$ și $x(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0 \\ t, & t < 0 \end{cases}$.

5. Să se determine un interval pe care există soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = x + x^2 + y - 1 \\ y' = x + y^2 - y \\ x(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

și să se determine primele 3 iterații Picard.

6. Să se arate că problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin t + \ln(1 + x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite o soluție unică definită pe $\mathbf{R}$.

Indicație. Se consideră $D = \{(t, x); |t| \leq \alpha, |x| \leq \beta\}$. Se obține

$$\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{1 + \ln(1 + \beta^2)} \right\}.$$

Problema admite o soluție definită cel puțin pe $[-\delta, \delta]$.

Pentru orice $t \in \mathbf{R}$, există $\alpha > 0$ și $\beta > 0$ astfel încât

$$|t| \leq \alpha, \quad |t| \leq \frac{\beta}{1 + \ln(1 + \beta^2)}$$

și deci soluția saturată este definită și pentru t .

7. Să se demonstreze că intervalul maxim de definiție la dreapta al soluției saturate a problemei Cauchy:

$$x' = x^2 + t^2, \quad x(0) = 1$$

este mărginit.

8. În teoria anizotropică a relativității (V.G. Boltyanski), ecuația de propagare a razei de lumină în vecinătatea unei mase m situată în origine este:

$$x'(t) = -\frac{\eta m x(t)}{\|x(t)\|_e^3} + f(t)$$

(aici $\|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ este norma euclidiană a lui $x = (x_1, x_2, x_3)$), unde η este o constantă pozitivă, $f = (f_1, f_2, f_3)$ este o funcție continuă care satisface condiția: $\|f(t)\|_e \leq C$, iar $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ este vectorul de poziție al fantei de lumină la momentul t .

Să se arate că există $r > 0$ astfel încât toate traiectoriile care la momentul $t = 0$ pornesc din punctul x_0 din sfera $S_r = \{x \in \mathbf{R}^3; \|x\|_e < r\}$ rămân în această sferă (această sferă se numește *gaură neagră*).

Soluție. Se înmulțește scalar ecuația cu $x(t)$ și se obține

$$\left(\frac{1}{2} \|x(t)\|_e^2 \right)' = -\frac{\eta m \|x(t)\|_e^2}{\|x(t)\|_e^3} + f(t) \cdot x(t)$$

$$\leq -\frac{\eta m}{\|x(t)\|_e} + \|f(t)\|_e \|x(t)\|_e$$

(din inegalitatea lui Cauchy) și de aici rezultă că

$$\left(\frac{1}{2}\|x(t)\|_e^2\right)' \leq -\frac{\eta m}{\|x(t)\|_e} + C \|x(t)\|_e, \quad \forall t \geq 0. \quad (51)$$

Dorim ca membrul drept să fie negativ pentru $t = 0$, adică

$$-\frac{\eta m}{\|x_0\|_e} + C \|x_0\|_e < 0 \Leftrightarrow \|x_0\|_e < \sqrt{\frac{\eta m}{C}}$$

(unde $x(0) = x_0 \neq 0_3$). Considerăm $r = \sqrt{\frac{\eta m}{C}}$. Să arătăm că S_r este o gaură neagră.

Dacă $0 < \|x_0\|_e < r$ rezultă din continuitatea lui $\|x(t)\|_e$ că $\|x(t)\|_e < r$ pentru orice t dintr-o vecinătate $[0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) la dreapta a lui 0.

Raționăm mai departe prin reducere la absurd. Presupunem că există cel puțin un punct $t_1 > 0$ pentru care $\|x(t_1)\|_e = r$. Considerăm cel mai mic asemenea t_1 . Deci,

$$\|x(t)\|_e < r, \quad \forall t \in [0, t_1).$$

Din (51) rezultă că

$$\left(\frac{1}{2}\|x(t)\|_e^2\right)' < 0, \quad \forall t \in [0, t_1).$$

Deci, funcția $\frac{1}{2}\|x(t)\|_e^2$ este strict descrescătoare pe $[0, t_1]$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|x(t_1)\|_e^2 < \frac{1}{2}\|x_0\|_e^2$$

și deci,

$$\|x(t_1)\|_e < \|x_0\|_e < r; \text{ absurd}$$

(deoarece $\|x(t_1)\|_e = r$).

De aici rezultă concluzia.

9. Să se determine un interval pe care există soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 x^2 + tx + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

și să se determine primele 3 iterații Picard.

10. Același lucru se cere pentru problema:

$$\begin{cases} x'' + tx' + x = \sin t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

11. Să se arate că soluția saturată a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + \sin x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

este definită pe toată axa reală.

CURS 8

III. SISTEME DIFERENȚIALE LINIARE

În acest capitol vom discuta câteva din cele mai importante rezultate legate de sistemele de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1 și de ecuațiile diferențiale de ordin superior.

1. Sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1

În această secțiune vom studia sistemul:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x'_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \dots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \quad (52)$$

unde a_{ij} și f_i ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) sunt funcții definite pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$ cu valori în $\mathbf{R}$. Sistemul (52) se numește sistem *neomogen*. Dacă $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt identic nule, atunci sistemul se numește *omogen*.

Sistemul se scrie în mod echivalent, folosind notația vectorială, sub forma:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in I, \quad (53)$$

unde $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, iar

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Cum proprietățile matricei $A(t)$ vor juca un rol foarte important în studiul soluțiilor sistemului (52), vom introduce câteva definiții ce vor fi utilizate în cele ce urmează.

Definiție. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este o matrice constantă, atunci *norma* matricei A este:

$$\|A\| = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ și $x \in \mathbf{C}^n$, atunci se arată cu ușurință proprietățile:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$.

Definiție. Derivata lui $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$ este notată cu $A'(t)$ și este egală cu

$$A'(t) = (a'_{ij}(t))_{i,j}$$

(există atunci și numai atunci când toate funcțiile a_{ij} sunt derivabile în t).

Integrala lui $A(t)$ pe $[\alpha, \beta]$ se notează cu $\int_{\alpha}^{\beta} A(t)dt$ și este egală cu

$$(\int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(t)dt)_{i,j}$$

(este definită dacă și numai dacă a_{ij} sunt toate integrabile de la α la β).

Urma matricei pătratice $A(t)$ se notează cu $tr A(t)$ și este egală cu

$$\sum_{j=1}^n a_{jj}(t).$$

Presupunem în cele ce urmează că a_{ij} și f_i ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) sunt funcții continue.

Aplicând rezultatele din capitolul precedent rezultă că pentru orice $t_0 \in I$ și orice $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbf{R}^n$ există o soluție saturată unică pentru (52) (sau echivalent (53)) verificând condiția inițială

$$x(t_0) = x_0. \quad (54)$$

Teoremă. Soluția saturată a problemei (52)-(54) este definită pe întreg intervalul I .

Demonstrație. Intervalul I este de forma (α, β) , $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, sau $[\alpha, \beta]$.

Vom raționa prin reducere la absurd. Presupunem că soluția saturată fie nu este definită într-o vecinătate a lui β , fie într-o vecinătate a lui α . Vom face raționamentul doar în primul caz (al doilea caz se tratează analog).

Presupunem deci că soluția saturată este definită pe J de forma (γ, η) sau pe $[\gamma, \eta)$ și $\eta < \beta$. Soluția saturată verifică:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^t f(s)ds, \quad t \in J.$$

Ultima relație implică:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|f(s)\| ds, \quad t \in J. \quad (55)$$

Deoarece funcțiile $t \mapsto \|A(t)\|$ și $t \mapsto \|f(t)\|$ sunt continue pe I , rezultă că ele sunt mărginite pe $[t_0, \eta]$. Există deci o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|A(t)\|, \|f(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [t_0, \eta]. \quad (56)$$

Din (55) și (56) rezultă în baza lemei lui Bellman că:

$$\|x(t)\| \leq (\|x_0\| + (\eta - t_0)M)e^{(\eta - t_0)M}, \quad \forall t \in [t_0, \eta].$$

De aici tragem concluzia că funcțiile $x_1, x_2, \dots, x_n$ au derivate mărginite pe $[t_0, \eta)$. Aceste funcții se pot deci prelungi prin continuitate în punctul η (prelungirile se notează tot cu $x_1, x_2, \dots, x_n$) și folosind faptul că

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ verifică (55) deducem că $x'(\eta) = A(\eta)x(\eta) + f(\eta)$. Asta înseamnă că x este soluție a problemei Cauchy (52)-(54) definită pe $J \cup \{\eta\}$. Soluția aceasta se poate prelungi, în baza teoremei de existență și unicitate pe $J \cup [\eta, \eta \cup \delta]$ (cu un $\delta > 0$). Deci, soluția inițială nu era saturată; absurd.

În cele ce urmează, ori de câte ori vom vorbi despre soluție vom subînțelege soluție saturată (asta dacă nu se fac alte precizări).

Vom studia întâi sistemul omogen asociat lui (52):

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ \dots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t), \end{cases} \quad (57)$$

care se scrie echivalent sub forma

$$x' = A(t)x, \quad t \in I. \quad (58)$$

Teoremă. Mulțimea soluțiilor sistemului (57) formează un spațiu liniar de dimensiune n .

Demonstrație. Cum sistemul (57) este liniar, rezultă prin verificare directă că mulțimea S a soluțiilor sistemului (57) este un spațiu liniar (peste corpul $\mathbf{R}$).

Fie $t_0 \in I$ oarecare, dar fixat. Considerăm aplicația $T : \mathbf{R}^n \rightarrow S$, definită prin:

$$Tx_0 = x(\cdot; t_0, x_0).$$

Această aplicație este evident liniară, injectivă și surjectivă. Deci, T este un izomorfism de spații liniare și în concluzie dimensiunea lui S este egală cu dimensiunea lui $\mathbf{R}^n$ (care este n).

Din teorema de mai sus rezultă că S admite o bază formată din n elemente $x^1, x^2, \dots, x^n$. Cu alte cuvinte $x^1, x^2, \dots, x^n$ sunt n soluții

liniar independente (numit și sistem fundamental de soluții pentru (57)). Aici

$$x^j(t) = \begin{pmatrix} x_1^j(t) \\ x_2^j(t) \\ \dots \\ x_n^j(t) \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$\begin{aligned} X(t) &= [x^1(t) \quad x^2(t) \quad \dots \quad x^n(t)] \\ &= \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \end{aligned}$$

(ale cărei coloane sunt funcțiile vectoriale $x^1, x^2, \dots, x^n$) se numește matrice fundamentală a sistemului (57).

Cum

$$(x^j)'(t) = A(t)x^j(t), \quad \forall t \in I,$$

rezultă că

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \forall t \in I.$$

Matricea fundamentală X nu este unică. Este suficient să observăm că pentru orice matrice nesară $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avem că $Y(t) = X(t)B$ este de asemenea matrice fundamentală a sistemului (57) (sau echivalent (58)).

Fie un sistem de n soluții $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ale sistemului (57). Vom numi *wronskian* al acestui sistem, determinantul (notat $W(t)$):

$$W(t) = \det X(t),$$

unde

$$X(t) = [x^1(t) \quad x^2(t) \quad \dots \quad x^n(t)].$$

CURS 9

Teoremă. Sistemul de n soluții $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ale sistemului (57) este fundamental dacă și numai dacă wronskianul lor $W(t)$ este nenul într-un punct al intervalului I (echivalent, pe întregul interval I).

Demonstrație. Fie $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ un sistem fundamental de soluții pentru (57). Dorim să arătăm că pentru orice $t_0 \in I$ avem $W(t_0) \neq 0$.

Raționăm prin reducere la absurd. Dacă ar exista un $t_0 \in I$ astfel ca $W(t_0) = 0$, atunci există $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq 0$ din $\mathbf{R}^n$ astfel încât

$$c_1 x^1(t_0) + c_2 x^2(t_0) + \dots + c_n x^n(t_0) = 0.$$

Din teorema de existență și unicitate va rezulta că

$$c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t) = 0, \quad \forall t \in I$$

și deci $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ nu ar fi un sistem fundamental de soluții pentru (57); absurd.

Reciproc, dacă $W(t_0) \neq 0$ (pentru un $t_0 \in I$), atunci vom demonstra prin reducere la absurd că $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ este un sistem fundamental de soluții pentru (57).

Dacă nu ar fi așa, atunci ar exista $c \in \mathbf{R}^n$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ astfel încât

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = 0.$$

De aici rezultă că

$$c_1 x^1(t_0) + c_2 x^2(t_0) + \dots + c_n x^n(t_0) = 0.$$

Cum $W(t_0) \neq 0$ rezultă $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$; absurd.

O consecință a teoremei este că $X : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ este o matrice fundamentală pentru (57) dacă și numai dacă

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad \forall t \in I$$

și

$$\det X(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

(echivalent pentru un $t_0 \in I$).

De fapt teorema de mai sus se poate rafina:

Teoremă (Liouville). Fie n soluții $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ale sistemului (57) și $W(t)$ wronskianul acestui sistem. Atunci

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstrație. Fie

$$X(t) = [x^1(t) \quad x^2(t) \quad \dots \quad x^n(t)].$$

Din teorema creșterilor finite avem:

$$X(t+s) = X(t) + sX'(t) + G(s), \quad \forall t \in I \text{ și } \forall s \in \mathbf{R}$$

astfel ca $t+s \in I$, unde $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$.

De aici se deduce că

$$W(t+s) = \det(X(t) + sA(t)X(t) + G(s)).$$

Dacă $W(t) = 0$, atunci rezultă evident concluzia teoremei.

Dacă $W(t) \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} W(t+s) &= \det(X(t)(I + sA(t) + G(s)X^{-1}(t))) \\ &= W(t) \det(I + sA(t) + G(s)X^{-1}(t)). \end{aligned}$$

Avem că

$$\det(I + sA(t) + G(s)) = 1 + sA(t) + o(s).$$

În concluzie

$$W(t+s) = W(t)(1 + sA(t) + o(s))$$

și de aici rezultă că

$$W'(t) = A(t)W(t), \quad \forall t \in I,$$

ceea ce ne conduce la concluzia teoremei.

Să revenim acum la problema Cauchy (52)-(54).

Teoremă. Fie $X(t)$ o matrice fundamentală pentru (53). Atunci, soluția problemei (52)-(54) este

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds, \quad \forall t \in I. \quad (59)$$

Demonstrație. Funcția x dată de (59) satisface:

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X'(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds \\ &\quad + X(t)X^{-1}(t)f(t) \\ &= A(t)X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + A(t)X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds \\ &\quad + f(t) \\ &= A(t)x(t) + f(t), \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

și $x(t_0) = x_0$. De aici rezultă concluzia teoremei.

O atenție specială vom acorda în continuare cazului sistemului (52) cu coeficienți constanți. Deci, cazul când

$$A(t) = A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Vom discuta întâi câteva chestiuni legate de seriile de matrice pătratice n -dimensionale.

Considerăm șirul de matrice pătratice n -dimensionale: $\{A_k\}_{k \in \mathbf{N}}$.

Definiție. Spunem că seria $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ este convergentă la A dacă șirul sumelor parțiale $S_N = \sum_{k=0}^N A_k$ converge în normă la matricea A , adică

$$\|S_N - A\| \longrightarrow 0, \quad \text{atunci când } N \rightarrow +\infty. \quad (SC)$$

În caz de convergență scriem:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A$$

și spunem că A este suma seriei.

Ținând cont de definiția normei unei matrice rezultă echivalența dintre convergența (SC) și cea după componente, adică

$$s_{ij}^N \rightarrow a_{ij}, \quad \text{pentru } N \rightarrow +\infty,$$

$\forall i, j$, unde

$$S_N = (s_{ij}^N), \quad A = (a_{ij}).$$

De aici urmează imediat că criteriul lui Cauchy pentru serii numerice rămâne adevărat și în cazul seriilor de matrice.

În particular rezultă că dacă seria numerică $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ este convergentă, atunci și seria de matrice $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ este convergentă.

Vom considera funcția $e^{tA} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, definită prin

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Convergența seriei de mai sus este o consecință a faptului că seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\|$$

este convergentă (suma acestei serii este mai mică sau egală cu $e^{t\|A\|}$).

Prin verificare directă se demonstrează că:

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}, \quad \forall t, s \in \mathbf{R}.$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Cum $e^{0 \cdot A} = I$ (deci $\det e^{0 \cdot A} = \det I = 1$), deducem că e^{tA} este matrice fundamentală pentru (53).

În concluzie, soluția problemei (52)-(54) este în acest caz particular

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Vom indica în continuare o altă foarte utilă formulă de calcul a matricei e^{tA} , unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Pentru aceasta se consideră ecuația

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

(este o ecuație de grad n), care admite rădăcinile complexe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, de multiplicități $m_1, m_2, \dots, m_k$, respectiv $(m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbf{N}^*)$. Avem deci

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ se numesc *autovalorile* matricei A .

Vom prezenta o altă formulă de calcul pentru e^{tA} :

Teoremă.

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(m_j - 1)!} \cdot \frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}} \left(e^{\lambda t} (\lambda - \lambda_j)^{m_j} (\lambda I - A)^{-1} \right)_{\lambda=\lambda_j},$$

Demonstrațiile cele mai întâlnite ale acestui rezultat fac apel fie la teorema reziduurilor, fie la matricele Jordan (a se vedea [3], [5]).

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

Soluție. În acest caz matricea A este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să calculăm autovalorile acestei matrice.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Matricea A are autovaloarea : $\lambda_1 = 1$ (de multiplicitate 2). Avem

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

și deci

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{d}{d\lambda} \left((\lambda - 1)^2 \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - 1)^2} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \right)_{\lambda=1} \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția generală a sistemului este deci

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^t c_1 + te^t c_2 \\ -te^t c_1 + (1+t)e^t c_2 \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

CURS 10

2. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

Considerăm ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n :

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0, \quad t \in I, \quad (60)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in C(I)$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Această ecuație este echivalentă cu sistemul diferențial de ordinul 1:

$$\begin{cases} x_1' = & & x_2 \\ x_2' = & & & x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = & & & & x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - & a_{n-1}(t)x_2 - & \dots - & a_1(t)x_n. \end{cases} \quad (61)$$

Dacă notăm cu

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

atunci sistemul (61) se poate scrie sub forma

$$x' = A(t)x.$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ mulțimea soluțiilor ecuației (60) și cu $\tilde{\mathcal{S}}$ mulțimea soluțiilor pentru (61).

Am demonstrat deja că orice soluție (saturată) pentru (61) este definită pe I . Dacă x este o soluție saturată pentru (60), atunci

$(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ este o soluție saturată pentru (61), care este definită pe I .

Deci, x este și ea definită pe I . Cu alte cuvinte elementele din $\mathcal{S}$ sunt funcții definite pe I , cu valori în $\mathbf{R}$.

Mulțimea $\mathcal{S}$ formează un spațiu liniar de dimensiune n . Mai mult,

Teoremă. Funcția $T : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$, definită prin

$$Tx = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \dots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

este un izomorfism de spații liniare.

Acest lucru rezultă prin verificare directă (utilizând definiția izomorfismului de spații liniare).

Conform celor arătate în secțiunea precedentă $\tilde{\mathcal{S}}$ este un spațiu liniar de dimensiune n . Utilizând ultima teoremă deducem și că $\mathcal{S}$ este un spațiu liniar de aceeași dimensiune n .

Definiție. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ formează o bază pentru $\mathcal{S}$, atunci vom spune că $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ formează un *sistem fundamental de soluții* pentru (60).

Dacă $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este un sistem fundamental de soluții pentru (60), atunci pentru orice $x \in \mathcal{S}$ există și sunt unice constantele $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad \forall t \in I.$$

Definiție. Dacă $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este un sistem fundamental de soluții pentru (60), atunci

$$W(t) = \det(Tx_1(t) \ Tx_2(t) \ \dots \ Tx_n(t))$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

se numește wronskianul sistemului de soluții în t .

Teoremă (Liouville). Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt n soluții ale ecuației (60) și dacă $t_0 \in I$, atunci wronskianul acestora satisface

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}, \quad \forall t \in I. \quad (62)$$

Demonstrație. În adevăr, utilizând teorema lui Liouville din cazul sistemelor se obține relația (62).

Teoremă. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ n soluții pentru (60). Acestea formează un sistem fundamental de soluții pentru (60) dacă și numai dacă wronskianul acestora este nenul peste tot pe I (echivalent cu faptul că wronskianul este nenul într-un punct din I).

Demonstrație. Se aplică pentru (61) rezultatul similar din cazul sistemelor și se obține concluzia.

Exemplu. Să se arate că funcțiile $\cos t^2$ și $\sin t^2$ formează un sistem fundamental de soluții pentru

$$x'' - \frac{1}{t}x' + 4t^2x = 0, \quad t > 0.$$

Soluție. Fie $x_1(t) = \cos t^2$, $x_2(t) = \sin t^2$, $t > 0$. Avem:

$$x_1'(t) = -2t \sin t^2$$

$$x_1''(t) = -2 \sin t^2 - 4t^2 \cos t^2$$

și deci

$$x_1''(t) = \frac{1}{t}x_1'(t) - 4t^2x_1(t), \quad \forall t > 0.$$

De asemenea

$$x_2'(t) = 2t \cos t^2$$

$$x_2''(t) = 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2$$

și deci

$$x_2''(t) = \frac{1}{t}x_2'(t) - 4t^2x_2(t), \quad \forall t > 0.$$

Rezultă că x_1, x_2 sunt soluții ale ecuației date. Rămâne să arătăm că acestea formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația dată. Wronskianul acestora este

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t^2 & \sin t^2 \\ -2t \sin t^2 & 2t \cos t^2 \end{vmatrix} = 2t \neq 0,$$

$\forall t > 0$. Concluzia este acum evidentă.

Considerăm în cele ce urmează ecuația diferențială liniară ne-omogenă

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \quad t \in I, \quad (63)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n, f \in C(I)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Această ecuație este echivalentă cu sistemul diferențial de ordinul 1:

$$\begin{cases} x_1' = & & x_2 \\ x_2' = & & x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}' = & & x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + f(t), \end{cases} \quad (64)$$

$t \in I$.

Dacă z este o soluție saturată particulară a ecuației (63), atunci

$$z^{(n)}(t) + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)z(t) = f(t), \quad t \in I.$$

Orice soluție a problemei (64) este definită pe I . Deci, orice soluție saturată pentru (63) este definită pe I .

Putem concluziona că orice soluție x pentru (63) se scrie sub forma

$$x(t) = y(t) + z(t), \quad t \in I,$$

unde y este o soluție a ecuației omogene asociată (60).

În adevăr, x este soluție pentru (63) dacă și numai dacă $x - z = y$ verifică (60) și de aici concluzia.

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru (60) și z este o soluție particulară pentru (63), atunci soluția generală a ecuației (63) este dată de formula

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t) + z(t), \quad t \in I,$$

unde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$.

Iată deci că găsirea soluției generale revine la găsirea unui sistem fundamental de soluții pentru (60) și a unei soluții particulare pentru (64).

În cazul în care se cunoaște deja un sistem fundamental de soluții pentru (60): $x_1, x_2, \dots, x_n$, vom determina o soluție particulară pentru (64) prin *metoda variației constantelor*.

Se caută soluția particulară pentru (64) de forma:

$$z(t) = \tilde{c}_1(t)x_1(t) + \tilde{c}_2(t)x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n(t)x_n(t),$$

unde $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n \in C^1(I)$ sunt funcții ce vor fi determinate.

Derivând se obține:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \tilde{c}_1(t)x_1'(t) + \tilde{c}_2(t)x_2'(t) + \dots + \tilde{c}_n(t)x_n'(t) \\ &\quad + \tilde{c}_1'(t)x_1(t) + \tilde{c}_2'(t)x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n'(t)x_n(t), \quad t \in I \end{aligned}$$

și impunem condiția

$$\tilde{c}_1'(t)x_1(t) + \tilde{c}_2'(t)x_2(t) + \dots + \tilde{c}_n'(t)x_n(t) = 0, \quad t \in I.$$

Astfel

$$z'(t) = \tilde{c}_1(t)x_1'(t) + \tilde{c}_2(t)x_2'(t) + \dots + \tilde{c}_n(t)x_n'(t), \quad t \in I.$$

Derivăm din nou și obținem

$$\begin{aligned} z''(t) &= \tilde{c}_1(t)x_1''(t) + \tilde{c}_2(t)x_2''(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n''(t) \\ &\quad + \tilde{c}'_1(t)x'_1(t) + \tilde{c}'_2(t)x'_2(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x'_n(t), \quad t \in I \end{aligned}$$

și impunem condiția

$$\tilde{c}'_1(t)x'_1(t) + \tilde{c}'_2(t)x'_2(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x'_n(t) = 0, \quad t \in I.$$

Astfel

$$z''(t) = \tilde{c}_1(t)x_1''(t) + \tilde{c}_2(t)x_2''(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n''(t), \quad t \in I.$$

Se repetă acest procedeu până se obține

$$\begin{aligned} z^{(n)}(t) &= \tilde{c}_1(t)x_1^{(n)}(t) + \tilde{c}_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + \tilde{c}'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \tilde{c}'_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x_n^{(n-1)}(t), \quad t \in I \end{aligned}$$

și impunem condiția

$$\tilde{c}'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \tilde{c}'_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t), \quad t \in I.$$

Astfel

$$z^{(n)}(t) = \tilde{c}_1(t)x_1^{(n)}(t) + \tilde{c}_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n^{(n)}(t) + f(t), \quad t \in I.$$

Am obținut deci sistemul:

$$\begin{cases} \tilde{c}'_1(t)x_1(t) + \tilde{c}'_2(t)x_2(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x_n(t) = 0 \\ \tilde{c}'_1(t)x'_1(t) + \tilde{c}'_2(t)x'_2(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x'_n(t) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{c}'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \tilde{c}'_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + \tilde{c}'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t), \end{cases} \quad (65)$$

$t \in I$ și în concluzie

$$\begin{cases} z(t) &= \tilde{c}_1(t)x_1(t) + \tilde{c}_2(t)x_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n(t) \\ z'(t) &= \tilde{c}_1(t)x'_1(t) + \tilde{c}_2(t)x'_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x'_n(t) \\ z''(t) &= \tilde{c}_1(t)x''_1(t) + \tilde{c}_2(t)x''_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x''_n(t) \\ \dots\dots\dots \\ z^{(n)}(t) &= \tilde{c}_1(t)x_1^{(n)}(t) + \tilde{c}_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + \tilde{c}_n(t)x_n^{(n)}(t) = f(t), \end{cases} \quad (66)$$

$t \in I$.

Dacă ar exista $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n \in C^1(I)$ astfel încât (65) să aibă loc, atunci înmulțind prima ecuație din (66) cu a_n , a doua cu a_{n-1} , ..., și penultima cu a_1 și adunând relațiile se obține

$$\begin{aligned} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z &= \tilde{c}_1(t)(x_1^{(n)}(t) + a_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x_1(t)) \\ &+ \dots + \tilde{c}_n(t)(x_n^{(n)}(t) + a_1(t)x_n^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x_n(t)) + f(t) \end{aligned}$$

și de aici rezultă că z este soluție pentru (63).

Sistemul (65) are determinantul $W(t) \neq 0, \forall t \in I$ (este un sistem Cramer). Rezolvând se obține soluția $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, toate fiind funcții continue pe I . Orice familie de n primitive ale acestora $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ (acestea sunt funcții de clasă C^1 pe I) va satisface deci sistemul (65).

Observație. Funcțiile $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ determinate prin metoda variației constantelor nu sunt unic determinate.

Exemplu. Să se găsească soluția generală ecuației

$$x'' + x = \cos t, \quad t \in \mathbf{R} \quad (67)$$

folosind metoda variației constantelor.

Soluție. Considerăm ecuația omogenă asociată

$$x'' + x = 0.$$

Este evident că $x_1(t) = \cos t$ și $x_2(t) = \sin t$ sunt soluții ale acesteia și sunt și liniar independente. Soluția generală a ecuației (67) are forma

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + z(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

unde z este o soluție particulară a ecuației (67).

Vom căuta soluția z de forma

$$z(t) = \tilde{c}_1(t) \cos t + \tilde{c}_2(t) \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

$\tilde{c}_1$ și $\tilde{c}_2$ satisfac sistemul:

$$\begin{cases} \tilde{c}_1'(t) \cos t + \tilde{c}_2'(t) \sin t = 0 \\ -\tilde{c}_1(t)' \sin t + \tilde{c}_2'(t) \cos t = \cos t. \end{cases}$$

Acesta este un sistem compatibil determinat și are soluția

$$\begin{cases} \tilde{c}'_1(t) = -\sin t \cos t \\ \tilde{c}'_2(t) = \cos^2 t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{c}_1(t) = \frac{\cos 2t}{4} + a_1 \\ \tilde{c}_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + a_2, \end{cases}$$

$a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Alegând a_1 și a_2 oarecare (de exemplu $a_1 = a_2 = 0$) se obține soluția generală pentru (67):

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\cos 2t}{4} \cos t + \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) \sin t,$$

$t \in \mathbf{R}$, unde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ sunt constante oarecare.

CURS 11

3. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Vom analiza pentru început ecuația omogenă cu coeficienți constanți:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (68)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

Dorim să găsim un sistem fundamental de soluții pentru (68). Pentru aceasta vom atașa întâi așa numita *ecuație caracteristică*:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (69)$$

Această ecuație are k rădăcini distincte complexe: λ_1 de multiplicitate $m_1 \in \mathbf{N}^*$, λ_2 de multiplicitate $m_2 \in \mathbf{N}^*$, ..., λ_k de multiplicitate $m_k \in \mathbf{N}^*$. Aceste rădăcini se numesc *rădăcini caracteristice* sau *autovalori*. Cum (69) este o ecuație de gradul n rezultă că $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Se poate vorbi de soluții ale ecuației (68) definite pe un interval din $\mathbf{R}$ și cu valori în $\mathbf{C}$. O asemenea soluție este o funcție x definită pe un interval J , cu valori în $\mathbf{C}$, de clasă C^n și astfel încât

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \quad \forall t \in J.$$

Exact ca în cazul soluțiilor reale se poate arăta că orice soluție complexă saturată este definită pe $\mathbf{R}$.

Se poate demonstra că mulțimea soluțiilor ecuației (68) formează un spațiu liniar de dimensiune n peste corpul $\mathbf{C}$. Demonstrația se face exact la fel ca în cazul real.

Deci, se pot defini exact la fel și în această situație noțiunile de sistem fundamental de soluții, matrice fundamentală, etc.

Notăm cu

$$L(D)x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x$$

(acesta este un polinom diferențial; exponenții sunt înlocuiți cu ordine de derivare);

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \\ L^{(p)}(D)x &= n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{(n-p)} \\ &+ (n-1)(n-2)\cdots(n-p)a_1x^{(n-p-1)} + \cdots \end{aligned}$$

Este evident că

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Vom demonstra pentru început:

Lema lui Leibniz generalizată. Pentru orice y, z de clasă C^n avem:

$$L(D)(yz) = \sum_{p=0}^n \frac{L^{(p)}(D)y \cdot z^{(p)}}{p!}.$$

Observație. Acest rezultat generalizează rezultatul clasic al lui Leibniz:

$$(yz)^{(n)} = \sum_{p=0}^n C_n^p y^{(n-p)} \cdot z^{(p)}.$$

Demonstrația lemei. Utilizând rezultatul clasic al lui Leibniz se obține

$$L(D)(yz) = \sum_{p=0}^n L_p(D)y \cdot z^{(p)}, \quad (70)$$

unde $L_p(D)$ este un polinom diferențial de un anumit ordin. Dorim să demonstrăm că:

$$L_p(D) = \frac{1}{p!} L^{(p)}(D).$$

În adevăr, pentru $y = e^{\lambda t}$ și $z = e^{\gamma t}$ obținem din (70):

$$L(D)e^{(\lambda+\gamma)t} = \sum_{p=0}^n L_p(D)e^{\lambda t}\gamma^p e^{\gamma t}, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

$\forall \lambda, \gamma \in \mathbf{C}$. Cum

$$L(D)e^{\alpha t} = e^{\alpha t}L(\alpha), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall \alpha \in \mathbf{C},$$

rezultă că

$$e^{(\lambda+\gamma)t}L(\lambda+\gamma) = e^{(\lambda+\gamma)t} \sum_{p=0}^n L_p(\lambda)\gamma^p, \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbf{C}.$$

Utilizând formula lui Taylor avem:

$$L(\lambda+\gamma) = \sum_{p=0}^n \frac{L^{(p)}(\lambda)\gamma^p}{p!}, \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbf{C}$$

și de aici concluzia

$$L_p(\lambda) = \frac{1}{p!}L^{(p)}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

Cu aceasta demonstrația lemei este încheiată.

Teoremă. Următorul sistem de soluții (cu valori complexe) este fundamental:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \dots & \\ e^{\lambda_k t}, & te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}. \end{cases}$$

Demonstrație. Observăm pentru început că funcțiile indicate mai sus sunt cu valori complexe.

Vom arăta întâi că $t^l e^{\lambda_1 t}$ este soluție a ecuației (68), pentru orice $l \in \{0, 1, \dots, m_1 - 1\}$.

Utilizând lema de mai sus se obține

$$L(D)(t^l e^{\lambda_1 t}) = \sum_{p=0}^n \frac{L^{(p)}(D)(e^{\lambda_1 t})(t^l)^{(p)}}{p!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lambda_1 t} \sum_{p=0}^n \frac{L^{(p)}(\lambda_1)(t^l)^{(p)}}{p!} \\
&= e^{\lambda_1 t} \left[\sum_{0 \leq p \leq m_1-1} \frac{L^{(p)}(\lambda_1)(t^l)^{(p)}}{p!} + \sum_{m_1 \leq p \leq n} \frac{L^{(p)}(\lambda_1)(t^l)^{(p)}}{p!} \right].
\end{aligned}$$

Cea de-a doua sumă din ultimul membru este egală cu 0 deoarece $(t^l)^{(p)} = 0$, $\forall p \geq m_1$, iar prima sumă este 0 deoarece λ_1 este rădăcină de multiplicitate m_1 pentru (69) și deci $L(\lambda_1) = L'(\lambda_1) = \dots = L^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0$.

Să demonstrăm că sistemul de soluții indicat este liniar independent peste $\mathbf{C}$.

Fie $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{C}$ astfel încât:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n t^{m_k-1} e^{\lambda_k t} = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

De aici rezultă

$$e^{\lambda_1 t} g_1(t) + e^{\lambda_2 t} g_2(t) + \dots + e^{\lambda_k t} g_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

unde $g_1, g_2, \dots, g_k$ sunt funcții polinomiale de grade cel mult $m_1, m_2, \dots, m_k$, respectiv.

De aici rezultă că

$$g_1(t) + e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} g_2(t) + \dots + e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} g_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Derivând de m_1 ori se obține

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} h_2(t) + \dots + e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} h_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

unde $h_2, \dots, h_k$ sunt funcții polinomiale și $\text{grad } h_2 = \text{grad } g_2, \dots, \text{grad } h_k = \text{grad } g_k$. De aici deducem că

$$h_2(t) + e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} \dots + e^{(\lambda_k-\lambda_2)t} h_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Repetând procedeul se obține în final

$$e^{(\lambda_k-\lambda_{k-1})t} u_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

unde $\text{grad } u_k = \dots = \text{grad } h_k = \text{grad } g_k$. De aici rezultă că

$$u_k(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

și concluzia este că $u_k \equiv 0$ și deci $g_k \equiv 0$. Aceasta arată că

$$c_{n-m_k+1} = \dots = c_n = 0.$$

Analog se arată că $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0, \dots, g_{k-1} \equiv 0$. În concluzie rezultă că

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

și deci sistemul de soluții este liniar independent.

Remarcă. Problema este acum faptul că funcțiile din sistemul fundamental de soluții (din teorema anterioară) sunt cu valori complexe (pot exista autovalori complexe fără a fi reale).

Fie $a + ib$ o asemenea autovaloare ($a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$). Atunci $a - ib$ este de asemenea autovaloare și are aceeași multiplicitate m ca a lui $a + ib$. Cum

$$\begin{cases} e^{(a+ib)t}, & te^{(a+ib)t}, \dots, t^{m-1}e^{(a+ib)t}, \\ e^{(a-ib)t}, & te^{(a-ib)t}, \dots, t^{m-1}e^{(a-ib)t} \end{cases}$$

sunt soluții pentru (68), rezultă și că

$$\begin{cases} e^{at} \cos bt, & te^{at} \cos bt, \dots, t^{m-1}e^{at} \cos bt, \\ e^{at} \sin bt, & te^{at} \sin bt, \dots, t^{m-1}e^{at} \sin bt \end{cases}$$

(care sunt funcții reale) sunt de asemenea soluții pentru (68) și ele generează același subspațiu liniar ca primele (peste corpul $\mathbf{C}$). Aplicând același procedeu pentru toate autovalorile din $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ se va obține un sistem fundamental de soluții peste $\mathbf{C}$. De aici rezultă că acestea sunt liniar independente și peste $\mathbf{R}$.

Exemplu. Să se găsească soluția generală pentru ecuația

$$x^{(4)} - x = 0.$$

Soluție. Ecuația caracteristică este

$$\lambda^4 - 1 = 0,$$

care are soluțiile $1, -1, i$ și $-i$.

Un sistem fundamental de soluții va fi deci:

$$e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t.$$

Soluția generală a ecuației este deci:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

unde c_1, c_2, c_3, c_4 sunt constante reale oarecare.

Observație. În cazul ecuației neomogene cu coeficienți constanți:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (71)$$

în care $f(t) = e^{at}P(t)$, unde $a \in \mathbf{R}$, iar P este o funcție polinomială, ecuația (71) are o soluție particulară de forma

$$z(t) = e^{at}t^l Q(t),$$

unde Q este o funcție polinomială având același grad cu P . Aici l este multiplicitatea lui a ca rădăcină a ecuației caracteristice.

Dacă a nu este rădăcină a acestei ecuații atunci convenim ca $l = 0$.

Dacă $f(t) = e^{at}P(t) \cos bt$ sau $f(t) = e^{at}P(t) \sin bt$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, iar P este o funcție polinomială, ecuația (71) are o soluție particulară de forma

$$z(t) = e^{at}t^l(Q_1(t) \cos bt + Q_2(t) \sin bt),$$

unde Q_1, Q_2 sunt funcții polinomiale de același grad cu P . Aici l este multiplicitatea lui $a + ib$ ca rădăcină a ecuației caracteristice.

Pentru demonstrație recomandăm [11].

Exemplu. Să reluăm exemplul din secțiunea precedentă.

$$x'' + x = \cos t$$

Ecuația caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$ și are rădăcinile i și $-i$.

Deci, soluția generală a ecuației omogene asociate este

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad t \in \mathbf{R},$$

unde c_1, c_2 sunt constante reale oarecare.

Vom căuta o soluție particulară a ecuației neomogene date de forma

$$z(t) = t(A \cos t + B \sin t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Avem

$$z'(t) = (A + Bt) \cos t + (B - At) \sin t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$z''(t) = (2B - At) \cos t - (2A + Bt) \sin t, \quad t \in \mathbf{R}$$

și de aici obținem

$$z''(t) + z(t) = 2B \cos t - 2A \sin t = \cos t.$$

Concluzia este că $B = \frac{1}{2}$, $A = 0$. Deci,

$$z(t) = \frac{1}{2} t \sin t$$

este o soluție particulară și deci soluția generală

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deși această formă pare diferită de cea din secțiunea precedentă, de fapt nu este așa. Se poate verifica că diferența celor două “tipuri” de soluții verifică ecuația $x'' + x = 0$.

Ecuatii de ordinul 2 cu coeficienți constanți

Considerăm ecuația

$$x'' + \alpha x' + \beta x = \gamma \sin \nu t,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \nu \in \mathbf{R}$, $\alpha, \gamma \geq 0$, $\beta, \nu > 0$.

1) Dacă $\gamma = 0$ se obține că ecuația omogenă asociată este

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0,$$

iar ecuația caracteristică este

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0.$$

Dacă $\alpha^2 - 4\beta > 0$, atunci soluția generală a ecuației omogene este

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ și λ_1, λ_2 sunt soluțiile ecuației caracteristice, adică:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

Este evident că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Dacă $\alpha^2 - 4\beta = 0$, atunci

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t},$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ și $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2}$ este rădăcina dublă a ecuației caracteristice. Rezultă imediat că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Dacă $\alpha^2 - 4\beta < 0$, atunci

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

sunt rădăcinile ecuației caracteristice și deci soluția generală a ecuației omogene este

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} t + c_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} t,$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Este evident că dacă $\alpha > 0$, atunci:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

iar dacă $\alpha = 0$, atunci soluția este mărginită.

2) Să considerăm acum cazul în care $\gamma > 0$ și $\alpha^2 - 4\beta < 0$.

Dacă $\alpha > 0$ sau $\beta \neq \nu^2$ atunci se caută o soluție particulară de forma:

$$z(t) = \tilde{c}_1 \cos \nu t + \tilde{c}_2 \sin \nu t.$$

Înlocuind în ecuație se obține:

$$\begin{aligned} -\tilde{c}_1 \nu^2 \cos \nu t - \tilde{c}_2 \nu^2 \sin \nu t + \alpha(-\tilde{c}_1 \nu \sin \nu t + \tilde{c}_2 \nu \cos \nu t) \\ + \beta(\tilde{c}_1 \cos \nu t + \tilde{c}_2 \sin \nu t) = \gamma \sin \nu t \end{aligned}$$

și de aici

$$\begin{cases} \tilde{c}_1(-\nu^2 + \beta) + \tilde{c}_2 \alpha \nu = 0 \\ \tilde{c}_1(-\alpha \nu) + \tilde{c}_2(\beta - \nu^2) = \gamma \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obține

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{-\alpha \gamma \nu}{(\beta - \nu^2)^2 + \alpha^2 \nu^2}, \\ \tilde{c}_2 &= \frac{\gamma(\beta - \nu^2)}{(\beta - \nu^2)^2 + \alpha^2 \nu^2}. \end{aligned}$$

Se obține deci soluția particulară

$$z(t) = \frac{-\alpha \gamma \nu \cos \nu t}{(\beta - \nu^2)^2 + \alpha^2 \nu^2} + \frac{\gamma(\beta - \nu^2) \sin \nu t}{(\beta - \nu^2)^2 + \alpha^2 \nu^2}.$$

Soluția generală a ecuației neomogene este deci

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t + c_2 e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t + z(t),$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Este clar că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - z(t)) = 0.$$

Dacă $\alpha = 0$ și $\beta \neq \nu^2$, atunci

$$z(t) = \frac{\gamma \sin \nu t}{\beta - \nu^2}.$$

O situație extrem de interesantă este aceea în care $\alpha = 0$ și $\beta = \nu^2$.
Se caută o soluție particulară de forma

$$z(t) = t(A \cos \nu t + B \sin \nu t),$$

unde A și B sunt constante reale. Făcând calculele rezultă că

$$z(t) = -\frac{\gamma}{2\nu} t \cos \nu t$$

și deci

$$x(t) = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t - \frac{\gamma}{2\nu} t \cos \nu t.$$

Se vede că există $t_n \rightarrow +\infty$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x(t_n)| = +\infty.$$

Acesta este *fenomenul de rezonanță*.

În cazul oscilatorului armonic fără frecare, modelat de ecuația

$$mx'' + kx = \gamma \sin \nu t,$$

se obține fenomenul de rezonanță atunci când

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

În cazul circuitului serie LC, descris de ecuația

$$LI'' + \frac{1}{C}I = \gamma \sin \nu t,$$

se obține fenomenul de rezonanță pentru

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Exerciții

1. Găsiți soluția generală a ecuației omogene:

$$x'' + 2x' - 3x = 0.$$

2. Să se rezolve ecuația omogenă:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

3. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'' + 4x' + 5x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -3. \end{cases}$$

4. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x''' - 3x'' + 4x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \\ x''(0) = 3. \end{cases}$$

5. Să se găsească soluția generală a ecuației neomogene:

$$x'' + 25x = 1 + \sin t.$$

6. Să se determine soluția generală a ecuației:

$$x'' + x = \sin t,$$

utilizând metoda variației constantelor.

Să se rezolve:

- 7.

$$x'' - x = e^t.$$

8.

$$x'' + 4x = \operatorname{tg} 2t.$$

9.

$$x''' + x' = \operatorname{tg} t.$$

10.

$$x'' - 8x' + 9x = \sin 5t.$$

11. O bobină de inductanță $L = 4$ H, un rezistor de rezistență $R = 20 \, \Omega$ și un condensator de capacitate $C = 0,01$ F sunt legați în serie cu o baterie cu tensiunea $U = 500$ V. Știind că la momentul inițial $t = 0$, $Q = 0$ și $I = 0$, să se afle Q și I la momentul $t \geq 0$.

Să se rezolve următoarele probleme:

12.

$$3x'' + 4x' + x = e^{-t} \sin t.$$

13.

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z + t \\ y' = 2x - y - 2z + e^t \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$$

14. Să se arate că ecuația Euler-Cauchy:

$$t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t)$$

se reduce prin substituția $t = e^s$ la o ecuație liniară.

15. Să se afle soluția generală a ecuației:

$$t^2 x'' - 3tx' + 2x = 0.$$

16. Să se rezolve ecuația:

$$t^2 x'' + tx' = t \ln t.$$

Să se rezolve următoarele probleme:

17.

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 6x_2, \\ x'_2 = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 4x_2, \\ x'_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_1 - 2x_2, \\ x'_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2, \\ x'_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) + t, \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_3, \\ x'_2 = -2x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x'_3 = 8x_1 - 3x_3, \\ x_1(0) = 1, \ x_2(0) = -1, \ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

CURS 12

IV. ELEMENTE DE TEORIA STABILITĂȚII

Noțiunea de soluție stabilă a unei ecuații diferențiale, precum și primele rezultate ale teoriei moderne a stabilității ecuațiilor diferențiale sunt datorate matematicianului rus A.M. Liapunov.

Vom prezenta în continuare câteva din noțiunile și rezultatele de bază ale acestei teorii.

Considerăm sistemul diferențial

$$x' = f(t, x), \quad (72)$$

unde

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

Aici

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; t \in [0, +\infty), x \in \mathbf{R}^n, \|x\| < \alpha\} \quad (\alpha > 0)$$

(iar $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$, pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$). Presupunem că f este continuă pe Ω și local lipschitziană în raport cu x pe Ω .

Pentru orice $t_0 \geq 0$ și orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\|x_0\| < \alpha$, există o unică soluție saturată la dreapta a sistemului (72), care satisface condiția inițială

$$x(t_0) = x_0.$$

Notăm această soluție $x(t; t_0, x_0)$.

Fie $\tilde{x}$ o soluție a problemei (72) definită pe semiaxa $[t_0, +\infty)$.

Definiție. Soluția $\tilde{x}$ se numește *stabilă* (în sens Liapunov) dacă:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \|x_0 - \tilde{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$, rezultă că
 $x(t; t_0, x_0)$ este definită pe toată semiaxa $[t_0, +\infty)$ și

$$\|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Soluția $\tilde{x}$ este *instabilă* dacă nu este stabilă.

Stabilitatea înseamnă că dacă data x_0 este “suficient de aproape” de $\tilde{x}(t_0)$, atunci soluția $x(t; t_0, x_0)$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ și rămâne la orice moment $t \geq t_0$ “aproape” de $\tilde{x}(t)$.

Definiție. Soluția $\tilde{x}$ este *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și dacă există $\eta > 0$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; t_0, x_0) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

de îndată ce $\|x_0 - \tilde{x}(t_0)\| < \eta$.

Observație. Stabilitatea este o proprietate a soluției și nu a sistemului.

Exemplu. Considerăm ecuația pendulului simplu:

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \sin \theta,$$

care se poate scrie în mod echivalent astfel:

$$\begin{cases} \theta' = \psi \\ \psi' = -\frac{g}{L} \sin \theta. \end{cases}$$

Astfel, se cunoaște că soluția banală: $(\theta, \psi) = (0, 0)$ este stabilă, fără a fi asimptotic stabilă. În schimb soluția $(\theta, \psi) = (\pi, 0)$ nu este stabilă.

Dacă $\tilde{x}$ este soluție a ecuației (72) definită pe $[t_0, +\infty)$, atunci pentru orice soluție x pentru (72) avem:

$$(x - \tilde{x})'(t) = f(t, \tilde{x}(t) + x(t) - \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t)).$$

Făcând substituția $y = x - \tilde{x}$, obținem

$$y'(t) = f(t, \tilde{x}(t) + y(t)) - f(t, \tilde{x}(t)).$$

Notând $g(t, y) = f(t, \tilde{x}(t) + y) - f(t, \tilde{x}(t))$ rezultă

$$y' = g(t, y) \quad (73)$$

și astfel stabilitatea soluției $\tilde{x}$ a ecuației (72) s-a redus la stabilitatea soluției nule pentru (73).

La fel, asimptotica stabilitate a lui $\tilde{x}$ pentru (72) este echivalentă cu asimptotica stabilitate a soluției nule pentru (73).

Observație. Avem astfel că:

Soluția nulă a ecuației (73) este *stabilă* dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall y_0 \in \mathbf{R}^n : \|y_0\| < \delta(\varepsilon)$, rezultă că soluția ecuației (73) $y(t; t_0, y_0)$ (ce verifică $y(t_0) = y_0$) este definită pe toată semiaxa $[t_0, +\infty)$ și

$$\|y(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Soluția nulă a ecuației (73) este *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și dacă există $\eta > 0$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t; t_0, y_0)\| = 0$$

de îndată ce $\|y_0\| < \eta$.

1. Criterii de stabilitate a soluției nule pentru sisteme diferențiale liniare

Ne vom ocupa de studiul stabilității soluției nule a sistemului

$$x' = A(t)x, \quad (74)$$

unde $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$, $t \geq 0$ și $a_{ij} \in C([0, +\infty))$, $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Teoremă. Dacă soluția banală a sistemului (74) este stabilă (respectiv asimptotic stabilă), atunci orice soluție a sistemului este stabilă (respectiv asimptotic stabilă).

Demonstrație. Dacă $\tilde{x}$ este o soluție oarecare pentru (74), atunci prin transformarea $y = x - \tilde{x}$ avem:

$$y' = A(t)y$$

și de aici deducem că dacă soluția banală a sistemului (74) este stabilă, atunci soluția $\tilde{x}$ este stabilă.

În cazul stabilității asimptotice se raționează la fel.

Observație. Ultimul rezultat arată că în cazul sistemelor diferențiale liniare, stabilitatea (respectiv asimptotica stabilitate) este chiar o proprietate a sistemului (nu doar a soluției).

De aceea sistemele liniare se numesc stabile, sau instabile, după cum soluția banală este sau nu stabilă.

Teoremă. Sistemul (74) este stabil dacă și numai dacă există o matrice fundamentală a sa $X(t)$ care este mărginită pe $[0, +\infty)$. Acest lucru este echivalent cu faptul că orice matrice fundamentală este mărginită pe $[0, +\infty)$.

Sistemul (74) este asimptotic stabil dacă și numai dacă există o matrice fundamentală $X(t)$ astfel încât:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Demonstrație. Presupunem că există o matrice fundamentală $X(t)$ astfel încât

$$\|X(t)\| \leq C, \quad \forall t \geq 0,$$

unde $C > 0$ este o constantă.

Notăm cu $x(t; t_0, x_0)$ soluția sistemului (74) ce satisface condiția $x(t_0) = x_0$.

Vom demonstra că soluția nulă este stabilă.

Pornim de la faptul că

$$x(t; t_0, x_0) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (75)$$

De aici deducem că

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq \|X(t)\| \|X^{-1}(t_0)\| \|x_0\| \leq C \|X^{-1}(t_0)\| \|x_0\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{C\|X^{-1}(t_0)\|} > 0, \forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ cu $\|x_0\| < \delta$ avem că:

$$\|x(t; t, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Dacă, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$, atunci din (75) deducem că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0.$$

Reciproc, dacă soluția nulă este stabilă, atunci să arătăm că există o matrice fundamentală mărginită.

În definiția stabilității soluției nule alegem: $\varepsilon = 1$. Fie

$$x_{01} = \begin{pmatrix} \delta/2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta/2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad x_{0n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \delta/2 \end{pmatrix}$$

din $\mathbf{R}^n$ și notăm cu $x^j(t) = x(t; t_0, x_{0j})$. Considerăm matricea fundamentală:

$$X(t) = [x^1(t) \ x^2(t) \ \dots \ x^n(t)].$$

Cum $\|x^j(t)\| < 1, \forall t \geq t_0$, atunci deducem că $\|X(t)\| < n, \forall t \geq t_0$. Deci, matricea $X(t)$ este mărginită pe $[0, +\infty)$.

Dacă soluția nulă este asimptotic stabilă, atunci

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x^j(t)\| = 0$$

și deci

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Vom discuta în continuare cazul particular când $A(t) = A$ (A este o matrice constantă). Sistemul (74) devine

$$x' = Ax. \quad (76)$$

Definiție. Matricea A este *hurwitziană* dacă toate autovalorile sale au partea reală negativă.

Teoremă. Sistemul (76) este asimptotic stabil dacă și numai dacă A este hurwitziană.

Dacă măcar una dintre autovalorile lui A are partea reală strict pozitivă, atunci sistemul este instabil.

Dacă autovalorile lui A au partea reală mai mică sau egală cu 0, iar cele care au partea reală 0 sunt simple, atunci sistemul (76) este stabil, fără a fi asimptotic stabil.

Demonstrație (schită). Vom demonstra prima parte a acestei teoreme. Se utilizează pentru aceasta teorema anterioară. Asimptotică stabilitate a sistemului este astfel echivalentă cu faptul că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0.$$

Utilizând teorema de structură a lui e^{tA} (din capitolul precedent) se deduce că

$$e^{tA} = \left(\sum_{r=1}^k p_{ijr}(t) e^{\lambda_r t} \right)_{1 \leq i, j \leq k},$$

unde $\{\lambda_r\}_{r=1}^k$ sunt autovalorile lui A , iar p_{ijr} sunt polinoame de grad egal cu $m_r - 1$ (m_r este multiplicitatea autovalorii λ_r).

Dacă A este hurwitziană, atunci există $\theta > 0$ a.î. $\operatorname{Re} \lambda_r \leq -\theta < 0$. De aici deducem că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{r=1}^k p_{ijr}(t) e^{\lambda_r t} = 0$$

și deci

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA}\| = 0.$$

Dacă

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA}\| = 0,$$

atunci rezultă prin reducere la absurd că $\operatorname{Re} \lambda_r < 0, \forall r \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demonstrațiile celorlalte părți se bazează de asemenea pe teorema de structură a lui e^{tA} . Pentru detalii a se vedea [5].

Observație. În studiul stabilității sistemului (76) este esențial deci să se evalueze partea reală a fiecărei autovalori a lui A , adică a rădăcinilor polinomului caracteristic

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Polinomul p este *hurwitzian* dacă rădăcinile sale au partea reală negativă.

În cazul în care $n = 2$ sau $n = 3$ există două criterii datorate lui Hurwitz:

Polinomul $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ (cu $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$) este hurwitzian dacă și numai dacă $a_1, a_2 > 0$.

Polinomul $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ (cu $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$) este hurwitzian dacă și numai dacă $a_1, a_2, a_3 > 0$ și $a_1a_2 > a_3$.

Toată teoria de mai sus se aplică și în cazul ecuațiilor liniare de ordin superior.

Considerăm ecuația

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (77)$$

Definiție. Fie $\tilde{x}$ o soluție a problemei (77) definită pe semiaxa $[t_0, +\infty)$. Soluția $\tilde{x}$ se numește *stabilă*, respectiv *asimptotic stabilă* dacă $(\tilde{x}, \tilde{x}', \dots, \tilde{x}^{(n-1)})$ este stabilă, respectiv asimptotic stabilă pentru sistemul

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Exemplu. Vom studia stabilitatea soluției nule a ecuației oscilatorului armonic.

Ecuația oscilatorului armonic fără frecare este:

$$mx'' + kx = 0,$$

unde $m, k > 0$. Atașăm ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

care are soluțiile $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ (fiecare de multiplicitate 1). Concluzia este că soluția nulă este stabilă, dar nu este asimptotic stabilă.

Ecuația oscilatorului armonic cu frecare este

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0,$$

unde $m, \gamma, k > 0$. Ecuația caracteristică este

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0,$$

care are doar soluții cu partea reală negativă (polinomul caracteristic este hurwitzian). Concluzia este că soluția nulă este asimptotic stabilă.

Observație. Studiul stabilității soluției $\tilde{x}$ a sistemului liniar neomogen

$$x' = A(t)x + f(t),$$

se reduce (prin substituția $y = x - \tilde{x}$) la studiul stabilității soluției nule a sistemului omogen

$$y' = A(t)y.$$

CURS 13

2. Stabilitatea sistemelor liniare perturbate. Metoda primei aproximații

Vom studia stabilitatea soluției nule a sistemului diferențial

$$x' = Ax + g(t, x), \quad (78)$$

unde $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este o matrice constantă, iar

$$g : D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; t \geq 0, \|x\| < \alpha\} \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

($\alpha > 0$), este o funcție continuă pe D , local lipschitziană în raport cu x pe D și verifică condiția $g(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$.

Teoremă (Poincaré-Liapunov). Dacă A este matrice hurwitziană, iar g verifică

$$\|g(t, x)\| \leq L\|x\|, \quad \forall (t, x) \in D,$$

cu L suficient de mică, atunci soluția nulă a sistemului (78) este asimptotic stabilă.

Demonstrație. Pentru orice $t_0 \geq 0$ și orice $x_0 \in \mathbf{R}^n$ a.î. $\|x_0\| < \alpha$, sistemul (78) are o unică soluție saturată la dreapta $x(t; t_0, x_0)$ definită pe $[t_0, T)$.

Cum A este hurwitziană, va rezulta că există $M, a > 0$ astfel ca

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\frac{at}{2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Funcția $x(t; t_0, x_0)$ fiind soluție pentru

$$\begin{cases} x' = Ax + g(t, x(t)), & t \in \mathbf{R} \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

verifică

$$x(t; t_0, x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s, x(s; t_0, x_0))ds, \quad \forall t \in [t_0, T).$$

De aici deducem că

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, x_0)\| &\leq \|e^{(t-t_0)A}\| \cdot \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|e^{(t-s)A}\| \cdot \|g(s, x(s; t_0, x_0))\| ds \\ &\leq Me^{-\frac{a(t-t_0)}{2}} \|x_0\| + LM \int_{t_0}^t e^{-\frac{a(t-s)}{2}} \|x(s; t_0, x_0)\| ds, \quad \forall t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Aplicând lema lui Gronwall deducem că

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| e^{(LM - \frac{a}{2})(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (79)$$

Dacă $L < \frac{a}{2M}$, atunci notăm cu $\theta = \frac{a}{2} - LM > 0$ și obținem

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leq M \|x_0\| e^{-\theta(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

În concluzie, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \|x_0\| < \delta(\varepsilon)$: $x(t; t_0, x_0)$ este definită pe toată semiaxa $[t_0, +\infty)$ și $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$. Trecând la limită în (79) obținem că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0.$$

Deci, soluția nulă este asimptotic stabilă.

Teoremă (Perron). Dacă A este hurwitziană și g verifică

$$\|g(t, x)\| \leq h(\|x\|), \quad \forall (t, x) \in D, \quad (80)$$

unde $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s)}{s} = 0$, atunci soluția nulă a sistemului (78) este asimptotic stabilă.

Demonstrație. Fie $L > 0$ din demonstrația teoremei anterioare. Avem că

$$\|g(t, x)\| \leq L\|x\|,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$ ce satisface $\|x\| < \alpha'$. Considerăm restricția lui g la

$$D' = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; t \geq 0, \|x\| < \alpha'\}.$$

Aplicând teorema Poincaré-Liapunov obținem concluzia.

Exemplu. Să se studieze stabilitatea soluției nule a sistemului

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_1^2 \sin t \\ x_2' = -x_1 - x_2 + x_2^2 \cos t. \end{cases}$$

Soluție. Evident sistemul dat este de forma (78), unde $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

iar $g : \{(t, x) \in \mathbf{R}^3; t \geq 0, \|x\| \leq 1\} \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$g(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \sin t \\ x_2^2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Avem

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

(care este polinom hurwitzian) și deci A este hurwitziană. De asemenea g este evident continuă, local lipschitziană în raport cu x și satisface $g(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$. Funcția g mai verifică condiția (80), cu $h(s) = s^2$. Aplicând teorema lui Perron deducem că soluția nulă este asimptotic stabilă.

Ne vom ocupa în continuare de sistemul autonom

$$x' = f(x), \tag{81}$$

unde

$$f : \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| < \alpha\} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

($\alpha > 0$). Deci, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, unde

$$f_k : \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| < \alpha\} \longrightarrow \mathbf{R},$$

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definiție. O *soluție staționară* pentru (81) este o soluție constantă c ($c \in \mathbf{R}^n$) a sistemului (81). Aceasta verifică deci $f(c) = 0$.

Studiul stabilității soluției staționare $\tilde{x}$ se reduce la studiul stabilității soluției nule pentru sistemul

$$y' = f(y + \tilde{x}) - f(\tilde{x}).$$

Din acest motiv ne vom ocupa doar de studiul stabilității soluției staționare nule (aceasta este soluție dacă $f(0) = 0$).

Notăm

$$f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Teoremă. Dacă f este de clasă C^1 (adică f_k este de clasă C^1 pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$), $f(0) = 0$ (este vorba despre 0 din $\mathbf{R}^n$) și dacă matricea

$$A = f_x(0)$$

este hurwitziană, atunci soluția nulă a sistemului (81) este asimptotic stabilă.

Demonstrație. Din teorema lui Taylor rezultă că

$$f(x) = f(0) + Ax + g(x),$$

unde

$$\|g(x)\| \leq h(\|x\|),$$

iar

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(s)}{s} = 0.$$

Aplicând teorema lui Perron urmează concluzia.

Exemplul 1. Să se studieze stabilitatea soluției nule pentru ecuația pendulului cu frecare:

$$x'' + bx' + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

$(b, g, l > 0)$.

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2. \end{cases}$$

Acest sistem are forma (81), unde

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2 \end{pmatrix}.$$

Vom utiliza teorema anterioară. Funcția f este de clasă C^1 pe $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. De asemenea

$$A = f_x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -b \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al lui A este $\lambda^2 + b\lambda + \frac{g}{l}$, care este evident un polinom hurwitzian. Deci, A este hurwitziană. Concluzia este că soluția nulă este asimptotic stabilă.

Din teorema anterioară se obține:

Teorema de stabilitate după prima aproximație. Dacă f este de clasă C^1 , $c \in \mathbf{R}^n$ a.î. $f(c) = 0$ și dacă matricea

$$A = f_x(c)$$

este hurwitziană, atunci soluția staționară $x = c$ a sistemului (81) este asimptotic stabilă.

Exemplul 2. Considerăm ecuația

$$Lx'' + Rx' + \frac{1}{C}x = \frac{1}{C}f(x'),$$

care descrie un circuit oscilant RLC cu triodă (care este element de amplificare). Se cere să se studieze stabilitatea soluțiilor staționare știind că f este de clasă C^1 pe $\mathbf{R}$.

Soluție. Ecuația se poate scrie echivalent astfel:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{1}{CL}x_1 + \frac{1}{CL}f(x_2) - \frac{R}{L}x_2. \end{cases}$$

Soluțiile staționare verifică:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = f(0). \end{cases}$$

Deci, singura soluție staționară este $(f(0), 0)$. Matricea A este în acest caz

$$A = f_x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & \frac{f'(0)-RC}{CL} \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$\lambda^2 - \frac{f'(0) - RC}{CL}\lambda + \frac{1}{CL}.$$

Dacă avem $RC > f'(0)$ (condiția de reglaj), atunci soluția staționară este asimptotic stabilă.

Observație. Ultimul rezultat admite o completare:

Dacă f este de clasă C^1 , $c \in \mathbf{R}^n$ a.î. $f(c) = 0$ și dacă matricea $A = f_x(c)$ admite cel puțin o autovaloare cu partea reală strict pozitivă, atunci soluția staționară $x = c$ a sistemului (81) este instabilă.

Pentru demonstrație recomandăm [5].

Stabilitatea sistemelor hamiltoniene

Un sistem mecanic cu n grade de libertate este complet determinat de *vectorul de poziție* $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ (unde $q_1, q_2, \dots, q_n$ sunt coordonatele generalizate ale sistemului) și de $q'(t) = (q'_1(t), q'_2(t), \dots, q'_n(t))$ (*viteza generalizată*).

Mișcarea sistemului este dată de o funcție scalară $L(q, q')$, numită *lagrangean*. Conform principiului lui Hamilton, pe orice traiectorie, integrala din L ia o valoare extremă. De aici deducem că L verifică ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (82)$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Notăm cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produsul scalar uzual în $\mathbf{R}^n$ (dacă $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, atunci $\langle p, y \rangle = \sum_{j=1}^n p_j y_j$).

Funcția $H(q, p) = \sup\{\langle p, y \rangle - L(q, y); y \in \mathbf{R}^n\}$, $(p, q) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, se numește *hamiltonianul sistemului*.

Din definiția hamiltonianului avem că pentru

$$p = \frac{\partial L}{\partial y}(q, y)$$

are loc

$$H(q, p) + L(q, y) = \langle p, y \rangle. \quad (83)$$

Aici s-a notat

$$\frac{\partial G}{\partial q}(q, y) = \left(\frac{\partial G}{\partial q_1}, \frac{\partial G}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q_n} \right)$$

și

$$\frac{\partial G}{\partial y}(q, y) = \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}, \frac{\partial G}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial y_n} \right).$$

Definind *impulsul generalizat* $p = \frac{\partial L}{\partial q'}(q, q')$ și utilizând (82) și (83) rezultă că:

$$\begin{cases} p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \\ q'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)). \end{cases} \quad (84)$$

Sistemul (84) se numește *sistem hamiltonian* atașat mișcării.

Funcția H este de clasă C^1 . Hamiltonianul sistemului, H , este o integrală primă a sistemului (84) (adică, dacă $(p(t), q(t))$ este o soluție oarecare a sistemului (84), definită pe intervalul real I , atunci există o constantă reală c astfel ca $H(q(t), p(t)) = c, \forall t \in I$). Pentru prezentare pe larg a sistemelor hamiltoniene recomandăm [10].

Teoremă. Dacă $(\tilde{q}(t), \tilde{p}(t))$ este o soluție a sistemului (84), atunci ea nu este asimptotic stabilă.

Demonstrație. Vom raționa prin reducere la absurd. Presupunem că ar exista o soluție $(\tilde{q}(t), \tilde{p}(t))$ a sistemului (84) care este asimptotic stabilă. Atunci, ar rezulta că există $t_0 \geq 0$ și $\delta > 0$ astfel încât dacă $(q(t), p(t))$ este o soluție a sistemului (84) și dacă

$$\|q(t_0) - \tilde{q}(t_0)\| + \|p(t_0) - \tilde{p}(t_0)\| < \delta, \quad (85)$$

atunci

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [\|q(t) - \tilde{q}(t)\| + \|p(t) - \tilde{p}(t)\|] = 0. \quad (86)$$

Înmulțind prima ecuație din (84) cu $q'(t)$ și a doua cu $p'(t)$ și scăzându-le obținem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(q(t), p(t))) &= 0, \quad \forall t \geq t_0 \\ \iff H(q(t), p(t)) &= H(q(t_0), p(t_0)), \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Analog avem

$$H(\tilde{q}(t), \tilde{p}(t)) = H(\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Din (86) deducem că

$$H(q(t_0), p(t_0)) = H(\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0)).$$

Concluzia este că funcția H este constantă pe mulțimea

$$\{(q, p) \in \mathbf{R}^{2n}; \|q - \tilde{q}(t_0)\| + \|p - \tilde{p}(t_0)\| < \delta\}$$

(care este o vecinătate a lui $(\tilde{q}(t_0), \tilde{p}(t_0))$).

De aici rezultă că pe această vecinătate, toate derivatele de ordinul 1 ale lui H sunt nule și deci $q(t) = q(t_0)$, $p(t) = p(t_0)$, $\forall t \geq t_0$ și $\tilde{q}(t) = \tilde{q}(t_0)$, $\tilde{p}(t) = \tilde{p}(t_0)$, $\forall t \geq t_0$. Din relația (86) deducem că

$$q(t_0) = \tilde{q}(t_0), \quad p(t_0) = \tilde{p}(t_0),$$

ceea ce este absurd, deoarece $q(t_0)$ și $p(t_0)$ sunt oarecare satisfăcând condiția (85).

Astfel, rezultă concluzia teoremei.

De altfel are loc chiar un rezultat mai general (a se vedea [11]):

Teoremă. Dacă $H : \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^+$ este de clasă C^1 și satisface $H(0,0) = 0$, $H(q,p) > 0$, pentru orice $(q,p) \in \mathbf{R}^{2n} \setminus \{(0,0)\}$, atunci soluția nulă a sistemului (84) este stabilă, fără a fi asimptotic stabilă.

Demonstrația utilizează metoda funcției Liapunov.

Exerciții

1. Studiați stabilitatea soluțiilor ecuației

$$x' = -2x + t,$$

utilizând definiția.

2. Să se studieze stabilitatea soluțiilor staționare ale sistemului:

$$\begin{cases} x'_1 = \sin(x_1 + x_2) \\ x'_2 = e^{x_1} - 1. \end{cases}$$

3. Să se studieze stabilitatea soluției banale (nule) a sistemului:

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

4. Să se studieze stabilitatea soluției banale a ecuației:

$$x'' + 2(x')^2 + 2x' + x = 0.$$

5. Să se studieze stabilitatea soluțiilor staționare ale sistemului Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = x(a - y) \\ y' = -y(b - x) \end{cases}$$

$(a, b > 0)$.

6. Să se studieze stabilitatea soluției banale a sistemului

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \sin y \\ y' = -x - 2x \cos y. \end{cases}$$

Indicație. Sistemul este hamiltonian, cu

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 \cos y.$$

7. Să se studieze stabilitatea soluțiilor staționare: pentru

$$x'' + 3x' + x + x^2 = 0.$$

Studiați stabilitatea soluției nule pentru:

8.

$$\begin{cases} x' = x + \sin x + y^3 \\ y' = x^2 + \cos y - 1. \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x' = x - \sin y \\ y' = \sin x + \ln(y^2 + 1). \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} x' = x - y^2 + yz \\ y' = x^2 - \sin yz \\ z' = -y + z. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] S. Anița, *Ecuatii diferențiale ordinare*, Editura Universității “Al. I. Cuza”, Iași (2003).
- [2] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Editions Mir, Moscou (1974).
- [3] V. Barbu, *Ecuatii diferențiale*, Editura Universității “Al.I. Cuza”, Iași (1980).
- [4] V. Barbu, *Ecuatii diferențiale*, Editura Junimea, Iași (1985).
- [5] V. Barbu, *Differential Equations*, Springer, Cham (2016).
- [6] A. Corduneanu, A. L. Pletea, *Noțiuni de ecuații diferențiale*, MATRIXROM, București (1999).
- [7] J. Cronin, *Differential Equations. Introduction and Qualitative Theory*, marcel Dekker, New York (1980).
- [8] A. Filippov, *Recueil de problèmes d'équations différentielles*, Mir, Moscou (1976).
- [9] A. Haimovici, *Ecuatii diferențiale și integrale*, Editura didactică și pedagogică, București (1965).
- [10] A. Halanay, *Ecuatii diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București (1972).
- [11] D.V. Ionescu, *Ecuatii diferențiale și integrale*, Editura didactică și pedagogică, București (1972).
- [12] L.S. Pontriaghin, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley (1962).

- [13] J.C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press (2004).
- [14] I. Rus, P. Pavel, *Ecuatii diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București (1982).
- [15] I. Vrabie, *Differential Equations. An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications*, World Scientific, New Jersey (2011).