PROGRAMARE MATEMATICĂ

ÎN

SPAŢII NORMATE INFINIT DIMENSIONALE

COLECŢIA: ANALIZĂ MODERNĂ ŞI APLICAŢII

CONSTANTIN ZĂLINESCU

PROGRAMARE MATEMATICĂ ÎN SPAŢII NORMATE INFINIT DIMENSIONALE

E D I T U R A   A C A D E M I E I   R O M Â N E
Bucureşti, 1998

Mathematical Programming in
Infinite Dimensional Normed Linear Spaces

ISBN 973-27-0578-7

EDITURA ACADEMIEI ROMÂNE
R. 79717, Bucureşti, Sector 5, Str. 13 Septembrie, nr. 13

Prefaţă

Punctul de plecare pentru scrierea acestei cărţi îl constituie cursul pe care autorul îl ţine la Facultatea de Informatică de la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iaşi, sub denumirea de Cercetări operaţionale.

Prin acest curs căutăm să punem la îndemâna studenţilor şi a cercetătorilor care lucrează în teoria optimizării şi în domenii conexe, într-o prezentare riguroasă, un set de rezultate interesante în sine, dar şi utile pentru înţelegerea altor cursuri.

Din dorinţa de a-l face intrinsec (self-contained), în Capitolul 1 prezentăm noţiunile şi rezultatele de bază de topologie şi analiză funcţională, în succesiunea lor firească; dacă toate aceste rezultate ar fi demonstrate, cititorul, cu puţine excepţii, pentru înţelegerea unui rezultat ar avea nevoie numai de noţiunile şi rezultatele anterioare din text. Însă multe din rezultatele de topologie sunt date fără demonstraţii. Acele rezultate care se folosesc mai frecvent sau care nu se găsesc în prea multe tratate, totuşi, le demonstrăm: teoremele lui Cantor, Baire, Weierstrass, principiul variaţional al lui Ekeland, teoremele referitoare la funcţii semicontinue.

Având în vedere că cele mai multe rezultate referitoare la programarea matematică sunt prezentate în spaţii normate, dar mai ales faptul că în probleme de programare convexă utilizarea topologiilor slabe este deosebit de utilă, în continuarea Capitolului 1 studiem spaţiile local convexe şi spaţiile normate; toate rezultatele importante, cu excepţia teoremei lui James, sunt date cu demonstraţii. Apoi dăm trei rezultate importante din teoria spaţiilor Hilbert, care conduc, în final, la stabilirea faptului că spaţiile Hilbert sunt reflexive. De asemenea punem în evidenţă rezultatele referitoare la funcţii Gâteaux şi Fréchet diferenţiabile de care avem nevoie în secţiunile următoare; un astfel de rezultat este şi Teorema 1.10.10 care va fi utilizată în Capitolul 3 pentru obţinerea Teoremelor lui Aubin-Frankowska şi a lui Graves.

În Capitolul 2 facem un studiu detaliat al funcţiilor convexe şi al programării convexe. Stabilim astfel mai multe rezultate de dualitate, formule pentru funcţii conjugate şi ε-subdiferenţiale, precum şi condiţii de optimalitate. De asemenea, ca aplicaţii, punem în evidenţă proprietăţi ale aplicaţiilor de dualitate şi prezentăm câteva rezultate fundamentale ale analizei convexe: teoremele Brøndsted-Rockafellar, Bishop-Phelps, Rockafellar.

În Capitolul 3 punem în evidenţă condiţii necesare şi condiţii suficiente pentru probleme de programare neconvexă, însă în care funcţiile care intervin sunt funcţii Fréchet diferenţiabile de ordin I sau II. Deosebit de util pentru stabilirea condiţiilor necesare şi ale celor suficiente de extrem este conul tangent în sensul lui Bouligand. În legătură cu acesta introducem, şi studiem puţin, şi conurile tangente în sensurile Clarke şi Ursescu; în text aceste conuri au un caracter auxiliar, însă ele sunt deosebit de utile atât în teoria optimizării precum şi în alte domenii. Capitolul se încheie cu câteva aplicaţii ale principiului variaţional al lui Ekeland pentru probleme de programare neconvexă.

În continuare dăm enunţurile şi soluţiile complete a peste treizeci de exerciţii; considerăm că aceste exerciţii sunt ilustrative pentru problematica acestei cărţi.

Indexul de termeni şi rezultate este întocmit cu intenţia de a uşura lectura textului; în plus lectura acestuia dă o imagine mai completă asupra conţinutului cărţii decât chiar cuprinsul ei. La sfârşitul cărţii se găseşte şi o listă completă a notaţiilor utilizate în text.

C. Zălinescu

Cuprins

Capitolul 1

Rezultate preliminare de analiză funcţională

1.1 Spaţii topologice

În această secţiune punem în evidenţă noţiunile şi rezultatele referitoare la spaţii topologice de care vom avea nevoie în continuare. Cu puţine excepţii, rezultatele sunt date fără demonstraţii.

Fie $X \neq \emptyset$; o familie de mulţimi $\tau \subset \{Y \mid Y \subset X\} =: \mathcal{P}(X)$ se numeşte *topologie* (pe X) dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii: **T1)** $\emptyset, X \in \tau$, **T2)** $\bigcup_{i\in I} D_i \in \tau \quad \forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ şi **T3)** $D_1 \cap D_2 \in \tau \quad \forall D_1, D_2 \in \tau$. In această situaţie perechea (X, τ) se numeşte *spaţiu topologic* iar mulţimile din τ se numesc mulţimi *deschise*.

Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $x \in X$. Spunem că $V \subset X$ este *vecinătate* a lui x dacă există $D \in \tau$ astfel încât $x \in D \subset V$. Clasa tuturor vecinătăţilor lui x faţă de topologia τ se notează $\mathcal{V}_\tau(x)$ sau $\mathcal{V}(x)$, când nu există pericol de confuzie. Este evident că dacă $x \in D \in \tau$ atunci $D \in \mathcal{V}(x)$; în particular $X \in \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in X$.

Având două topologii τ şi σ pe X, spunem că τ este *mai puţin fină* decât σ, sau că σ este *mai fină* decât τ, dacă $\tau \subset \sigma$ şi notăm $\tau \preceq \sigma$; dacă $\tau \preceq \sigma$ şi $\sigma \preceq \tau$ atunci $\tau = \sigma$, adică topologiile sunt egale.

Teorema 1.1.1 *Fie τ, σ topologii pe X. Atunci*

$$\tau \preceq \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_\tau(x) \subset \mathcal{V}_\sigma(x) \quad \forall x \in X. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.1.2 *Fie (X, τ) spaţiu topologic. Familia $\{\mathcal{V}(x) \mid x \in X\}$ are urmă-toarele proprietăţi:*

V1) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \ : \ x \in V,$

V2) $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \forall W \subset X \ : \ V \subset W \ \Rightarrow \ W \in \mathcal{V}(x),$

V3) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \ : \ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x),$

V4) $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{V}(x),\ \forall y \in W \ : \ V \in \mathcal{V}(y).$ ∎

Este interesant de observat că se poate proceda şi invers, ceea ce se face de altfel frecvent. Mai exact are loc

Teorema 1.1.3 *Fie $X \neq \emptyset$. Presupunem că pentru fiecare $x \in X$ avem o familie nevidă $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ astfel că mulţimea $\{\mathcal{V}(x) \mid x \in X\}$ satisface condiţiile V1)–V4) din Teorema 1.1.2. Atunci există o unică topologie τ pe X astfel încât $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_\tau(x)$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie. Considerăm

$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{D \subset X \mid D \in \mathcal{V}(x)\ \forall x \in D\}.$$

Se verifică cu uşurinţă că τ este topologie pe X.

Fie $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$; atunci există $D \in \tau$ cu $x \in D \subset V$. Din definiţia lui τ, $D \in \mathcal{V}(x)$ şi deci $V \in \mathcal{V}(x)$. Prin urmare $\mathcal{V}_\tau(x) \subset \mathcal{V}(x)$.

Invers, fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Considerăm $D := \{y \in V \mid V \in \mathcal{V}(y)\}$. Este evident că $x \in D \subset V$. Să arătăm că $D \in \tau$. Pentru aceasta fie $y \in D$; deci $V \in \mathcal{V}(y)$. Din proprietatea V4) a vecinătăţilor, există $W \in \mathcal{V}(y)$ astfel ca pentru orice $z \in W$ să avem $V \in \mathcal{V}(z)$. Prin urmare $W \subset D$. Deoarece $W \in \mathcal{V}(y)$, avem că $D \in \mathcal{V}(y)$. Rezultă că $D \in \tau$. Unicitatea rezultă din Teorema 1.1.1. ∎

De multe ori este suficient să se lucreze numai cu o subfamilie de vecinătăţi ale lui x. Astfel, familia $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi* ale lui $x \in (X, \tau)$ dacă sunt îndeplinite condiţiile **U1)** $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}_\tau(x)$ şi **U2)** $\forall V \in \mathcal{V}_\tau(x),\ \exists U \in \mathcal{U}(x) \ : \ U \subset V$. Se observă că dacă $\mathcal{U}(x)$ este sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x atunci (exerciţiu !)

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid \ \exists U \in \mathcal{U}(x) \ : \ U \subset V\}. \tag{1.1}$$

Un exemplu de sistem fundamental de vecinătăţi ale lui $x \in (X, \tau)$ este familia $\mathcal{U}(x) = \{D \in \tau \mid x \in D\}$.

Referitor la sisteme fundamentale de vecinătăţi are loc un rezultat asemănător celui din teorema precedentă.

Teorema 1.1.4 *Fie $X \neq \emptyset$. Presupunem că pentru fiecare $x \in X$ avem o familie nevidă $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$. Atunci pentru fiecare $x \in X$, $\mathcal{U}(x)$ este un* *sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x pentru o topologie τ pe X, dacă şi numai dacă sunt îndeplinite urmă-toarele condiţii:*

VF1) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \;:\; x \in U,$

VF2) $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x),\; \exists\, U_3 \in \mathcal{U}(x) \;:\; U_3 \subset U_1 \cap U_2,$

VF3) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x),\; \exists\, V \in \mathcal{U}(x),\; \forall\, y \in V,\; \exists\, W \in \mathcal{U}(y) \;:\; W \subset U.$

În plus, topologia definită de familia $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ satisfăcând condiţiile VF1)–VF3) este unică.

Demonstraţie. Presupunem pentru început că $\mathcal{U}(x)$ este sistem fundamental de vecină-tăţi ale lui x relativ la topologia τ, oricare ar fi x. Este evident atunci că VF1) şi VF2) sunt satisfăcute. Fie $U \in \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Din V4) avem că există $\widetilde{V} \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $U \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in \widetilde{V}$. Deoarece $\widetilde{V} \in \mathcal{V}(x)$, există $V \in \mathcal{U}(x),\; V \subset \widetilde{V}$. Fie $y \in V \subset \widetilde{V}$; cum $U \in \mathcal{V}(y)$, există $W \in \mathcal{U}(y),\; W \subset U$. Deci VF3) are loc.

Invers, presupunem că $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ satisface condiţiile VF1)–VF3). Pentru fiecare $x \in X$ considerăm familia de mulţimi $\mathcal{V}(x)$ definită de relaţia (1.1). Este evident că $\{\mathcal{V}(x) \mid x \in X\}$ satisface V1), V2) şi V3) din Teorema 1.1.2. Pentru V4) procedăm în modul următor. Fie $V \in \mathcal{V}(x)$; din relaţia (1.1), există $U \in \mathcal{U}(x),\; U \subset V$. Din VF3),

$$\exists\, W \in \mathcal{U}(x),\; \forall\, y \in W,\; \exists\, \widetilde{W} \in \mathcal{U}(y) \;:\; \widetilde{W} \subset U.$$

Cum $\widetilde{W} \in \mathcal{U}(y),\; U \in \mathcal{V}(y)$ şi deci $V \in \mathcal{V}(y)$. Aplicând Teorema 1.1.3, există o unică topologie τ pe X astfel că $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in X$. Deoarece $\mathcal{V}(x)$ este determinată în mod unic de $\mathcal{U}(x)$ prin intermediul relaţiei (1.1), concluzia teoremei are loc. ▮

Se spune că (X, τ) satisface *prima axiomă a numărabilităţii* dacă fiecare element $x \in X$ are un sistem fundamental de vecinătăţi cel mult numărabil.

Spunem că spaţiul topologic (X, τ) este *separat Hausdorff* sau, simplu, *separat* dacă pentru orice două elemente distincte x şi y din X există $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel ca $U \cap V = \emptyset$. Această condiţie de separaţie este foarte importantă şi asigură, printre altele, unicitatea limitelor.

O altă noţiune topologică importantă este aceea de mulţime închisă: mulţimea $A \subset (X, \tau)$ se numeşte *închisă* dacă $X \setminus A$ este deschisă. Să notăm prin $\mathcal{F}_\tau$ familia mulţimilor închise relativ la τ.

Teorema 1.1.5 *Familia $\mathcal{F}_\tau$ a mulţimilor închise din spaţiul topologic (X, τ) are proprietă-ţile:* **F1)** $\emptyset,\; X \in \mathcal{F}_\tau$, **F2)** $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}_\tau \;\forall\, (F_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}_\tau$ *şi* **F3)** $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_\tau \;\forall\, F_1, F_2 \in \mathcal{F}_\tau$. ▮

Introducem acum alte două noţiuni topologice importante. Fie mulţimea $A \subset (X, \tau)$. Se numeşte *interiorul* mulţimii A, şi se notează $\operatorname{int} A$, mulţimea $\{x \in X \mid A \in \mathcal{V}(x)\}$; un element al mulţimii $\operatorname{int} A$ se numeşte *punct interior* mulţimii A. Se numeşte *aderenţa* sau *închiderea* mulţimii A, şi se notează $\operatorname{cl} A$ sau $\overline{A}$, mulţimea $\{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset \quad \forall V \in \mathcal{V}(x)\}$; un element al mulţimii $\operatorname{cl} A$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A.

Teorema 1.1.6 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi A, $B \subset X$. Au loc următoarele proprietăţi:* **(i)** $\operatorname{int} A = \bigcup\{D \in \tau \mid A \supset D\} \in \tau$; **(ii)** $\operatorname{int} A \subset A$; **(iii)** $A \in \tau \iff \operatorname{int} A = A$; **(iv)** $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$; **(v)** $\operatorname{int} X = X$; **(vi)** $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$; **(vii)** $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$; **(viii)** $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \operatorname{int}(A \cap B)$. ▮

Are loc un rezultat dual pentru aderenţă.

Teorema 1.1.7 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi A, $B \subset X$. Au loc următoarele:* **(i)** $\overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{F}_\tau \mid A \subset F\} \in \mathcal{F}_\tau$; **(ii)** $A \subset \overline{A}$; **(iii)** $A \in \mathcal{F}_\tau \iff \overline{A} = A$; **(iv)** $\operatorname{cl} \overline{A} = \overline{A}$; **(v)** $\overline{\emptyset} = \emptyset$; **(vi)** $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$; **(vii)** $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$; **(viii)** $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; **(ix)** $\overline{A} \cap \operatorname{int} B \subset \overline{A \cap B}$. ▮

Relaţiile dintre interior şi aderenţă sunt date în următoarea teoremă.

Teorema 1.1.8 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subset X$. Atunci*

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A, \quad \operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}. \qquad ▮$$

Mulţimea $A \subset (X, \tau)$ se numeşte *densă* dacă $\overline{A} = X$. Spunem că spaţiul topologic (X, τ) este *separabil* dacă există $A \subset X$ densă şi cel mult numărabilă.

O altă noţiune topologică importantă este aceea de frontieră. Se numeşte *frontiera* mulţimii $A \subset (X, \tau)$ mulţimea $\operatorname{Fr} A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$.

Fie acum (X, τ) un spaţiu topologic şi $\emptyset \neq X_0 \subset X$. Putem considera $\tau_{X_0} := \{D \cap X_0 \mid D \in \tau\}$. Rezultă imediat (exerciţiu !) că τ_{X_0} este topologie pe X_0, numită *urma* topologiei τ pe X_0 sau *topologia indusă* de τ pe X_0. Se observă uşor (exerciţiu !) că pentru $x \in X_0$

$$V_0 \in \mathcal{V}_{\tau_{X_0}}(x) \iff \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x) \ : \ V_0 = V \cap X_0.$$

Analog (exerciţiu !), avem că

$$F_0 \in \mathcal{F}_{\tau_{X_0}} \iff \exists F \in \mathcal{F}_\tau \ : \ F_0 = F \cap X_0.$$

Mai observăm că dacă (X, τ) este separat atunci (X_0, τ_{X_0}) este de asemenea separat.

Dacă (X_1, τ_1) şi (X_2, τ_2) sunt spaţii topologice atunci pentru fiecare (x_1, x_2) din $X_1 \times X_2$ putem considera

$$\mathcal{V}(x_1, x_2) := \{V \subset X_1 \times X_2 \mid \exists\, V_1 \in \mathcal{V}_{\tau_1}(x_1),\, V_2 \in \mathcal{V}_{\tau_2}(x_2) \ :\ V_1 \times V_2 \subset V\}.$$

Se obţine cu uşurinţă (exerciţiu !) că $\{\mathcal{V}(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\}$ satisface condiţiile din Teorema 1.1.2. Prin urmare există o unică topologie τ pe $X_1 \times X_2$, notată $\tau_1 \times \tau_2$, astfel încât $\mathcal{V}_\tau(x_1, x_2) = \mathcal{V}(x_1, x_2)$ pentru orice $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Topologia τ se numeşte *topologia produs* pe $X_1 \times X_2$ a topologiilor τ_1 şi τ_2. Remarcăm că topologia $\tau_1 \times \tau_2$ este separată dacă şi numai dacă topologiile τ_1 şi τ_2 sunt separate (exerciţiu !).

Mai general, dacă avem o familie de spaţii topologice (X_i, τ_i), $i \in I \neq \emptyset$, putem considera spaţiul

$$\begin{aligned} X &:= \prod\nolimits_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i \ \ \forall\, i \in I\} \\ &= \left\{ x : I \to \bigcup\nolimits_{i\in I} X_i \,\middle|\, x(i) = x_i \in X_i \ \ \forall\, i \in I \right\}. \end{aligned}$$

Pentru $x = (x_i) \in X$ considerăm

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) \ := \ \{V \subset X \mid\ & \exists\, J \subset I,\ J \text{ finită},\ \forall\, i \in I,\ \exists\, V_i \in \mathcal{V}_{\tau_i}(x_i) \ : \\ & \prod\nolimits_{i\in I} V_i \subset V,\ V_i = X_i \ \ \forall\, i \in I \setminus J\}. \end{aligned}$$

Se constată din nou că $\{\mathcal{V}(x) \mid x \in X\}$ satisface condiţiile din Teorema 1.1.2 şi deci există o unică topologie τ pe X, notată $\prod_{i\in I} \tau_i$, astfel încât $\mathcal{V}_\tau(x) = \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in X$. În plus, avem că (X, τ) este separat dacă şi numai dacă (X_i, τ_i) este separat pentru orice $i \in I$.

Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1.9 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\forall\, (D_i)_{i\in I} \subset \tau,\ X = \bigcup_{i\in I} D_i,\ \exists\, J \subset I,\ J$ *finită* $:\ X = \bigcup_{i\in J} D_i$*,*

(ii) $\forall\, (F_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F}_\tau,\ \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset,\ \ \exists\, J \subset I,\ J$ *finită* $:\ \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$*,*

(iii) $\forall\, (F_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F}_\tau \ :\ [\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset \ \ \forall\, J \subset I,\ J$ *finită*$]\ \Rightarrow\ \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$ ∎

O familie de mulţimi $(D_i)_{i\in I} \subset \tau$ astfel încât $A \subset \bigcup_{i\in I} D_i$ se numeşte *acoperire deschisă* pentru A. Proprietatea (i) din Teorema 1.1.9 se enunţă de obicei sub forma : din orice acoperire deschisă a lui X se poate extrage o subacoperire finită.

Spaţiul topologic (X, τ) se numeşte *compact* dacă este separat şi din orice acoperire deschisă a lui X se poate extrage o subacoperire finită.

Un rezultat deosebit de important este dat de următoarea teoremă.

Teorema 1.1.10 (Tihonov). *Fie (X_i, τ_i), $i \in I \neq \emptyset$, o familie de spaţii topologice, $X = \prod_{i\in I} X_i$ şi $\tau = \prod_{i\in I} \tau_i$. Atunci (X, τ) este compact dacă şi numai dacă (X_i, τ_i) este compact pentru orice $i \in I$.* ▮

Noţiunea de compacitate se poate extinde şi la submulţimi ale unui spaţiu topologic. Astfel mulţimea $A \subset (X, \tau)$ se numeşte *compactă* dacă (A, τ_A) este spaţiu compact. Se verifică cu uşurinţă (exerciţiu !) că dacă (X, τ) este separat, $A \subset X$ este compactă dacă şi numai dacă din orice acoperire deschisă a mulţimii A se poate extrage o subacoperire finită. În plus are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1.11 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic separat şi $A,\ B \subset X$.*

(i) *Dacă (X, τ) este compact şi A este închisă atunci A este compactă.*

(ii) *Dacă A este compactă atunci A este închisă.*

(iii) *Dacă A este compactă şi B este închisă, iar $B \subset A$, atunci B este compactă.* ▮

Fie acum (X, τ), (Y, σ) spaţii topologice şi $f : X \to Y$ o funcţie. Spunem că f este *continuă în* $a \in X$ dacă

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in U\ :\ f(x) \in V. \tag{1.2}$$

Desigur, în condiţia (1.2) $\mathcal{V}(f(a))$ şi $\mathcal{V}(a)$ pot fi înlocuite cu sisteme fundamentale de vecinătăţi $\mathcal{U}(f(a))$ şi $\mathcal{U}(a)$ ale lui $f(a)$ respectiv a.

Spunem că $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ este *continuă* (pe X) dacă f este continuă în orice punct din X. Dacă f este bijectivă şi bicontinuă (adică f şi f^{-1} sunt continue) spunem că f este un *homeomorfism*, iar spaţiile (X, τ) şi (Y, σ) se numesc *homeomorfe*.

Desigur, dacă $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ este continuă (în punctul $a \in X$) şi $g : (Y, \sigma) \to (Z, \theta)$ este continuă (în $b = f(a) \in Y$) atunci $g \circ f$ este continuă (în a).

Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1.12 *Fie $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:* **(i)** *f este continuă,* **(ii)** *$f^{-1}(D) \in \tau \quad \forall\, D \in \sigma$,* **(iii)** *$f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_\tau$ $\forall\, F \in \mathcal{F}_\sigma$,* **(iv)** *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset X$.* ▮

Un rezultat util este următorul.

Teorema 1.1.13 *Fie (X, τ), (Y, σ) spaţii topologice separate şi $f : X \to Y$ o funcţie continuă. Dacă $A \subset X$ este compactă atunci $f(A)$ este compactă.* ▮

Notăm prin $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale, iar mulţimea $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$, a numerelor reale pozitive, prin $\mathbb{R}_+$. Pe $\mathbb{R}$ considerăm acea topologie τ cu proprietatea că

$$\mathcal{V}_\tau(\lambda) = \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0 \ :]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\subset V\}$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Topologia introdusă mai înainte se numeşte *topologia uzuală* a lui $\mathbb{R}$, şi se notează prin τ_0.

Foarte mult utilizată în continuare va fi şi mulţimea $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, unde elementele distincte $-\infty$ şi $\infty := +\infty$ nu se găsesc în $\mathbb{R}$. Convenim ca $-\infty < \lambda < \infty$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Şi mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ va fi înzestrată cu topologia sa uzuală, notată tot τ_0; această topologie este definită de familia $\{\mathcal{V}(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$, unde $\mathcal{V}(x) = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid \ \exists\, \varepsilon > 0 \ :]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V\}$ pentru $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(\infty) = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} \mid \ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R} \ :]\varepsilon, \infty] \subset V\}$, iar $\mathcal{V}(-\infty)$ se defineşte în mod similar. Observăm că urma topologiei uzuale a lui $\overline{\mathbb{R}}$ pe $\mathbb{R}$ este chiar topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$.

Să observăm că funcţia $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ este continuă în a dacă şi numai dacă

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < f(a),\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in U \ : \ \lambda < f(x) \tag{1.3}$$

şi

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > f(a),\ \exists\, U \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in U \ : \ \lambda > f(x). \tag{1.4}$$

Aceste condiţii sugerează introducerea funcţiilor semicontinue. Astfel, funcţia $f : (X, \tau) \to \overline{\mathbb{R}}$ este *inferior semicontinuă în* $a \in X$, pe scurt i.s.c. în a, dacă este îndeplinită condiţia (1.3), iar f este *superior semicontinuă în* a, pe scurt s.s.c. în a, dacă este îndeplinită condiţia (1.4). Se observă că f este s.s.c. în a dacă şi numai dacă $-f$ este i.s.c. în a. Din definiţia de mai sus rezultă că dacă $f(a) = -\infty$, f este i.s.c. în a, iar dacă $f(a) = \infty$ atunci f este s.s.c. în a.

Spunem că $f : (X, \tau) \to \overline{\mathbb{R}}$ este *inferior (superior) semicontinuă*, pe scurt i.s.c. (s.s.c.), dacă f este inferior (superior) semicontinuă în fiecare punct din mulţimea X.

Uneori, pentru a pune în evidenţă faptul că f este i.s.c. (s.s.c.) în raport cu topologia τ vom scrie τ-i.s.c. (τ-s.s.c.).

Pentru $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ notăm

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} f &:= \{x \in X \mid f(x) < \infty\}, \\ \operatorname{epi} f &:= \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}, \\ \operatorname{niv}_\lambda f &:= \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}. \end{aligned}$$

Mulţimile $\operatorname{dom} f$ şi $\operatorname{epi} f$ se numesc *domeniul* şi respectiv *epigraful* funcţiei f, iar $\operatorname{niv}_\lambda f$ se numeşte *mulţimea de nivel* λ al funcţiei f. Funcţia f este *proprie* dacă $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ şi $f(x) > -\infty$ pentru orice $x \in X$. Este evident că $\operatorname{dom} f = \operatorname{Pr}_X(\operatorname{epi} f)$, unde $\operatorname{Pr}_X : X \times \mathbb{R} \to X$, $\operatorname{Pr}_X(x,t) := x$, este *proiecţia* lui $X \times \mathbb{R}$ pe X; astfel de proiecţii vor mai fi folosite în continuare.

Referitor la funcţii inferior semicontinue are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1.14 *Fie* $f : (X,\tau) \to \overline{\mathbb{R}}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este inferior semicontinuă,*

(ii) $\operatorname{niv}_\lambda f$ *este mulţime închisă pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\operatorname{epi} f$ *este mulţime închisă în* $X \times \mathbb{R}$,

(iv) $\{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \in \tau$ *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $x \notin \operatorname{niv}_\lambda f$; atunci $f(x) > \lambda$. Cum f este i.s.c. în x, există $U \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $f(y) > \lambda$ pentru orice $y \in U$. Prin urmare $U \cap \operatorname{niv}_\lambda f = \emptyset$, ceea ce arată că $x \notin \overline{\operatorname{niv}_\lambda f}$. Deci $\operatorname{niv}_\lambda f$ este închisă.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fie $(x,t) \in (X \times \mathbb{R}) \setminus \operatorname{epi} f$; deci $f(x) > t$. Există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) > \lambda > t$. Atunci $x \notin \operatorname{niv}_\lambda f$, şi deci există $U \in \mathcal{V}(x)$ cu $U \cap \operatorname{niv}_\lambda f = \emptyset$. Prin urmare $U \times]-\infty, \lambda] \cap \operatorname{epi} f = \emptyset$. Cum $U \times]-\infty, \lambda] \in \mathcal{V}(x,t)$, avem că $(x,t) \notin \overline{\operatorname{epi} f}$. Deci $\operatorname{epi} f$ este mulţime închisă.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Fie $x \in X$ şi $t \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) > t$. Atunci $(x,t) \notin \operatorname{epi} f$ şi deci există $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $(U \times]t-\varepsilon, t+\varepsilon[) \cap \operatorname{epi} f = \emptyset$. Rezultă că pentru orice $y \in U$, $(y,t) \notin \operatorname{epi} f$, adică $f(y) > t$. Prin urmare f este i.s.c. în x. Cum x este arbitrar, f este i.s.c.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) deoarece $\{x \in X \mid f(x) > \lambda\} = X \setminus \operatorname{niv}_\lambda f$ pentru $\lambda \in \mathbb{R}$. ∎

În următoarea teoremă colectăm câteva rezultate importante referitoare la operaţii cu funcţii i.s.c.

Teorema 1.1.15 *Fie* f, f_1, f_2, $f_i : (X,\tau) \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in I \neq \emptyset)$ *funcţii inferior semicontinue şi* $\alpha \in]0,\infty[$. *Atunci:* **(i)** αf *este i.s.c.,* **(ii)** $f_1 + f_2$ *este i.s.c. dacă* $f_1(x) + f_2(x)$ *are sens pentru orice* $x \in X$ *şi* **(iii)** $\sup_{i \in I} f_i$ *este i.s.c.*

Demonstraţie. (i) şi (iii) rezultă imediat din definiţie. Presupunem că $f_1(x) + f_2(x)$ are sens pentru orice $x \in X$. Fie $a \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lambda < f_1(a) + f_2(a)$. Există λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ şi $\lambda_1 < f_1(a)$, $\lambda_2 < f_2(a)$. Într-adevăr, dacă $f_2(a) = \infty$ considerăm $\lambda_1 \in]-\infty, f_1(a)[$ şi $\lambda_2 := \lambda - \lambda_1$. Dacă $f_2(a) < \infty$ atunci $\lambda - f_2(a) < f_1(a)$; în acest caz considerăm $\lambda_1 \in]\lambda - f_2(a), f_1(a)[$ şi $\lambda_2 := \lambda - \lambda_1$. Cum f_1, f_2 sunt i.s.c. în a, există V_1, $V_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca

$$\forall\, i \in \{1,2\},\ \forall\, x \in V_i \ :\ \lambda_i < f_i(x).$$

Considerând $V := V_1 \cap V_2$, avem că $\lambda < f_1(x) + f_2(x)$ pentru orice $x \in V$. Deci $f_1 + f_2$ este i.s.c. în a. Cum $a \in X$ este arbitrar, $f_1 + f_2$ este i.s.c. ∎

Un exemplu de funcţie frecvent utilizată în teoria optimizării este funcţia indicatoare a unei mulţimi. Astfel *funcţia indicatoare* a mulţimii $A \subset X$ este

$$I_A : X \to \overline{I\!R}, \qquad I_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \in A, \\ \infty & \text{dacă} \quad x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Observăm că $\operatorname{dom} I_A = A$ şi $\operatorname{epi} I_A = A \times [0, \infty[$. În plus I_A este i.s.c. dacă şi numai dacă A este închisă.

Observaţia că pentru o funcţie $f : X \to \overline{I\!R}$, $f(x) = \inf\{t \mid (x,t) \in \operatorname{epi} f\}$ pentru orice $x \in X$ (cu convenţia că $\inf \emptyset = +\infty$), sugerează următoarea construcţie. Fie $A \subset X \times I\!R$ o *mulţime de tip epigraf*, adică $(x, t_2) \in A$ dacă $(x, t_1) \in A$ şi $t_1 \le t_2 < \infty$. Pentru o astfel de mulţime A considerăm funcţia

$$\varphi_A : X \to \overline{I\!R}, \quad \varphi_A(x) := \inf\{t \mid (x,t) \in A\}.$$

Este clar că $\operatorname{dom} \varphi_A = \operatorname{Pr}_X(A)$. Observăm că dacă (X, τ) este spaţiu topologic şi $A \subset X \times I\!R$ este de tip epigraf atunci

$$A \subset \operatorname{epi} \varphi_A \subset \overline{A}. \tag{1.5}$$

Prin urmare, dacă A este închisă, φ_A este i.s.c. Se numeşte *înfăşurătoarea i.s.c.* sau *închiderea i.s.c.* a funcţiei $f : (X, \tau) \to \overline{I\!R}$ funcţia $\bar{f} := \varphi_{\overline{\operatorname{epi} f}}$.

Fie $f : A \subset (X, \tau) \to \overline{I\!R}$ o funcţie; *limita inferioară* şi *limita superioară* a funcţiei f în $a \in \bar{A}$ sunt, respectiv, numerele:

$$\liminf_{x \to a} f(x) := \sup_{U \in \mathcal{V}(a)} \inf_{x \in U \cap A} f(x), \qquad \limsup_{x \to a} f(x) := \inf_{U \in \mathcal{V}(a)} \sup_{x \in U \cap A} f(x);$$

este evident că

$$\liminf_{x \to a} f(x) \le \limsup_{x \to a} f(x) \quad \text{şi} \quad \limsup_{x \to a} f(x) = - \liminf_{x \to a} (-f)(x).$$

În plus, dacă $a \in A$ atunci $\liminf_{x \to a} f(x) \le f(a) \le \limsup_{x \to a} f(x)$.

Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1.16 *Fie $f, g : (X, \tau) \to \overline{I\!R}$ şi $x \in X$. Atunci:*

(i) $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$, *şi deci* $\bar{f} \le f$;

(ii) $\bar{f} = \sup\{g : X \to \overline{I\!R} \mid g \le f,\ g \ \text{ i.s.c.}\}$;

(iii) $\bar{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$;

(iv) $f(x) = \bar{f}(x) \ \Leftrightarrow \ f$ *este i.s.c. îx.*

Demonstraţie. (i) Din relaţia (1.5) avem că

$$\overline{\operatorname{epi} f} \subset \operatorname{epi} \bar{f} \subset \operatorname{cl}\left(\overline{\operatorname{epi} f}\right) = \overline{\operatorname{epi} f}.$$

Prin urmare $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$ şi $\bar{f} \leq f$.

(ii) Fie $\tilde{f} := \sup\{g : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid g \leq f,\ g \text{ i.s.c.}\}$. Din Teorema 1.1.14 avem că $\bar{f}$ este i.s.c., iar din (i) avem că $\bar{f} \leq f$. Prin urmare $\bar{f} \leq \tilde{f}$. Din Teorema 1.1.15 (iii) avem că $\tilde{f}$ este i.s.c., iar din construcţie $\tilde{f} \leq f$. Rezultă că $\tilde{f} \leq \bar{f}$, şi deci $\bar{f} = \tilde{f}$.

(iii) Fie $x \in X$ fixat şi $\lambda := \liminf_{y \to x} f(y)$; să arătăm că $\bar{f}(x) = \lambda$. Fie $t \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x, t) \in \overline{\operatorname{epi} f}$ şi $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci pentru $\varepsilon > 0$, $V \times]-\infty, t + \varepsilon[\in \mathcal{V}(x, t)$, şi deci există $(x', t') \in \operatorname{epi} f \cap V \times]-\infty, t + \varepsilon[$. Deci $\inf_{y \in V} f(y) \leq f(x') \leq t' < t + \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, $\inf_{y \in V} f(y) \leq t$, şi deci $\lambda \leq t$. Prin urmare $\lambda \leq \bar{f}(x)$. Dacă nu există $t \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x, t) \in \operatorname{epi} \bar{f}$, atunci $\bar{f}(x) = \infty$, şi deci inegalitatea de mai sus are loc. Dacă $\bar{f}(x) = -\infty$, din cele de mai sus avem că $\lambda = \bar{f}(x)$. Presupunem deci că $\bar{f}(x) > -\infty$ şi fie $t \in \mathbb{R},\ t < \bar{f}(x)$. Atunci $(x, t) \notin \operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$. Prin urmare există $V_0 \in \mathcal{V}(x)$ şi $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca $\operatorname{epi} f \cap V_0 \times]t - \varepsilon_0, t + \varepsilon_0[= \emptyset$. Deci $f(y) \geq t + \varepsilon_0$ pentru orice $y \in V_0$, de unde $\lambda \geq \inf_{y \in V_0} f(y) \geq t + \varepsilon_0 > t$. Prin urmare $\bar{f}(x) \leq \lambda$. Am obţinut astfel că $\lambda = \bar{f}(x)$.

(iv) Fie $x \in X$. Ştim deja că $\bar{f}(x) \leq f(x)$. Presupunem că f este i.s.c. în x şi fie $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < f(x)$. Atunci există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $\lambda < f(y)$ pentru orice $y \in V$. Din (iii) avem că $\bar{f}(x) \geq \inf_{y \in V} f(y) \geq \lambda$. Prin urmare $f(x) \leq \bar{f}(x)$, şi deci $\bar{f}(x) = f(x)$. Presupunem acum că $\bar{f}(x) = f(x)$ şi fie $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < f(x)$. Din (iii) avem că există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $\lambda < \inf_{y \in V} f(y)$, adică $f(y) > \lambda$ pentru orice $y \in V$. Prin urmare f este i.s.c. în x. ∎

În cele ce urmează $\mathbb{N}$ notează mulţimea numerelor naturale, iar $\mathbb{N}^*$ mulţimea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ a numerelor naturale strict pozitive.

Fie (X, τ) spaţiu topologic; spunem că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ este *convergent* dacă

$$\exists\, x \in X,\ \forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ \exists\, n_V \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_V \ :\ x_n \in V. \tag{1.6}$$

Desigur, în condiţia (1.6) se poate înlocui $\mathcal{V}(x)$ cu un sistem fundamental de vecinătăţi $\mathcal{U}(x)$ ale lui x.

Elementul x din condiţia (1.6) se numeşte *limită* a şirului (x_n) şi se notează $(x_n) \to x$, sau, mai simplu, $x_n \to x$. Să observăm că dacă (X, τ) este separat, iar şirul $(x_n) \subset X$ este convergent, atunci limita sa este unică; în acest caz mai notăm şi $x = \lim x_n$. Rezultă imediat că dacă $(x_n) \subset A \subset (X, \tau)$ şi $x_n \to x$ atunci $x \in \overline{A}$ (exerciţiu !).

Să observăm că $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$, dacă f este i.s.c. în x şi $x_n \to x$, unde pentru $(\lambda_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} \lambda_m$.

Existenţa soluţiilor problemelor de optimizare este obţinută, în mod obişnuit, utilizând următorul rezultat.

Teorema 1.1.17 (Weierstrass). *Fie (X,τ) un spaţiu topologic compact şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie inferior semicontinuă. Atunci există $\bar{x} \in X$ astfel încât $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in X$. În plus, dacă f este proprie, f este mărginită inferior şi îşi atinge minimul.*

Demonstraţie. Dacă f nu-i proprie concluzia este evidentă. Fie deci f proprie şi $\bar\lambda := \inf\{f(x) \mid x \in X\}$. Dacă există $\bar{x} \in X$ astfel ca $f(\bar{x}) = \bar\lambda$ atunci $\bar\lambda \in \mathbb{R}$ şi concluzia are loc. Presupunem deci că $f(x) > \bar\lambda$ pentru orice $x \in X$. Atunci $X = \bigcup_{\lambda>\bar\lambda} D_\lambda$, unde $D_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$. Deoarece f este i.s.c., D_λ este deschisă pentru orice $\lambda \in]\bar\lambda,\infty[$. Cum X este compact, există $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in]\bar\lambda,\infty[$ astfel ca $X = \bigcup_{i=1}^n D_{\lambda_i}$. Putem presupune că $\lambda_1 = \min\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Atunci $X = D_{\lambda_1}$ şi deci $f(x) > \lambda_1 > \bar\lambda$ pentru orice x, contrazicând alegerea lui $\bar\lambda$. ∎

1.2 Spaţii metrice

Un exemplu important de spaţiu topologic este acela de spaţiu metric. În această secţiune, pe lângă definiţiile spaţiului metric şi câteva noţiuni uzuale, punem în evidenţă câteva rezultate deosebit de importante.

Fie $X \neq \emptyset$; aplicaţia $d : X\times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *metrică* sau *distanţă* dacă **M1)** $\forall\, x,\, y \in X \ :\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, **M2)** $\forall\, x,\, y \in X \ :\ d(x,y) = d(y,x)$, **M3)** $\forall\, x,\, y,\, z \in X \ :\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Perechea (X,d) se numeşte *spaţiu metric*. Definim $B(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$, numită *sferă deschisă* de centru $x \in X$ şi rază $\varepsilon > 0$, şi $\mathcal{U}(x) := \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$. Se verifică cu uşurinţă că $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ satisface condiţiile din Teorema 1.1.4 (exerciţiu !). Prin urmare există o topologie unică τ_d pe X astfel încât $\mathcal{U}(x)$ este sistem fundamental de vecinătăţi pentru x, oricare ar fi $x \in X$. De fiecare dată când avem un spaţiu metric (X,d), considerăm pe X topologia τ_d obţinută mai sus. Să observăm că orice spaţiu metric este separat (exerciţiu !). Pentru un element $x \in (X,d)$ există mai multe sisteme fundamentale de vecinătăţi; pe lângă cel indicat mai sus iată încă două exemple :

$$\mathcal{U}_1(x) = \left\{B(x,\tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \mathcal{U}_2(x) = \{D(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\},$$

unde $D(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(y,x) \leq \varepsilon\}$. Prin urmare orice spaţiu metric satisface prima axiomă a numărabilităţii. Remarcăm că $B(x,\varepsilon)$ este mulţime deschisă, iar $D(x,\varepsilon)$ este mulţime închisă, pentru orice $x \in (X,d)$ şi $\varepsilon > 0$.

Un exemplu deosebit de important de spaţiu metric este $\mathbb{R}$ cu metrica $d(x,y) = |x-y|$, numită *metrica uzuală*; topologia determinată de metrica uzuală pe $\mathbb{R}$ este tocmai topologia uzuală descrisă în secţiunea precedentă. În mod asemănător, pe $\mathbb{R}^k,\ k \in \mathbb{N}^*$, considerăm metrica

$$d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_k-y_k)^2};$$

topologia determinată de această metrică o notăm tot prin τ_0. În spaţii metrice mai avem şi următoarea noţiune. Şirul $(x_n) \subset (X,d)$ se numeşte *fundamental* sau *Cauchy* dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geq n_\varepsilon\ :\ d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Observăm că dacă şirul $(x_n) \subset (X,d)$ este convergent atunci (x_n) este şir fundamental. Reciproca nu este în general adevărată. Reamintim că un şir de forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, cu $(n_k) \subset \mathbb{N}$ şir strict crescător, se numeşte *subşir* al şirului (x_n). Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.2.1 *Fie $(x_n) \subset (X,d)$ şir fundamental. Dacă (x_n) are un subşir convergent la $x \in X$ atunci $x_n \to x$.* ∎

Spaţiul metric (X,d) se numeşte *complet* dacă orice şir fundamental este convergent. Uneori este utilă următoarea caracterizare a spaţiilor metrice complete.

Teorema 1.2.2 *Fie (X,d) spaţiu metric. Următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *(X,d) este spaţiu metric complet,*

(ii) *$\forall (x_n) \subset X$ astfel ca $\sum_{n\geq 0} d(x_n,x_{n+1}) < \infty\ :\ (x_n)$ este convergent.*

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $(x_n) \subset X$ un şir cu proprietatea că seria $\sum_{n\geq 0} d(x_n,x_{n+1})$ este convergentă. Deoarece pentru $n,\ m \in \mathbb{N},\ n < m$, are loc inegalitatea

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m),$$

utilizând Teorema lui Cauchy de caracterizare a convergenţei unei serii, obţinem imediat că şirul (x_n) este şir Cauchy, şi deci este convergent.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $(x_n) \subset X$ şir Cauchy. Atunci

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists m_k \in \mathbb{N},\ \forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n,m \geq m_k\ :\ d(x_n,x_m) < 2^{-k}.$$

Considerăm $n_0 := m_0,\ n_1 := \max\{n_0+1, m_1\},\ \ldots,\ n_{k+1} := \max\{n_k+1, m_{k+1}\}, \ldots$; este clar că şirul $(n_k) \subset \mathbb{N}$ este strict crescător şi $n_k \geq m_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$, ceea ce implică faptul că seria $\sum_{k\geq 0} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})$ este convergentă. Din ipoteză rezultă că şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent, iar din teorema precedentă rezultă că şirul (x_n) este convergent. ∎

Pentru a stabili o altă caracterizare utilă a spaţiilor metrice complete avem nevoie de următoarea noţiune. Fie $A \subset (X,d)$; se numeşte *diametrul* mulţimii A elementul $\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} \in \overline{\mathbb{R}}$; avem că $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$ (exerciţiu !). Spunem că A este *mărginită* dacă $\operatorname{diam} A < \infty$. Observăm că A este mărginită dacă şi numai dacă A este conţinută într-o sferă.

Teorema 1.2.3 (Cantor). *Spaţiul metric (X,d) este complet dacă şi numai dacă orice şir descrescător de mulţimi închise şi nevide din X, cu diametrul tinzând la 0, are intersecţia nevidă.*

Demonstraţie. Presupunem pentru început că (X,d) este spaţiu metric complet şi fie $(F_n) \subset \mathcal{P}(X)$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq F_{n+1} \subset F_n = \overline{F_n}$ şi $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ considerăm $x_n \in F_n$. Atunci pentru $n,\ m \geq p,\ x_n,\ x_m \in F_p$, şi deci $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_p$. Prin urmare (x_n) este şir fundamental. Deoarece (X,d) este complet, există $x \in X$ astfel ca $x_n \to x$. Cum $x_n \in F_p$ pentru $n \geq p$ şi $x_n \to x$, rezultă că $x \in \overline{F_p} = F_p$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$, şi deci $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p \neq \emptyset$.

Demonstrăm implicaţia inversă. Fie deci $(x_n) \subset X$ un şir Cauchy; considerăm $F_n := \overline{A_n}$, unde $A_n := \{x_m \mid m \geq n\}$. Este evident că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq F_{n+1} \subset F_n = \overline{F_n}$. Deoarece (x_n) este şir Cauchy, $\operatorname{diam} F_n = \operatorname{diam} A_n \to 0$. Deci există $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Cum $x \in F_n$, avem că $d(x_n, x) \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$, ceea ce arată că $x_n \to x$. ∎

Un rezultat interesant este următorul.

Teorema 1.2.4 (Baire). *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi (D_n) un şir de mulţimi deschise şi dense din X. Atunci $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ este densă în X.*

Demonstraţie. A arăta că $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ este densă revine la a arăta că $D \cap A \neq \emptyset$ pentru orice $D \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Fie deci D mulţime deschisă şi nevidă. Cum $\overline{D_1} = X$, există $x_1 \in D \cap D_1$, şi deci există $r_1 \in]0,1]$ astfel ca $D(x_1, r_1) \subset D \cap D_1$. Cum $\overline{D_2} = X$, avem că există $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap D_2$, şi deci există $r_2 \in]0, 1/2]$ astfel încât $D(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap D_2$. Continuând în acest mod, găsim şirurile $(x_n) \subset X$ şi $(r_n) \subset]0, \infty[,\ r_n \to 0$, astfel încât $D(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap D_{n+1}$ pentru orice $n \geq 1$. Luând $F_n := D(x_n, r_n)$, avem că şirul (F_n) este un şir descrescător de mulţimi închise, nevide, cu

$\operatorname{diam} F_n \to 0$. Din teorema lui Cantor rezultă existenţa unui $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Cum $F_n \subset D_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = A$ şi $x \in F_1 \subset D$, ceea ce arată că $D \cap A \neq \emptyset$. ∎

O consecinţă a acestui rezultat, cu profunde implicaţii în cele ce urmează, este următoarea teoremă.

Teorema 1.2.5 (Baire). *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi (F_n) un şir de mulţimi închise din X. Dacă $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ pentru orice n. Atunci $D_n := X \setminus F_n$ este deschisă şi $\overline{D_n} = X \setminus \operatorname{int} F_n = X$. Aplicând teorema precedentă, obţinem că $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = X \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \emptyset$ este densă în X, absurd. ∎

Un alt rezultat, stabilit relativ recent, cu importante aplicaţii, este "principiul variaţional al lui Ekeland".

Teorema 1.2.6 (Ekeland). *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, inferior semicontinuă şi mărginită inferior. Atunci pentru orice $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$ astfel ca*

$$f(x_\varepsilon) \ \leq\ f(x_0) - \varepsilon d(x_0, x_\varepsilon),$$

şi

$$f(x_\varepsilon) \ <\ f(x) + \varepsilon d(x_\varepsilon, x) \quad \forall\, x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon > 0$ daţi. Pentru fiecare $x \in X$ considerăm mulţimea $F(x) := \{y \in X \mid f(y) + \varepsilon d(x,y) \leq f(x)\}$. Avem că $x \in F(x) \subset \operatorname{dom} f$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$ şi $F(x) = X$ pentru $x \in X \setminus \operatorname{dom} f$. Mai observăm că pentru $y \in F(x)$, $F(y) \subset F(x)$. Relaţia este evidentă pentru $x \notin \operatorname{dom} f$. Fie deci $x \in \operatorname{dom} f$, $y \in F(x)$ şi $z \in F(y)$. Atunci

$$f(z) + \varepsilon d(y,z) \leq f(y),\ f(y) + \varepsilon d(x,y) \leq f(x),\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Înmulţind ultima relaţie cu ε şi apoi sumând cele trei relaţii, rezultă că $f(z) + \varepsilon d(x,z) \leq f(x)$, adică $z \in F(x)$. Pentru fiecare $x \in X$ considerăm

$$g(x) := \inf\{f(y) \mid y \in F(x)\} \in \mathbb{R}$$

(f fiind mărginită inferior). Obţinem că pentru $x \in \operatorname{dom} f$ şi $y \in F(x)$, avem

$$\varepsilon d(x,y) \leq f(x) - f(y) \leq f(x) - g(x). \tag{1.7}$$

Construim un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ în modul următor: există $x_1 \in F(x_0)$ astfel ca $f(x_1) < g(x_0) + 2^{-1}$; prin recurenţă, avându-l pe x_n, există $x_{n+1} \in F(x_n)$ astfel ca $f(x_{n+1}) < g(x_n) + 2^{-n-1}$. Cum $x_{n+1} \in F(x_n)$, $F(x_{n+1}) \subset F(x_n)$, şi deci $g(x_{n+1}) \geq g(x_n)$. Din (1.7) obţinem că

$$\varepsilon d(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - g(x_n) \leq f(x_n) - g(x_{n-1}) < 2^{-n}.$$

Prin urmare seria $\sum_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1})$ este convergentă, şi deci, utilizând Teorema 1.2.2, există $x_\varepsilon \in X$ astfel ca $x_n \to x_\varepsilon$. Cum $x_n \in F(x_m)$ pentru orice $n \geq m$, avem că $f(x_n) \leq f(x_m) - \varepsilon d(x_m, x_n)$. Ţinând seama de faptul că f este i.s.c. în x_ε, prin trecere la limită, obţinem că $x_\varepsilon \in F(x_m)$, şi deci $F(x_\varepsilon) \subset F(x_m)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$. În particular $x_\varepsilon \in F(x_0)$, adică x_ε satisface prima relaţie din concluzie. Fie acum $\tilde{x} \in F(x_\varepsilon)$; prin urmare $\tilde{x} \in F(x_n)$ pentru orice n. Din (1.7) avem că

$$\varepsilon d(x_n, \tilde{x}) \leq f(x_n) - f(\tilde{x}) \leq f(x_n) - g(x_n) \leq f(x_n) - g(x_{n-1}) < 2^{-n},$$

şi deci $d(x_\varepsilon, \tilde{x}) = 0$, adică $\tilde{x} = x_\varepsilon$. Prin urmare $F(x_\varepsilon) = \{x_\varepsilon\}$, ceea ce arată că şi a doua relaţie din concluzia teoremei are loc. ∎

1.3 Teorema Hahn-Banach şi teoreme de separare algebrică

În acest paragraf X este un spaţiu liniar real. Pentru simplificarea scrierii, pentru $x, y \in X$, vom folosi notaţiile: $[x,y] := \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1]\}$, $[x,y[:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1[\}$, $]x,y[:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in]0,1[\}$, numite *segment închis*, *semiînchis* respectiv *deschis* de extremităţi x şi y.

Dacă $\emptyset \neq A$, $B \subset X$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\emptyset \neq \Gamma \subset \mathbb{R}$, atunci

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad \Gamma \cdot A := \{\gamma a \mid \gamma \in \Gamma,\ a \in A\},$$

iar $x + A := \{x\} + A$ şi $\lambda A := \{\lambda\} \cdot A$; considerăm că $A + \emptyset = \emptyset$ şi $\lambda\emptyset = \emptyset$.

Mulţimea nevidă $A \subset X$ se numeşte *convexă* dacă $[x,y] \subset A$ pentru orice $x, y \in A$; A este *con* dacă $[0,\infty[\cdot A \subset A$; A este *(varietate) afină* dacă $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ pentru orice $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$; A este *echilibrată* dacă $\lambda x \in A$ pentru orice $x \in A$, $\lambda \in [-1,1]$; A este *simetrică* dacă $A = -A$. Considerăm că mulţimea vidă este convexă. Este uşor de dovedit că

$$\begin{aligned} A \text{ este afină } &\Leftrightarrow \quad \exists\, a \in X,\ \exists\, X_0 \subset X \text{ subspaţiu liniar } : A = a + X_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, a \in A\ (\ \exists\, a \in A)\ :\ A - a \text{ este subspaţiu liniar.} \end{aligned}$$

Să observăm că dacă $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ este o familie de mulţimi afine (convexe, echilibrate, conuri) atunci $\bigcap_{i\in I} A_i$ este afină (convexă, echilibrată, con) (exerciţiu !); folosim convenţia $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = X$. Având în vedere cele de mai sus putem introduce noţiunile de înfăşurătoare afină, convexă, echilibrată şi conică a unei mulţimi. Astfel *înfăşurătoarea afină* a mulţimii $A \subset X$ este

$$\operatorname{aff} A := \bigcap \{V \mid A \subset V \subset X,\ V \text{ afină}\},$$

înfăşurătoarea convexă este

$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{C \mid A \subset C \subset X,\ C \text{ convexă}\},$$

înfăşurătoarea conică este

$$\operatorname{con} A := \bigcap \{C \mid A \subset C \subset X,\ C \text{ con}\},$$

iar *înfăşurătoarea echilibrată* este

$$\operatorname{ech} A := \bigcap \{E \mid A \subset E \subset X,\ E \text{ echilibrată}\}.$$

Desigur, *înfăşurătoarea liniară* a mulţimii A este

$$\operatorname{lin} A := \bigcap \{Y \mid A \subset Y \subset X,\ Y \text{ subspaţiu liniar}\}.$$

Se poate dovedi cu uşurinţă (exerciţiu !) că

$$\begin{aligned}
\operatorname{aff} A &= \left\{ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*,\ (\lambda_i) \subset \mathbb{R},\ (x_i) \subset A,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},\\
\operatorname{conv} A &= \left\{ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*,\ (\lambda_i) \subset [0,\infty[,\ (x_i) \subset A,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\},\\
\operatorname{con} A &= \{\lambda x \mid \lambda \geq 0,\ x \in A\} = [0,\infty[\cdot A,\\
\operatorname{ech} A &= \{\lambda x \mid \lambda \in [-1,1],\ x \in A\} = [-1,1]\cdot A.
\end{aligned}$$

Un rezultat deosebit de interesant este formulat în teorema următoare.

Teorema 1.3.1 (Carathéodory). *Fie X spaţiu liniar de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \subset X$ o mulţime nevidă. Atunci*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \,\middle|\, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n+1} \subset [0,\infty[,\ (x_i)_{1\leq i\leq n+1} \subset A, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}. \blacksquare$$

Punem în evidenţă câteva proprietăţi ale înfăşurătorilor afină şi convexă. Pentru A, $B \subset X$ mulţimi nevide, $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ avem: **1)** $\mathrm{aff}\,(A+B) = \mathrm{aff}\,A + \mathrm{aff}\,B$; **2)** $\mathrm{aff}\,(x+A) = x + \mathrm{aff}\,A$; **3)** $\mathrm{aff}\,A = a + \mathrm{aff}\,(A-A)$ pentru orice $a \in A$; **4)** $\mathrm{aff}\,A = \mathrm{lin}\,A$ dacă $0 \in A$; **5)** $\mathrm{aff}\,(A-A) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda(A-A)$ dacă A este convexă; **6)** $\mathrm{aff}\,(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{aff}\,A$; **7)** $\mathrm{conv}\,(A+B) = \mathrm{conv}\,A + \mathrm{conv}\,B$; **8)** $\mathrm{conv}\,(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{conv}\,A$; **9)** $\mathrm{conv}\,(\mathrm{con}\,A) = \mathrm{con}\,(\mathrm{conv}\,A)$ (exerciţiu !).

Fie $M \subset X$ un subspaţiu liniar şi $A \subset X$ o mulţime nevidă; *interiorul algebric* al mulţimii A *relativ* la M este

$$\mathrm{aint}\,_M A := \{a \in X \mid \ \forall\, x \in M,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, \lambda \in [0,\delta]\ :\ a + \lambda x \in A\}.$$

Este clar că $\mathrm{aint}\,_M A \subset A$, iar dacă $\mathrm{aint}\,_M A \neq \emptyset$ atunci $M \subset \mathrm{aff}\,(A-A)$.

Distingem două cazuri importante: 1) $M = X$; în acest caz notăm $\mathrm{aint}\,_M A$ prin $\mathrm{aint}\,A$ şi se numeşte *interiorul algebric* al mulţimii A, 2) $M = \mathrm{aff}\,(A-A)$; în acest caz $\mathrm{aint}\,_M A$ se notează $\mathrm{raint}\,A$ şi se numeşte *interiorul algebric relativ* al mulţimii A. Prin urmare $a \in \mathrm{aint}\,A$ dacă şi numai dacă $\mathrm{aff}\,A = X$ şi $a \in \mathrm{raint}\,A$ (exerciţiu !).

În cazul în care mulţimea A este convexă avem (exerciţiu !) :

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{aint}\,A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X,\ \exists\, \lambda > 0\ :\ a + \lambda x \in A, \\ a \in \mathrm{raint}\,A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A,\ \exists\, \lambda > 0\ :\ (1+\lambda)a - \lambda x \in A. \end{aligned}$$

Dacă X, Y sunt spaţii liniare reale, prin $L(X,Y)$ notăm spaţiul liniar real al operatorilor liniari de la X la Y. Cazul în care $Y = \mathbb{R}$ ocupă un loc aparte. Spaţiul $L(X,\mathbb{R})$ îl notăm prin X' şi se numeşte *dualul algebric* al lui X; un element din X' se numeşte *funcţională liniară*.

În analiza funcţională următoarele tipuri de funcţii sunt foarte importante. Aplicaţia $p : X \to \mathbb{R}$ este *subliniară* dacă **1)** $p(x+y) \le p(x) + p(y)\ \ \forall\, x,\, y \in X$ şi **2)** $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \ \forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,\infty[$; p este *seminormă* dacă satisface condiţiile **1)** şi **2')** $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\ \ \forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Funcţia $p : X \to \mathbb{R}$ este *normă* dacă satisface **1), 2')** şi **3)** $p(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$; în acest caz, în mod obişnuit, $p(x)$ se notează prin $\|x\|$ şi se numeşte norma lui x.

Observăm că dacă p este seminormă atunci $p(x) \ge 0$ pentru orice $x \in X$. Într-adevăr, în acest caz avem $0 \le p(0) = p(x + (-x)) \le p(x) + p(-x) = 2p(x)$.

Dacă $p_1, \ldots, p_n$ sunt funcţionale subliniare (seminorme) atunci $p_1 + \cdots + p_n$ şi $\max\{p_1, \ldots, p_n\}$ sunt de asemenea funcţionale subliniare (seminorme).

Un exemplu important de aplicaţie subliniară este dat în continuare. Fie $A \subset X$ *absorbantă*, adică $0 \in \mathrm{aint}\,A$; aplicaţia

$$p_A : X \to \mathbb{R}, \quad p_A(x) := \inf\{\lambda \ge 0 \mid x \in \lambda A\}$$

se numeşte *funcţionala Minkowski* asociată mulţimii A.

Teorema 1.3.2 *Fie $A \subset X$ o mulţime convexă şi absorbantă. Atunci p_A este subliniară şi*

$$\operatorname{aint} A = \{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \mid p_A(x) \le 1\}.$$

În plus, dacă A este simetrică, p_A este seminormă.

Demonstraţie. Fie $\Lambda(x) := \{\lambda \ge 0 \mid x \in \lambda A\}$ pentru fiecare $x \in X$. Deoarece A este absorbantă, $\Lambda(x) \ne \emptyset$ pentru orice $x \in X$ şi $\Lambda(0) = [0, \infty[$, iar pentru că A este convexă, $\Lambda(x)$ este un interval nemărginit la dreapta. Într-adevăr, pentru $x \ne 0$, $\lambda \in \Lambda(x)$ şi $\mu > \lambda$ avem că $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda}x \in A$, $\frac{\lambda}{\mu} \in]0,1[$ şi deci $\frac{1}{\mu}x = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{\lambda}x + (1-\frac{\lambda}{\mu})\cdot 0 \in A$, adică $\mu \in \Lambda(x)$. Este clar că $p_A(x) = \inf \Lambda(x)$. Cum $\Lambda(tx) = t\Lambda(x)$ pentru $t > 0$ şi $x \in X$, avem că $p_A(tx) = tp_A(x)$ pentru $t > 0$, egalitatea fiind evidentă pentru $t = 0$.

Fie acum $x, y \in X$ astfel ca $0 \le p_A(x) < \lambda$, $0 \le p_A(y) < \mu$. Avem că $\lambda \in \Lambda(x)$, $\mu \in \Lambda(y)$, şi deci $x + y \in \lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$. Prin urmare $p_A(x + y) \le \lambda + \mu$. Luând $\lambda = p_A(x) + 1/n$ şi $\mu = p_A(y) + 1/n$, apoi, trecând la limită, obţinem că $p_A(x + y) \le p_A(x) + p_A(y)$, şi deci p_A este subliniară. Este evident că

$$\{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \mid p_A(x) \le 1\}.$$

Fie $p_A(a) < 1$; arătăm că $a \in \operatorname{aint} A$. Fie $x \in X$; pentru $\lambda := \frac{1-p_A(a)}{1+p_A(x)} > 0$ avem

$$p_A(a + \lambda x) \le p_A(a) + \lambda p_A(x) = p_A(a) + (1 - p_A(a))\frac{p_A(x)}{1 + p_A(x)} < 1.$$

Deci $a + \lambda x \in A$, de unde rezultă că $a \in \operatorname{aint} A$.

Fie $a \in \operatorname{aint} A$; pentru $x = a$ există $\lambda > 0$ astfel ca $a + \lambda a = (1 + \lambda)a \in A$, şi deci $p_A(a) \le (1 + \lambda)^{-1} < 1$. Prin urmare $\operatorname{aint} A = \{x \in X \mid p_A(x) < 1\}$.

Dacă A este simetrică este evident că $\Lambda(x) = \Lambda(-x)$ pentru orice x; rezultă că p_A este seminormă. ∎

În condiţiile Teoremei 1.3.2 avem că $[0, x[\subset \operatorname{aint} A$ pentru orice $x \in A$. Cum $a \in \operatorname{aint} A \iff A - a$ este absorbantă, dacă A este convexă atunci $\operatorname{aint} A$ este convexă şi $[a, x[\subset \operatorname{aint} A$ pentru orice $a \in \operatorname{aint} A$ şi $x \in A$. Acelaşi rezultat este valabil şi pentru interiorul algebric relativ, adică, dacă A este convexă atunci $\operatorname{raint} A$ este convexă şi $[a, x[\subset \operatorname{raint} A$ pentru orice $a \in \operatorname{raint} A$ şi $x \in A$.

Interiorul algebric mai are şi următoarele proprietăţi. Fie $A, B \subset X$ mulţimi nevide, $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; atunci: **1)** $\operatorname{raint}(x + A) = x + \operatorname{raint} A$;

2) $\operatorname{raint}(\lambda A) = \lambda \cdot \operatorname{raint} A$; **3)** $A + \operatorname{aint} B \subset \operatorname{aint}(A+B)$; **4)** dacă $\operatorname{aint} B = B$, $A + \operatorname{aint} B = \operatorname{aint}(A+B)$; **5)** $\operatorname{raint} A + \operatorname{raint} B \subset \operatorname{raint}(A+B)$; **6)** dacă A, B sunt convexe, $\operatorname{raint} A \neq \emptyset$ şi $\operatorname{raint} B \neq \emptyset$, $\operatorname{raint}(A+B) = \operatorname{raint} A + \operatorname{raint} B$; **7)** $\operatorname{raint} A \neq \emptyset$ dacă $\dim X < \infty$ şi A este convexă.

Un rezultat fundamental al analizei funcţionale este teorema Hahn-Banach.

Teorema 1.3.3 (Hahn-Banach). *Fie X spaţiu liniar real, X_0 un subspaţiu liniar al lui X, $p : X \to \mathbb{R}$ o funcţională subliniară şi $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară. Dacă $\varphi_0(x) \leq p(x)$ pentru orice $x \in X_0$ atunci există $\varphi : X \to \mathbb{R}$ o funcţională liniară astfel ca $\varphi|_{X_0} = \varphi_0$ şi $\varphi(x) \leq p(x)$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie. Facem demonstraţia în două etape: a) φ_0 se prelungeşte la $X_0 + \mathbb{R}x$, unde $x \in X \setminus X_0$, prin păstrarea majorării cu p şi b) aplicând lema lui Zorn, φ_0 se prelungeşte la întreg spaţiul X prin păstrarea majorării cu p.

a) Fie $x \notin X_0$ şi $X_1 := X_0 + \mathbb{R}x$. Fiecare $y \in X_1$ se scrie în mod unic sub forma $y = u + \lambda x$ cu $u \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fie $u, v \in X_0$, $\lambda, \mu > 0$. Avem că

$$\begin{aligned}
\lambda\varphi_0(v) + \mu\varphi_0(u) &= \varphi_0(\lambda v + \mu u) \leq p(\lambda v + \mu u) \\
&\leq p(\lambda v - \lambda\mu x) + p(\mu u + \mu\lambda x) \\
&\leq \lambda p(v - \mu x) + \mu p(u + \lambda x).
\end{aligned}$$

Deci

$$[\varphi_0(v) - p(v - \mu x)]/\mu \leq [p(u + \lambda x) - \varphi_0(u)]/\lambda \quad \forall\, \lambda, \mu > 0,\ \forall\, u, v \in X_0,$$

ceea ce arată că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$[\varphi_0(v) - p(v - \mu x)]/\mu \leq \alpha \leq [p(u + \lambda x) - \varphi_0(u)]/\lambda \quad \forall\, \lambda, \mu > 0,\ \forall\, u, v \in X_0.$$

Considerăm

$$\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(y) := \varphi_0(u) + \lambda\alpha,$$

unde $y = u + \lambda x$, $u \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Este evident că φ_1 este liniară şi $\varphi_1|_{X_0} = \varphi_0$. În plus, dacă $\lambda > 0$ atunci

$$\varphi_1(u + \lambda x) = \varphi_0(u) + \lambda\alpha \leq \varphi_0(u) + \lambda \cdot [p(u + \lambda x) - \varphi_0(u)]/\lambda = p(u + \lambda x),$$

iar dacă $\lambda < 0$ atunci (luând $\mu = -\lambda > 0$ şi $v = u$)

$$\varphi_1(u + \lambda x) = \varphi_0(u) + \lambda\alpha \leq \varphi_0(u) + \lambda \cdot [\varphi_0(v) - p(v - \mu x)]/\mu = p(u + \lambda x).$$

Deci $\varphi_1(y) \le p(y)$ pentru orice $y \in X_1$.

b) Fie

$$\mathcal{F} := \{(\varphi, Y) \mid X_0 \subset Y \subset X,\ Y = \operatorname{lin} Y,\ \varphi : Y \to \mathbb{R} \text{ liniară}, \\ \varphi|_{X_0} = \varphi_0,\ \varphi(y) \le p(y)\ \ \forall\, y \in Y\}.$$

Pentru (φ, Y), $(\psi, Z) \in \mathcal{F}$ spunem că $(\varphi, Y) \preceq (\psi, Z)$ dacă $Y \subset Z$ şi $\psi|_Y = \varphi$. Este evident că $(\mathcal{F}, \preceq)$ este o mulţime ordonată. Fie $L = \{(\varphi_i, Y_i) \mid i \in I\} \subset \mathcal{F}$ un lanţ ($I \ne \emptyset$). Considerăm $Y := \bigcup_{i\in I} Y_i$ şi $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) := \varphi_i(y)$ pentru $y \in Y_i$. Rezultă uşor că Y este spaţiu liniar (deoarece L este lanţ) şi φ este bine definită şi liniară. În plus $\varphi|_{Y_i} = \varphi_i$ şi $\varphi(y) \le p(y)$ pentru orice $y \in Y$. Prin urmare $(\varphi, Y) \in \mathcal{F}$ şi $(\varphi_i, Y_i) \preceq (\varphi, Y)$ pentru orice $i \in I$. Am obţinut astfel că L este majorat în $\mathcal{F}$. Din lemma lui Zorn rezultă că $\mathcal{F}$ are elemente maximale. Fie (φ, Y) un element maximal al lui $\mathcal{F}$. Presupunem că $Y \ne X$; atunci există $x \in X \setminus Y$. Din etapa a), aplicată pentru φ, Y şi x, obţinem o funcţională liniară $\psi : Z := Y + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ astfel ca $\psi|_Y = \varphi$ şi $\psi(z) \le p(z)$ pentru orice $z \in Z$. Deoarece $(\varphi, Y) \in \mathcal{F}$, $\psi|_{X_0} = \varphi_0$, şi deci $(\psi, Z) \in \mathcal{F}$. În plus $(\varphi, Y) \preceq (\psi, Z)$; (φ, Y) fiind element maximal în $\mathcal{F}$, avem că $(\varphi, Y) = (\psi, Z)$. Prin urmare obţinem contradicţia $x \in Z = Y$. Rezultă că $X = Y$, ceea ce arată că φ este funcţionala căutată. ∎

O consecinţă importantă a teoremei Hahn-Banach este următoarea teoremă de separare.

Teorema 1.3.4 (separare algebrică). *Fie $A \subset X$ o mulţime convexă cu* $\operatorname{raint} A \ne \emptyset$ *şi* $x_0 \in X \setminus \operatorname{raint} A$. *Atunci există o funcţională liniară* $\varphi : X \to \mathbb{R}$, *neconstantă pe* $A \cup \{x_0\}$, *astfel încât*

$$\varphi(x) \le \varphi(x_0) \quad \forall\, x \in A. \tag{1.8}$$

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că 0 este în $\operatorname{raint} A$ (în caz contrar se face o translaţie).

Pentru început considerăm cazul în care $\operatorname{aff} A = X$ ($= \operatorname{lin} A$). În această situaţie A este convexă şi absorbantă. Din Teorema 1.3.2 rezultă că funcţionala Minkowski p_A este subliniară; în plus, cum $x_0 \notin \operatorname{aint} A = \operatorname{raint} A$, $p_A(x_0) \ge 1$. Considerăm $\varphi_0 : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(\lambda x_0) := \lambda p_A(x_0)$. Este evident că φ_0 este liniară pe $X_0 := \mathbb{R}x_0$ şi $\varphi_0(x) \le p_A(x)$ pentru orice $x \in X_0$. Aplicând teorema Hahn-Banach obţinem o funcţională liniară $\varphi : X \to \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi(x_0) = p_A(x_0)$ şi $\varphi(x) \le p_A(x)$ pentru orice $x \in X$. În particular, pentru $x \in A$ avem

$$\varphi(x) \le p_A(x) \le 1 \le p_A(x_0) = \varphi(x_0).$$

Este evident că φ nu-i constantă pe $A \cup \{x_0\}$ ($\varphi(0) = 0,\ \varphi(x_0) \geq 1$).

Fie acum $\operatorname{aff} A \neq X$. Desprindem două subcazuri: a) $x_0 \in \operatorname{aff} A =: X_0$ şi b) $x_0 \notin X_0$. În cazul a) obţinem, ca mai sus, înlocuind X cu X_0, o funcţională liniară $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, neconstantă pe $A \cup \{x_0\}$, astfel încât $\varphi_0(x) \leq \varphi_0(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Luând o prelungire liniară φ a lui φ_0 la întreg spaţiul se obţine funcţionala dorită. În cazul b) considerăm $X_1 := X_0 + \mathbb{R}x_0$ şi $\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x + \lambda x_0) := \lambda$ pentru $x \in X_0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Atunci $\varphi_1(x) = 0$ pentru $x \in A$ şi $\varphi_1(x_0) = 1$. Luând o prelungire liniară a lui φ_1 la întreg spaţiul se obţine funcţionala căutată. ▮

Condiţia (1.8) de separare poate fi exprimată şi într-un alt mod. Fie $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Considerăm mulţimile

$$H_{\varphi,\alpha} := \{x \in X \mid \varphi(x) = \alpha\}, \qquad H^{<}_{\varphi,\alpha} := \{x \in X \mid \varphi(x) < \alpha\}$$

şi

$$H^{\leq}_{\varphi,\alpha} := \{x \in X \mid \varphi(x) \leq \alpha\},$$

numite respectiv *hiperplan*, *semispaţiu deschis* şi *semispaţiu închis*. În mod analog se definesc $H^{>}_{\varphi,\alpha}$ $(= H^{<}_{-\varphi,-\alpha})$ şi $H^{\geq}_{\varphi,\alpha}$ $(= H^{\leq}_{-\varphi,-\alpha})$. Toate aceste mulţimi sunt convexe, nevide şi $\operatorname{aint} H^{\leq}_{\varphi,\alpha} = H^{<}_{\varphi,\alpha}$.

Teorema 1.3.4 afirmă că există $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $A \subset H^{\leq}_{\varphi,\alpha}$ şi $x_0 \in H_{\varphi,\alpha}$ (sau $x_0 \in H^{\geq}_{\varphi,\alpha}$); în această situaţie spunem că $H_{\varphi,\alpha}$ *separă* A şi x_0. În cazul în care $x_0 \in A$ şi $H_{\varphi,\alpha}$ separă A şi x_0 spunem că $H_{\varphi,\alpha}$ este *hiperplan suport* sau *de sprijin* pentru A în x_0; x_0 se numeşte *punct suport* sau *de sprijin*, iar φ se numeşte *funcţională suport* sau *de sprijin*. Prin urmare $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ este funcţională suport dacă φ îşi atinge supremul pe A. În general, $H_{\varphi,\alpha}$, $\varphi \neq 0$, este hiperplan de sprijin pentru A dacă $A \subset H^{\leq}_{\varphi,\alpha}$ (sau $A \subset H^{\geq}_{\varphi,\alpha}$) şi $A \cap H_{\varphi,\alpha} \neq \emptyset$.

În practică apare, în mod obişnuit, problema separării a două mulţimi. În acest sens are loc următorul rezultat.

Teorema 1.3.5 *Fie* A, $B \subset X$ *două mulţimi convexe şi nevide. Presupunem că* **a)** $\operatorname{aint} A \neq \emptyset$ *şi* $B \cap \operatorname{aint} A = \emptyset$ *sau* **b)** $\operatorname{raint} A \neq \emptyset$, $\operatorname{raint} B \neq \emptyset$ *şi* $\operatorname{raint} A \cap \operatorname{raint} B = \emptyset$. *Atunci există* $\varphi \in X'$, φ *neconstantă pe* $A \cup B$, *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\varphi(x) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \varphi(y) \quad \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B \quad (\ \Leftrightarrow\ \sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B)\,). \tag{1.9}$$

Demonstraţie. a) Fie $C := \operatorname{aint} A - B$; C este convexă, $\operatorname{aint} C = C \neq \emptyset$ şi $0 \notin \operatorname{aint} C$. Din teorema precedentă rezultă că există $\varphi \in X'$, φ neconstantă pe $C \cup \{0\}$, şi deci pe $A \cup B$, astfel ca

$$\varphi(x) \ \leq \ \varphi(0) \ = \ 0 \quad \forall\, x \in \operatorname{aint} A \,-\, B.$$

Prin urmare $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ pentru $x \in \operatorname{aint} A,\ y \in B$, şi deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\varphi(x) \ \leq\ \alpha\ \leq\ \varphi(y) \qquad \forall\, x \in \operatorname{aint} A,\ \forall\, y \in B.$$

Fie $a \in \operatorname{aint} A$ fixat. După cum am observat imediat după Teorema 1.3.2, pentru orice $x \in A$ avem că $[a, x[\subset \operatorname{aint} A$. Din inegalitatea de mai sus obţinem că

$$\varphi(\lambda a + (1-\lambda)x) \ =\ \lambda\varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(x)\ \leq\ \alpha \quad \forall\, x \in A,\ \ \forall\, \lambda \in]0,1[.$$

Făcând $\lambda \to 0$, obţinem că φ satisface concluzia teoremei.

b) Considerăm $C := A - B$; atunci $\operatorname{raint} C = \operatorname{raint} A - \operatorname{raint} B \neq \emptyset$ şi $0 \notin \operatorname{raint} C$. Aplicând teorema precedentă, ca în cazul a), obţinem existenţa lui φ satisfăcând condiţiile cerute. ∎

Să observăm că în cazul a) din teorema de mai sus condiţia că φ nu-i constantă pe $A \cup B$ este echivalentă cu condiţia că φ este nenulă.

Teorema 1.3.5 afirmă că există $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $A \subset H^{\leq}_{\varphi,\alpha}$ şi $B \subset H^{\geq}_{\varphi,\alpha}$. În această situaţie spunem că hiperplanul $H_{\varphi,\alpha}$ *separă* mulţimile A şi B; separarea este chiar *proprie* deoarece $A \cap H^{<}_{\varphi,\alpha} \neq \emptyset$ sau $B \cap H^{>}_{\varphi,\alpha} \neq \emptyset$.

După cum se ştie, mulţimea $\ker\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$, unde $\varphi \in X'$, se numeşte *nucleul* lui φ; este evident că $\ker\varphi = H_{\varphi,0}$. Rezultatul următor, foarte util în cele ce urmează, se întâlneşte sub denumirea de "teorema nucleelor".

Teorema 1.3.6 (a nucleelor). *Fie $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$. Atunci*

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{n} \ker\varphi_i \subset \ker\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ :\ \varphi = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i.$$

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Demonstraţia necesităţii o facem prin inducţie după $n \geq 1$. Propoziţia $P(n)$ afirmă că pentru orice spaţiu liniar Y şi pentru orice funcţionale liniare $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in Y'$

$$\bigcap\nolimits_{i=1}^{n} \ker\psi_i \subset \ker\psi \quad \Rightarrow \quad \exists\, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}\ :\ \psi = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mu_i\psi_i.$$

$P(1)$ *este adevărată.* Într-adevăr, fie $\psi,\ \psi_1 \in Y'$, $\ker\psi_1 \subset \ker\psi$. Dacă $\ker\psi = Y$ atunci $\psi = 0 = 0 \cdot \psi_1$. Presupunem deci că $\ker\psi \neq Y$; atunci există $y_0 \in Y$ cu $\psi(y_0) \neq 0$. Din ipoteză avem că $\psi_1(y_0) \neq 0$. Fie $y \in Y$; avem că $y - \frac{\psi_1(y)}{\psi_1(y_0)} y_0 \in \ker\psi_1 \subset \ker\psi$, şi deci $\psi(y) = \frac{\psi(y_0)}{\psi_1(y_0)}\psi_1(y)$. Luând $\mu_1 = \frac{\psi(y_0)}{\psi_1(y_0)}$, avem că $\psi = \mu_1\psi_1$.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Presupunem că propoziţia $P(n)$ este adevărată ($n \geq 1$ fixat) şi fie $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n+1} \in Y'$ astfel ca $\bigcap_{i=1}^{n} \ker\psi_i \subset \ker\psi$. Considerăm $Y_0 := \ker\psi_{n+1}$, $\psi_i^0 := \psi_i|_{Y_0}$, $1 \leq i \leq n$, şi $\psi^0 := \psi|_{Y_0}$. Este clar că $\psi^0, \psi_1^0, \ldots, \psi_n^0 \in Y_0'$ şi $\bigcap_{i=1}^n \ker \psi_i^0 \subset \ker \psi^0$ ($\ker \psi^0 = \ker \psi \cap Y_0$!). Aplicând $P(n)$ pentru $\psi^0, \psi_1^0, \ldots, \psi_n^0$ şi Y_0, există $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $\psi^0 = \sum_{i=1}^n \mu_i \psi_i^0$. Fie $\chi := \psi - \sum_{i=1}^n \mu_i \psi_i \in Y'$. Observăm că $\ker \psi_{n+1} = Y_0 \subset \ker \chi$. Din prima parte ($n = 1$) rezultă că există $\mu_{n+1} \in \mathbb{R}$ astfel ca $\chi = \mu_{n+1}\psi_{n+1}$ şi deci $\psi = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \psi_i$. Deci $P(n+1)$ este adevărată. Demonstraţia este terminată. ∎

În Capitolul 3 va apare frecvent condiţia ca un operator liniar să fie surjectiv. Ca aplicaţie a teoremei precedente dăm o caracterizare a operatorilor liniari şi surjectivi cu valori în spaţii finit dimensionale.

Teorema 1.3.7 *Fie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$, şi operatorul $T : X \to \mathbb{R}^n$ definit prin $Tx := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Operatorul T este surjectiv dacă şi numai dacă familia $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este liniar independentă.*

Demonstraţie. Reamintim că $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este *familie liniar independentă* dacă

$$\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \;:\; \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Să presupunem pentru început că T este surjectiv şi fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$. Cum T este surjectiv, există $\bar{x} \in X$ astfel ca $\varphi_i(\bar{x}) = \lambda_i$ pentru $1 \le i \le n$. Avem astfel că

$$0 = \lambda_1\varphi_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(\bar{x}) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2,$$

şi deci $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, adică $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este liniar independentă. Dovedim implicaţia inversă prin inducţie după n. Prin ipoteză, $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este liniar independentă. Considerăm $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Fie $n = 1$; rezultă imediat că $\varphi_1 \ne 0$, şi deci există $\bar{x} \in X$ astfel ca $\varphi_1(\bar{x}) \ne 0$. Considerând $x := \frac{y_1}{\varphi_1(\bar{x})} \cdot \bar{x}$, avem că $\varphi_1(x) = y_1$, şi deci $Tx = y$. Prin urmare T este surjectiv în acest caz.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n-1$ ($n \ge 2$) şi să arătăm că este adevărată şi pentru n. Deoarece $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este liniar independentă, familia $(\varphi_i)_{1 \le i \le n-1}$ este şi ea liniar independentă. Din ipoteza inductivă avem că operatorul $\widetilde{T} : X \to \mathbb{R}^{n-1}$, definit prin $\widetilde{T}x := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$, este surjectiv. Deci există $\tilde{x} \in X$ astfel ca $\varphi_i(\tilde{x}) = y_i$ pentru $1 \le i \le n-1$. Deoarece $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ este liniar independentă, din teorema precedentă avem că $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker \varphi_i \not\subset \ker \varphi_n$. Deci există $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker \varphi_i$ astfel ca $\bar{x} \notin \ker \varphi_n$. Luând

$$\lambda := (y_n - \varphi_n(\tilde{x}))/\varphi_n(\bar{x}),\; x := \tilde{x} + \lambda\bar{x},$$

avem că $\varphi_i(x) = y_i$ pentru $1 \le i \le n$, adică $Tx = y$. Deci T este surjectiv. ∎

1.4 Spaţii local convexe

În acest paragraf X este un spaţiu liniar real iar $\mathcal{P}$ este o familie nevidă de seminorme pe X.

Pentru $x \in X,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $\varepsilon > 0$ definim

$$V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon) := \{y \in X \mid p_i(y - x) < \varepsilon \ \ \forall i,\ 1 \le i \le n\}.$$

Este evident că

$$V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon) = x + V(0; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon). \tag{1.10}$$

Pentru fiecare element $x \in X$ considerăm familia de mulţimi

$$\mathcal{U}(x) := \{V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon) \mid n \in \mathbb{N}^*,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0\}.$$

Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.4.1 *Există o topologie unică $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$ pe X astfel ca $\mathcal{U}(x)$ să fie sistem fundamental de vecinătăţi pentru x, oricare ar fi $x \in X$. În plus aplicaţiile $(x, y) \mapsto x + y$ şi $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sunt continue de la $(X \times X, \tau \times \tau)$, respectiv $(\mathbb{R} \times X, \tau_0 \times \tau)$, în (X, τ).*

Demonstraţie. Familia $\{\mathcal{U}(x) \mid x \in X\}$ satisface condiţiile VF1)–VF3) ale Teoremei 1.1.4. Acest fapt rezultă, respectiv, din următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} x &\in V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon), \\ V(x; p_1, \ldots, p_{n+m}&; \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) \\ &\subset V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon_1) \cap V(x; p_{n+1}, \ldots, p_{n+m}; \varepsilon_2), \\ V(y; p_1, \ldots, p_n; \delta) &\subset V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon), \end{aligned}$$

unde $y \in V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon)$ şi $\delta := \varepsilon - \max\{p_i(y - x) \mid 1 \le i \le n\}$; desigur, în relaţiile de mai sus n, $m \in \mathbb{N}^*$, ε, ε_1, $\varepsilon_2 \in]0, \infty[$ şi $p_1, \ldots, p_{n+m} \in \mathcal{P}$.

Utilizând teorema mai sus menţionată, există o unică topologie $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$ pe X cu proprietatea că $\mathcal{U}(x)$ este sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x pentru fiecare $x \in X$. Continuitatea aplicaţiei

$$(X \times X, \tau \times \tau) \ni (x, y) \mapsto x + y \in (X, \tau)$$

este o consecinţă imediată a relaţiei

$$V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon/2) + V(y; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon/2) = V(x + y; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon),$$

iar continuitatea aplicaţiei $(\mathbb{R}\times X, \tau_0\times\tau) \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in (X, \tau)$ rezultă uşor din relaţia

$$]\lambda-\delta, \lambda+\delta[\cdot V(x; p_1, \ldots, p_n; \delta) \subset V(\lambda x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon),$$

unde $\delta := \min\{1, \varepsilon/(1+|\lambda| + \max\{p_i(x) \mid 1 \le i \le n\})\}$; desigur, $\varepsilon > 0$. ∎

Să observăm că putem înlocui familia $\mathcal{P}$ de seminorme cu

$$\mathcal{P}' := \{\max\{p_1, \ldots, p_n\} \mid n \in \mathbb{N}^*,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}\},$$

fără ca familia $\mathcal{U}(x)$ $(x \in X)$ să se schimbe. În plus $\mathcal{P}'$ are proprietatea că pentru orice p_1, p_2 $\in \mathcal{P}'$ există $p_3 \in \mathcal{P}'$ astfel ca $p_1 \le p_3,\ p_2 \le p_3$, adică $\mathcal{P}'$ este *dirijată* . Astfel $V \in \mathcal{V}(x)$ dacă şi numai dacă există $p' \in \mathcal{P}'$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca $V(x; p'; \varepsilon) \subset V$. Având în vedere această discuţie, în cele ce urmează vom presupune (în general) că familia de seminorme $\mathcal{P}$ este dirijată (în caz contrar poate fi înlocuită cu o familie dirijată care să inducă aceeaşi topologie).

Consecinţa 1.4.1 *Considerăm $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi aplicaţiile*

$$T_a,\ O_\lambda : (X, \tau_{\mathcal{P}}) \to (X, \tau_{\mathcal{P}}), \quad T_a(x) = a + x,\ O_\lambda(x) = \lambda x.$$

Atunci T_a şi O_λ sunt homeomorfisme. ∎

O topologie τ pe spaţiul liniar X se numeşte *liniară* dacă aplicaţiile $(x, y) \mapsto x + y$ şi $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ definite în teorema precedentă sunt continue. O topologie liniară pe X faţă de care originea (şi deci fiecare punct din X) are un sistem fundamental de vecinătăţi convexe se numeşte *local convexă*, iar spaţiul X se numeşte *local convex*. Teorema 1.4.1 ne arată că dacă $\mathcal{P}$ este o familie de seminorme pe X atunci X este un spaţiu local convex, notat $(X, \mathcal{P})$. De fiecare dată când avem un spaţiu local convex $(X, \mathcal{P})$, considerăm pe X topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ dată de Teorema 1.4.1.

Relaţia (1.10) arată că topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ este perfect determinată de familia $\mathcal{U} := \mathcal{U}(0)$. Această clasă de mulţimi are proprietăţile :

LC1) $\forall U \in \mathcal{U} : U$ este convexă, absorbantă şi echilibrată,

LC2) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U},\ \exists U_3 \in \mathcal{U} \ :\ U_3 \subset U_1 \cap U_2$,

LC3) $\forall U \in \mathcal{U},\ \exists V \in \mathcal{U} \ :\ V + V \subset U.$

Proprietăţile LC2) şi LC3) le are şi familia $\mathcal{V} := \mathcal{V}(0)$, dar nu şi proprietatea LC1), însă orice mulţime din $\mathcal{V}$ este absorbantă.

Se poate dovedi că dacă o familie nevidă $\mathcal{U}$ de părţi ale unui spaţiu liniar real are proprietăţile LC1)–LC3) de mai sus atunci există o familie de seminorme $\mathcal{P}$ pe X astfel ca $\mathcal{U}$ să fie sistem fundamental de vecinătăţi ale lui 0 faţă de topologia $\tau_{\mathcal{P}}$. De fapt $\mathcal{P} = \{p_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, unde p_U este funcţionala Minkowski asociată mulţimii U [din LC2) avem că această familie de seminorme este dirijată !].

În spaţii local convexe are loc o formulă simplă pentru aderenţa unei mulţimi.

Teorema 1.4.2 *Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ şi $\mathcal{U}_0$ un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui* 0. *Atunci*

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} (A + U). \tag{1.11}$$

Demonstraţie. Este clar că formula (1.11) are loc pentru $A = \emptyset$. Fie deci $A \neq \emptyset$. Demonstrăm mai întâi formula pentru $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}$, sistemul tuturor vecinătăţilor lui 0. Fie $x \in \overline{A}$ şi $V \in \mathcal{V}$. Atunci $-V \in \mathcal{V}$, şi deci $x - V \in \mathcal{V}(x)$. Prin urmare $A \cap (x - V) \neq \emptyset$ ($\Leftrightarrow$ $x \in A + V$). Deci $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V)$.

Invers, dacă x aparţine acestei mulţimi şi $U \in \mathcal{V}(x)$, atunci $V := x - U \in \mathcal{V}$. Rezultă că $x \in A + V$ ($\Leftrightarrow$ $(x - V) \cap A \neq \emptyset$), adică $U \cap A \neq \emptyset$. Prin urmare $x \in \overline{A}$.

În cazul general, deoarece $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{V}$, $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{U}_0} (A + V)$. Însă pentru orice $V \in \mathcal{V}$ există $U \in \mathcal{U}_0$ astfel ca $U \subset V$, ceea ce arată că are loc şi incluziunea inversă. ∎

Mulţimile convexe dintr-un spaţiu local convex au proprietăţi deosebite şi din punct de vedere topologic.

Teorema 1.4.3 *Fie $C \subset (X, \mathcal{P})$ ($\mathcal{P}$ dirijată) o mulţime convexă şi nevidă.*

- **(i)** *$\overline{C}$ este mulţime convexă;*
- **(ii)** *dacă $a \in \operatorname{int} C$ şi $x \in \overline{C}$ atunci $[a, x[\subset \operatorname{int} C$;*
- **(iii)** *$\operatorname{int} C$ este mulţime convexă;*
- **(iv)** *dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ atunci $\overline{\operatorname{int} C} = \overline{C}$ şi $\operatorname{int} \overline{C} = \operatorname{int} C$;*
- **(v)** *dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ atunci $\operatorname{aint} C = \operatorname{int} C$.*

Demonstraţie. (i) Luăm $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ în formula (1.11). Cum suma a două mulţimi convexe este convexă, obţinem că $\overline{C}$ este convexă.

(ii) Fie $a \in \operatorname{int} C$, $x \in \overline{C}$ şi $\lambda \in]0, 1[$; arătăm că $a_\lambda := (1 - \lambda)a + \lambda x \in \operatorname{int} C$. Există $\varepsilon > 0$ şi $p \in \mathcal{P}$ astfel ca $V(a; p; \varepsilon) \subset C$. Luăm $\delta := \frac{1-\lambda}{\lambda} \varepsilon > 0$. Deoarece $x \in \overline{C}$, există $x' \in C \cap V(x; p; \delta)$. Avem că $V' := V(a'_\lambda; p; (1 - \lambda)\varepsilon) \subset C$, unde $a'_\lambda := (1 - \lambda)a + \lambda x'$. Într-adevăr, dacă $y \in V'$ atunci

$$y = a'_\lambda + (1 - \lambda)u = (1 - \lambda)(a + u) + \lambda x',$$

cu $p(u) < \varepsilon$; deci $a + u \in V \subset C$. Deoarece C este convexă avem că $y \in C$. Însă

$$p(a_\lambda - a'_\lambda) = \lambda p(x - x') < \lambda\delta = (1-\lambda)\varepsilon,$$

şi deci

$$V(a_\lambda; p; (1-\lambda)\varepsilon - p(a_\lambda - a'_\lambda)) \subset V(a'_\lambda; p; (1-\lambda)\varepsilon) = V' \subset C.$$

Deci $\alpha_\lambda \in \operatorname{int} C$.

(iii) Fie a, $b \in \operatorname{int} C$. Cum $b \in \overline{C}$, din (ii) rezultă că $[a, b[\subset \operatorname{int} C$, şi deci $[a, b] \subset \operatorname{int} C$. Prin urmare $\operatorname{int} C$ este mulţime convexă.

(iv) Fie $a_0 \in \operatorname{int} C$ fixat. Din proprietăţile aderenţei şi interiorului avem că $\overline{\operatorname{int} C} \subset \overline{C}$ şi $\operatorname{int} C \subset \operatorname{int} \overline{C}$. Fie $x \in \overline{C}$. Din (ii) avem că $\frac{1}{n}a_0 + (1 - \frac{1}{n})x \in \operatorname{int} C$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită obţinem că $x \in \overline{\operatorname{int} C}$; deci avem şi $\overline{C} \subset \overline{\operatorname{int} C}$. Fie $x \in \operatorname{int} \overline{C}$. Datorită continuităţii aplicaţiei

$$\chi : \mathbb{R} \to X, \quad \chi(\lambda) := (1-\lambda)a_0 + \lambda x,$$

în 1, cum $\chi(1) \in \operatorname{int} \overline{C}$, există $\lambda_0 > 1$ astfel $\chi(\lambda_0) =: x_0 \in \overline{C}$. Prin urmare, din (ii) avem că $x = (1 - \frac{1}{\lambda_0})a_0 + \frac{1}{\lambda_0}x_0 \in \operatorname{int} C$. Avem astfel că $\operatorname{int} \overline{C} \subset \operatorname{int} C$, ceea ce completează demonstraţia.

(v) Cum orice vecinătate a originii într-un spaţiu local convex este absorbantă, avem întotdeauna că $\operatorname{int} A \subset \operatorname{aint} A$. Fie deci $a_0 \in \operatorname{int} C$ ($\neq \emptyset$!). Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $a_0 = 0$ (înlocuim eventual C cu $C - a_0$). Fie $x \in \operatorname{aint} C$; din Teorema 1.3.2 avem că $p_C(x) < 1$. Prin urmare există $\lambda_0 > 1$ astfel ca $p_C(\lambda_0 x) < 1$, adică $x_0 := \lambda_0 x \in C$. Atunci, din (ii), $x = \frac{1}{\lambda_0}x_0 \in [0, x_0[\subset \operatorname{int} C$. Demonstraţia este completă. ∎

Următorul rezultat se referă la continuitatea funcţionalelor subliniare.

Teorema 1.4.4 *Fie $(X, \mathcal{P})$ spaţiu local convex, cu $\mathcal{P}$ dirijată, şi $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţională subliniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este continuă;*

(ii) *f este continuă în origine;*

(iii) $\exists \lambda > 0 \ : \ \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ *este vecinătate a originii;*

(iv) $\exists M > 0,\ \exists p \in \mathcal{P},\ \forall x \in X \ : \ f(x) \leq M \cdot p(x)$;

(v) $\exists M > 0,\ \exists p \in \mathcal{P},\ \forall x, y \in X \ : \ |f(x) - f(y)| \leq M \cdot p(x - y)$.

Demonstraţie. Este evident că (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) şi (v) $\Rightarrow$ (i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Fie $\lambda > 0$ cu $\{x \mid f(x) \leq \lambda\} \in \mathcal{V}(0)$. Atunci există $\varepsilon > 0$, $p \in \mathcal{P}$ astfel ca $V(0; p; \varepsilon) \subset \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$. Fie $x \in X$ astfel ca $p(x) > 0$. Atunci

$p\left(\frac{\varepsilon}{2p(x)}x\right) = \varepsilon/2 < \varepsilon$, şi deci $f\left(\frac{\varepsilon}{2p(x)}x\right) = \frac{\varepsilon}{2p(x)}f(x) \leq \lambda$. Luând $M := 2\lambda/\varepsilon$, obţinem că $f(x) \leq M \cdot p(x)$. Dacă $p(x) = 0$, atunci $p(tx) = 0$ pentru orice $t > 0$, de unde rezultă că $f(x) \leq 0 = M \cdot p(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Avem că $f(x) = f(x - y + y) \leq f(x - y) + f(y)$, şi deci $f(x) - f(y) \leq f(x - y) \leq M \cdot p(x - y)$. Schimbând x cu y, obţinem că $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot p(x - y)$ pentru orice $x, y \in X$. ∎

Printre altele, acest rezultat ne arată că o funcţională subliniară este continuă dacă şi numai dacă este *lipschitziană* (condiţia (v)), şi toate seminormele din $\mathcal{P}$ sunt continue în raport cu topologia $\tau_{\mathcal{P}}$.

Consecinţa 1.4.2 *Fie $U \subset (X, \mathcal{P})$ o vecinătate convexă a originii. Atunci funcţionala Minkowski p_U asociată vecinătăţii U este continuă şi*

$$\operatorname{int} U = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}, \quad \overline{U} = \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}. \tag{1.12}$$

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că $0 \in \operatorname{int} U \subset \operatorname{aint} U$, şi deci, din Teorema 1.3.2 şi Teorema 1.4.3, avem că $\operatorname{int} U = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\}$. Tot din Teorema 1.3.2 obţinem că $U \subset \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}$. Chiar această relaţie, împreună cu teorema precedentă, ne asigură că p_U este continuă, şi deci $\overline{U} \subset \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}$. Pentru a dovedi incluziunea inversă fie $x \in X$, $p_U(x) \leq 1$. Atunci $p_U\left(\frac{n}{n+1}x\right) < 1$ şi deci $\frac{n}{n+1}x \in \operatorname{int} U \subset U$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Trecând la limită, obţinem că $x \in \overline{U}$. ∎

Pe un spaţiu liniar X putem să avem mai multe topologii local convexe. Se pune problema, de multe ori, de a compara acele topologii. O consecinţă a teoremei precedente este şi următorul rezultat.

Teorema 1.4.5 *Fie $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$ două familii nevide şi dirijate de seminorme pe X. Atunci*

$$\tau_{\mathcal{Q}} \preceq \tau_{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; \forall\, q \in \mathcal{Q},\ \exists\, M > 0,\ \exists\, p \in \mathcal{P} \;:\; q \leq M \cdot p,$$

adică orice seminormă din $\mathcal{Q}$ este $\tau_{\mathcal{P}}$–continuă.

Demonstraţie. Conform Teoremei 1.1.1, ţinând seama şi de faptul că într-o topologie liniară $\mathcal{V}(x) = \{x + V \mid V \in \mathcal{V}(0)\}$, avem că

$$\tau_{\mathcal{Q}} \preceq \tau_{\mathcal{P}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{V}_{\mathcal{Q}}(x) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{P}}(x) \;\; \forall\, x \in X \;\Leftrightarrow\; \mathcal{V}_{\mathcal{Q}}(0) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{P}}(0).$$

Concluzia rezultă imediat utilizând teorema precedentă. ∎

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a continuităţii unui operator liniar.

Teorema 1.4.6 *Fie* $(X, \mathcal{P})$, $(Y, \mathcal{Q})$, *cu* $\mathcal{P}$ *şi* $\mathcal{Q}$ *dirijate, două spaţii local convexe şi* $T \in L(X, Y)$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) T *este continuu;*

(ii) T *este continuu în origine;*

(iii) $\forall\, q \in \mathcal{Q} \ : \ q \circ T$ *este continuu;*

(iv) $\forall\, q \in \mathcal{Q},\ \exists\, p \in \mathcal{P},\ \exists\, M > 0 \ : \ q \circ T \leq M \cdot p;$

(v) $\forall\, q \in \mathcal{Q},\ \exists\, p \in \mathcal{P},\ \exists\, M > 0,\ \forall\, x, y \in X \ :$

$$|q(T(x)) - q(T(y))| \leq M \cdot p(x - y).$$

Demonstraţie. Este evident că (i) $\Rightarrow$ (ii), iar (ii) $\Rightarrow$ (iii) deoarece q este $\tau_{\mathcal{Q}}$–continuă şi T este continuu în origine.

Echivalenţa condiţiilor (iii), (iv) şi (v) rezultă din Teorema 1.4.4.

(v) $\Rightarrow$ (i) Fie $x \in X$ fixat şi $V \in \mathcal{V}(Tx)$. Atunci există $q \in Q$, $\varepsilon > 0$ astfel ca $V(Tx; q; \varepsilon) \subset V$. Prin ipoteză, există $M > 0$, $p \in \mathcal{P}$ astfel ca $|q(T(y)) - q(T(x))| \leq M \cdot p(y - x)$ pentru orice $y \in X$. Obţinem astfel că $T(V(x; p; \varepsilon/M)) \subset V(Tx; q; \varepsilon) \subset V$, şi deci T este continuu în x. ∎

Spaţiul liniar al operatorilor liniari şi continui de la $(X, \mathcal{P})$ la $(Y, \mathcal{Q})$ îl notăm prin $\mathcal{L}(X, Y)$. Dacă $T : (X, \mathcal{P}) \to (Y, \mathcal{Q})$ este operator liniar, bijectiv, continuu şi T^{-1} este continuu, spunem că T este un *izomorfism (de spaţii local convexe)*, iar spaţiile $(X, \mathcal{P})$ şi $(Y, \mathcal{Q})$ sunt *izomorfe*.

Desigur, $(\mathbb{R}^k, \tau_0)$, $k \in \mathbb{N}^*$, este un spaţiu local convex, topologia τ_0 fiind generată de norma $\| \ \| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$. Un spaţiu local convex $(X, \mathcal{P})$ pentru care familia $\mathcal{P}$ conţine o singură normă se numeşte spaţiu normat. Această clasă de spaţii este studiată în Secţiunea 1.8.

Este uşor de demonstrat (exerciţiu !) că dacă $T : \mathbb{R}^k \to (X, \mathcal{P})$ este operator liniar atunci T este continuu. Teorema 1.4.9 ne va da informaţii mai precise într-un caz particular.

Dualul (topologic) al spaţiului local convex $(X, \mathcal{P})$, notat $(X, \mathcal{P})^*$ sau X^*, este spaţiul $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.

Dacă X şi Y sunt spaţii local convexe, iar $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pentru fiecare $\psi \in Y^*$ avem că $\psi \circ T \in X^*$. În acest mod obţinem operatorul

$$T^* : Y^* \to X^*, \qquad T^*\psi := \psi \circ T.$$

Se constată cu uşurinţă că T^* este operator liniar, numit *adjunctul* lui T.

În teorema următoare punem în evidenţă mai multe caracterizări pentru continuitatea unei funcţionale liniare.

Teorema 1.4.7 *Fie $(X,\mathcal{P})$ un spaţiu local convex şi $\varphi \in X' \setminus \{0\}$. Urmă-toarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *φ este continuă;*

(ii) *φ este continuă în origine;*

(iii) $\exists M > 0,\ \exists p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P},\ \forall x \in X\ :$

$$\varphi(x) \le M \cdot \max\{p_1(x),\dots,p_n(x)\};$$

(iv) *$H^{\le}_{\varphi,\lambda}$ are interior nevid pentru un (orice) $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(v) *$\ker\varphi$ este mulţime închisă.*

Demonstraţie. Să observăm că (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) din Teorema 1.4.4.

(i) $\Rightarrow$ (v) deoarece $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Presupunem deci că $\ker\varphi$ este mulţime închisă. Să arătăm că $H^{\le}_{\varphi,0}$ are interior nevid. Fie deci $\bar{x} \in X$, $\varphi(\bar{x}) < 0$; desigur, $\bar{x} \notin \ker\varphi$. Cum $\ker\varphi$ este mulţime închisă, există o vecinătate echilibrată U a lui 0 astfel ca $(\bar{x}+U) \cap \ker\varphi = \emptyset$. Să presupunem că există $\bar{u} \in U$ astfel ca $\varphi(\bar{x}+\bar{u}) \ge 0$. Atunci există $\bar{\lambda} \in]0,1]$ astfel încât $\varphi(\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{u}) = 0$. Deoarece U este echilibrată, rezultă că $\bar{x}+\bar{\lambda}\bar{u} \in (\bar{x}+U) \cap \ker\varphi$, absurd. Deci $\bar{x}+U \subset H^{<}_{\varphi,0} \subset H^{\le}_{\varphi,0}$, ceea ce arată că $\bar{x} \in \operatorname{int} H^{\le}_{\varphi,0} \neq \emptyset$. ∎

Unicitatea limitei într-un spaţiu topologic este asigurată, după cum am remarcat deja, de faptul că acesta este separat. În acest sens avem

Teorema 1.4.8 *Fie $(X,\mathcal{P})$ spaţiu local convex, cu $\mathcal{P}$ dirijată. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *$(X,\tau_{\mathcal{P}})$ este separat;*

(ii) *$\forall x \in X \setminus \{0\},\ \exists p \in \mathcal{P}\ :\ p(x) > 0$, adică $\mathcal{P}$ este* suficientă*;*

(iii) *$\bigcap\{V \mid V \in \mathcal{V}(0)\} = \{0\}$, adică $\{0\}$ este mulţime închisă.*

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (iii) Este evident că $0 \in \bigcap\{V \mid V \in \mathcal{V}(0)\}$. Fie $x \in X \setminus \{0\}$; din definiţia separării Hausdorff, există $U \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \in \mathcal{V}(0)$ astfel ca $U \cap V = \emptyset$. Prin urmare $x \notin V$, ceea ce arată că $x \notin \bigcap\{V \mid V \in \mathcal{V}(0)\}$. Deci $\bigcap\{V \mid V \in \mathcal{V}(0)\} = \{0\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Fie $x \in X \setminus \{0\}$, adică $x \notin \{0\} = \overline{\{0\}}$; prin urmare există $V \in \mathcal{V}(0)$ astfel ca $x \notin V$. Cum V este vecinătate pentru 0, există $p \in \mathcal{P}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca $V(0;p;\varepsilon) \subset V$. Deci $p(x) \ge \varepsilon > 0$, şi afirmaţia este dovedită.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fie $x, y \in X$, $x \neq y$. Cum $x - y \neq 0$, există $p \in \mathcal{P}$ astfel ca $p(x-y) := \varepsilon > 0$. Atunci $V(x;p;\varepsilon/2) \cap V(y;p;\varepsilon/2) = \emptyset$, şi afirmaţia este dovedită. ∎

Desigur, în condiţia (iii) din teorema precedentă $\mathcal{V}(0)$ poate fi înlocuit cu orice alt sistem fundamental de vecinătăţi ale originii.

Teorema 1.4.9 *Fie $(X, \mathcal{P})$ un spaţiu local convex separat de dimensiune $k \in \mathbb{N}^*$ şi o bază $\{e_1, \ldots, e_k\}$ în X. Atunci aplicaţia*

$$T : \mathbb{R}^k \to (X, \mathcal{P}), \quad T(x_1, \ldots, x_k) := x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k,$$

este un izomorfism de spaţii local convexe.

Demonstraţie. Este evident că T este o bijecţie liniară. Dintr-o observaţie anterioară avem că T este operator continuu. Fie

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1 \right\}, \quad B := \left\{ x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_k^2 < 1 \right\}.$$

Este ştiut că S este mulţime compactă, şi deci, conform Teoremei 1.1.13, $T(S)$ este compactă. Utilizând Teorema 1.1.11, avem că $T(S)$ este mulţime închisă. Cum $0 \notin T(S)$, $X \setminus T(S)$ este vecinătate a lui 0 în X. Prin urmare există o vecinătate echilibrată V a originii astfel ca $V \subset X \setminus T(S)$, adică $V \cap T(S) = \emptyset$. Avem că $V \subset T(B)$. Într-adevăr, fie $y \in V$; există $x \in \mathbb{R}^k$ astfel ca $y = Tx$. Considerăm $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$; dacă $r \geq 1$ atunci $r^{-1}x \in S$, şi deci $r^{-1}y = T(r^{-1}x) \in T(S) \subset X \setminus V$, absurd, deoarece V este echilibrată, $r^{-1} \in]0,1]$ şi $y \in V$ antrenează $r^{-1}y \in V$. Rezultă că T^{-1} este continuu în 0, şi deci T^{-1} este operator continuu. Prin urmare T este izomorfism de spaţii local convexe. ∎

O consecinţă imediată a teoremei precedente este următorul rezultat important.

Consecinţa 1.4.3 *Toate topologiile de spaţiu local convex separat Hausdorff pe un spaţiu liniar finit dimensional sunt egale.*

Demonstraţie. Fie X spaţiu liniar real de dimensiune $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ două familii suficiente de seminorme pe X. Aplicând teorema precedentă pentru $(X, \mathcal{P})$ şi $(X, \mathcal{Q})$, obţinem că $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{P}) \to (X, \mathcal{Q})$ este izomorfism, unde $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $\mathrm{Id}_E(x) := x$ este *funcţia identică* a mulţimii nevide E. Deci $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{Q}}$. ∎

Cum pe orice spaţiu liniar finit dimensional există cel puţin o normă, rezultatul de mai sus arată că orice topologie separată de spaţiu local convex pe un spaţiu finit dimensional este chiar o topologie de spaţiu normat.

Consecinţa 1.4.4 *Fie $(X, \mathcal{P})$ un spaţiu local convex separat şi $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar finit dimensional. Atunci X_0 este mulţime închisă.*

Demonstraţie. Presupunem că există $\bar{x} \in \overline{X_0} \setminus X_0$. Considerăm spaţiul liniar $X_1 := X_0 + \mathbb{R}\bar{x}$ şi $\{e_1, \ldots, e_k\}$ o bază în X_0. Rezultă că $\{e_1, \ldots, e_k, \bar{x}\}$ este bază în X_1. Din Teorema 1.4.9 avem că aplicaţia

$$T : \mathbb{R}^{k+1} \to X_1, \quad T(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \bar{\lambda}) := \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_k e_k + \bar{\lambda}\bar{x},$$

este un izomorfism de spaţii local convexe. Prin urmare obţinem că

$$\begin{aligned}(0, \ldots, 0, 1) = T^{-1}(\bar{x}) \in \overline{T^{-1}(X_0)} &= \overline{\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}} \\ &= \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

o contradicţie. Deci X_0 este mulţime închisă. ▮

1.5 Teoreme de separare topologică şi teorema bipolarei

Deosebit de utile în analiza convexă sunt variantele topologice (în care X' este înlocuit cu X^*) ale teoremelor de separare.

Teorema 1.5.1 (Eidelheit). *Fie A, $B \subset (X, \mathcal{P})$ două mulţimi convexe şi nevide. Dacă $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ şi $B \cap \operatorname{int} A = \emptyset$ atunci există $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\varphi(x) \leq \alpha \leq \varphi(y) \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B \ (\Leftrightarrow \ \sup \varphi(A) \leq \inf \varphi(B)\,). \tag{1.13}$$

Demonstraţie. Cum $\operatorname{aint} A = \operatorname{int} A$, suntem în condiţiile de aplicare a Teoremei de separare algebrică (Teorema 1.3.4) pentru A şi B; există deci $\varphi \in X'$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfăcând condiţia (1.13). Prin urmare $A \subset H^{\leq}_{\varphi,\alpha}$. Deoarece $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, din Teorema 1.4.7 avem că $\varphi \in X^*$. ▮

În cele ce urmează vom considera numai funcţionale suport (de sprijin) continue şi puncte suport (de sprijin), respectiv hiperplane suport (de sprijin), ce corespund la astfel de funcţionale suport.

Consecinţa 1.5.1 *Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime convexă cu interior nevid şi $x \in A \setminus \operatorname{int} A$. Atunci x este punct de sprijin al lui A.* ▮

Teorema 1.5.2 *Fie $(X, \mathcal{P})$ spaţiu local convex separat şi A, $B \subset X$ două mulţimi convexe şi nevide. Dacă A este închisă, B este compactă şi $A \cap B = \emptyset$ atunci există $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\varphi(x) \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \varphi(y) \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B \ (\Leftrightarrow \ \sup \varphi(A) < \inf \varphi(B)\,). \tag{1.14}$$

Demonstraţie. Deoarece $A \cap B = \emptyset$ şi A este închisă, pentru orice $x \in B$ există U_x o vecinătate convexă şi deschisă a lui 0 astfel ca $(x + U_x) \cap A = \emptyset$. Este evident că $B \subset \bigcup_{x \in B}(x + \frac{1}{2}U_x)$. Cum B este compactă, există o mulţime finită $B_0 \subset B$ astfel ca $B \subset \bigcup_{x \in B_0}(x+\frac{1}{2}U_x)$. Fie $U := \bigcap_{x \in B_0} \frac{1}{2}U_x$. Este clar că U este o vecinătate convexă şi deschisă a lui 0. În plus $(B + U) \cap A = \emptyset$. Într-adevăr, în caz contrar fie $a \in A \cap (B + U)$; atunci $a = x + u$ cu $x \in B,\ u \in U$. Rezultă că există $\bar{x} \in B_0$ astfel ca $x \in \bar{x} + \frac{1}{2}U_{\bar{x}}$. Prin urmare

$$a \in \bar{x} + \tfrac{1}{2}U_{\bar{x}} + U \subset \bar{x} + \tfrac{1}{2}U_{\bar{x}} + \tfrac{1}{2}U_{\bar{x}} = \bar{x} + U_{\bar{x}},$$

absurd. Cum $B + U$ este convexă şi deschisă, iar A este convexă, din teorema precedentă avem că există $\varphi \in X^* \setminus \{0\},\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi(x) \le \alpha_1 \le \varphi(y + u) \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \forall u \in U.$$

Fie $y \in B$ fixat. Din inegalitatea de mai sus avem că $\alpha_1 - \varphi(y) \le \varphi(u)$ pentru orice $u \in U$, adică $\alpha_1 - \varphi(y) \le \inf \varphi(U) < 0$ (deoarece $\varphi \ne 0$ şi U este veci-nă-tate a originii). Luând $\alpha_2 := \alpha_1 - \inf \varphi(U) > \alpha_1$, obţinem că (1.14) este satisfăcută. ∎

Să observăm că am utilizat din definiţia compacităţii numai faptul că din orice acoperire deschisă se poate extrage o subacoperire finită.

Aceste două rezultate pot fi formulate şi în condiţii mai generale.

Teorema 1.5.3 *Fie* $A,\ B \subset (X, \mathcal{P})$ *două mulţimi convexe şi nevide astfel încât* $\operatorname{int}(A - B) \ne \emptyset$. *Atunci*

$$0 \notin \operatorname{int}(A - B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \varphi \in X^* \setminus \{0\} \ :\ \sup \varphi(A) \le \inf \varphi(B).$$

Demonstraţie. Presupunem că $0 \notin \operatorname{int}(A - B)$. Aplicând Teorema 1.5.1 pentru mulţimile $A - B$ şi $\{0\}$, există $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ astfel ca $\varphi(x - y) \le 0$, adică $\varphi(x) \le \varphi(y)$, pentru orice $x \in A,\ y \in B$. Prin urmare are loc concluzia dorită.

Invers, dacă $\varphi \ne 0$ şi $\sup \varphi(A) \le \inf \varphi(B)$ atunci $\varphi(u) \le 0$ pentru orice $u \in A-B$. Presupunând că $0 \in \operatorname{int}(A-B)$, inegalitatea de mai sus antrenează că $\varphi = 0$, absurd. Prin urmare $0 \notin \operatorname{int}(A - B)$. ∎

Teorema 1.5.4 *Fie* $A,\ B \subset (X, \mathcal{P})$ *două mulţimi convexe şi nevide. Atunci*

$$0 \notin \overline{A - B} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \varphi \in X^* \ :\ \sup \varphi(A) < \inf \varphi(B).$$

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din Teorema 1.5.2 aplicată mulţimilor $\{0\}$ şi $\overline{A - B}$.

Pentru suficienţă, fie $\lambda := \sup\varphi(A) - \inf\varphi(B) = \sup\varphi(A-B) < 0$. Luând $U := \{x \mid \varphi(x) > \lambda\}$, este clar că U este vecinătate pentru 0 şi $U \cap (A-B) = \emptyset$. Prin urmare $0 \notin \overline{A-B}$. ∎

Utilizând Teorema 1.5.2 se obţine o caracterizare interesantă şi utilă a mulţimilor convexe şi închise.

Teorema 1.5.5 *Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$. Atunci A este convexă şi închisă dacă şi numai dacă A este intersecţia unei familii de semispaţii închise.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă deoarece orice semispaţiu închis este o mulţime convexă şi închisă.

Fie A o mulţime convexă şi închisă. Dacă $A = \emptyset$ atunci $A = H^{\leq}_{\varphi,0} \cap H^{\geq}_{\varphi,1}$, iar dacă $A = X$ atunci $A = \bigcap_{i\in\emptyset} H_i$. Presupunem deci că A este o mulţime convexă, închisă, nevidă şi diferită de X. Considerăm

$$\mathcal{H} := \left\{ H^{\leq}_{\varphi,\lambda} \;\middle|\; \varphi \in X^* \setminus \{0\},\ \lambda \in \mathbb{R},\ A \subset H^{\leq}_{\varphi,\lambda} \right\}.$$

Este evident că $A \subset \bigcap\{H \mid H \in \mathcal{H}\}$. Fie $\bar{x} \notin A$; aplicând Teorema 1.5.2, există $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\varphi(x) < \lambda < \varphi(\bar{x})$ pentru orice $x \in A$. Este clar că $A \subset H^{\leq}_{\varphi,\lambda} =: H$ şi $\bar{x} \notin H$. Prin urmare avem şi $A \supset \bigcap\{H \mid H \in \mathcal{H}\}$. ∎

Utilă în cele ce urmează este şi următoarea teoremă.

Teorema 1.5.6 *Fie X spaţiu local convex separat şi $x \in X \setminus \{0\}$. Atunci există $\varphi \in X^*$ astfel ca $\varphi(x) \neq 0$.*

Demonstraţie. Deoarece $x \neq 0$, există o vecinătate convexă U a lui 0 astfel ca $x \notin U$. Aplicând Teorema 1.5.1 pentru U şi $\{x\}$, există $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ astfel ca $\sup\varphi(U) \leq \varphi(x)$. Cum U este vecinătate pentru 0 şi $\varphi \neq 0$, $\sup\varphi(U) > 0$. Deci concluzia are loc. ∎

Punem în evidenţă în continuare trei noţiuni importante în cadrul spaţiilor local convexe. Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime nevidă. Se numeşte *polara* lui A mulţimea

$$A^\circ := \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) \geq -1 \ \ \forall x \in A\},$$

conul dual lui A mulţimea

$$A^+ := \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) \geq 0 \ \ \forall x \in A\},$$

şi *spaţiul ortogonal* lui A mulţimea

$$A^\perp := \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \in A\}.$$

Se verifică cu uşurinţă că A° este o mulţime convexă ce conţine 0, A^+ este un con convex, iar $A^\perp$ este subspaţiu liniar al lui X^*.

În mod asemănător, pentru $B \subset X^*$, se defineşte polara, conul dual şi spaţiul ortogonal; de exemplu polara lui B este

$$B^\circ := \{x \in X \mid \varphi(x) \geq -1 \;\; \forall \varphi \in B\};$$

Teorema 1.5.5 ne arată că B° este o mulţime convexă şi închisă, B^+ est con convex închis, iar $B^\perp$ este subspaţiu liniar închis.

Se verifică cu uşurinţă că dacă A, $B \subset X$ şi $\lambda \in]0, \infty[$, atunci: **1)** A° este convexă şi $0 \in A^\circ$; **2)** $A \cup \{0\} \subset (A^\circ)^\circ =: A^{\circ\circ}$; **3)** $A \subset B \;\Rightarrow\; A^\circ \supset B^\circ$; **4)** $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; **5)** $(A + B)^+ = (A \cup B)^+ = A^+ \cap B^+$ dacă $0 \in A \cap B$; **6)** $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$; **7)** $A^\circ = A^+$ dacă A este con, şi $A^\circ = A^+ = A^\perp$ dacă A este subspaţiu liniar; **8)** $(T(A))^\circ = T^{*-1}(A^\circ)$, dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, unde Y este un alt spaţiu local convex.

Un rezultat foarte des utilizat este teorema bipolarei. Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime nevidă; mulţimea $\overline{\mathrm{conv}}\, A := \overline{\mathrm{conv}\, A}$ se numeşte *înfăşurătoarea convexă închisă* a mulţimii A.

Teorema 1.5.7 (a bipolarei). *Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime nevidă. Atunci*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}}\,(A \cup \{0\}).$$

Demonstraţie. Am observat mai sus că $A \cup \{0\} \subset A^{\circ\circ}$; prin urmare $\overline{\mathrm{conv}}\,(A \cup \{0\}) \subset A^{\circ\circ}$. Fie $\bar{x} \notin \overline{\mathrm{conv}}\,(A \cup \{0\})$. Aplicând Teorema 1.5.2 găsim $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi(\bar{x}) < \lambda < \varphi(x) \quad \forall x \in \overline{\mathrm{conv}}\,(A \cup \{0\}).$$

Luând $x = 0$ obţinem că $\lambda < 0$. Înlocuind eventual φ prin $\frac{-1}{\lambda}\varphi$, putem presupune că $\lambda = -1$. Avem astfel că $\varphi(x) \geq -1$ pentru orice $x \in A$, şi deci $\varphi \in A^\circ$. Cum $\varphi(\bar{x}) < -1$, rezultă că $\bar{x} \notin (A^\circ)^\circ$. Deci $\overline{\mathrm{conv}}\,(A \cup \{0\}) \supset A^{\circ\circ}$. ∎

Desigur, în mod asemănător, se poate arăta că A^{++} coincide cu conul convex închis generat de A, iar $A^{\perp\perp}$ coincide cu subspaţiul liniar închis generat de A.

Consecinţa 1.5.2 *Fie $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime nevidă. Atunci*

- **(i)** *A este convexă, închisă şi $0 \in A \;\Leftrightarrow\; A^{\circ\circ} = A$;*
- **(ii)** *A este con convex şi închis $\Leftrightarrow\; A^{++} = A$;*
- **(iii)** *A este subspaţiu liniar închis $\Leftrightarrow\; A^{\perp\perp} = A$.* ∎

1.6 Topologii slabe şi teorema Alaoglu-Bourbaki

Fie X_1, X_2 şi Z trei spaţii liniare reale şi $F : X_1 \times X_2 \to Z$; F se numeşte aplicaţie *biliniară* dacă $F(\cdot, x_2)$ şi $F(x_1, \cdot)$ sunt liniare pentru orice $x_2 \in X_2$, $x_1 \in X_1$.

Considerăm în continuare două spaţii liniare reale X şi Y, şi o aplicaţie biliniară $\boldsymbol{F} : X \times Y \to \mathbb{R}$; vom nota în mod frecvent $\boldsymbol{F}(x, y)$ prin $\langle x, y\rangle$. Pentru fiecare $y \in Y$ putem considera aplicaţia $p_y : X \to \mathbb{R}$, $p_y(x) := |\boldsymbol{F}(x, y)|$. Este evident că p_y este o seminormă. Considerând $\mathcal{P} := \{p_y \mid y \in Y\}$, obţinem spaţiul local convex $(X, \mathcal{P})$ a cărui topologie o notăm prin $\sigma(X, Y)$. Această topologie este separată, conform Teoremei 1.4.8, dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X \setminus \{0\}$ există $p_y \in \mathcal{P}$ astfel ca $p_y(x) > 0$, adică

$$\forall x \in X \setminus \{0\},\ \exists y \in Y\ :\ \boldsymbol{F}(x, y) \neq 0. \tag{1.15}$$

În mod analog avem toplogia $\sigma(Y, X)$ pe Y; $\sigma(Y, X)$ este separată dacă şi numai dacă

$$\forall y \in Y \setminus \{0\},\ \exists x \in X\ :\ \boldsymbol{F}(x, y) \neq 0. \tag{1.16}$$

Să observăm că pentru $y \in Y$ aplicaţia $\varphi_y : X \to \mathbb{R}$, $\varphi_y(x) := \boldsymbol{F}(x, y)$, este liniară şi $\sigma(X, Y)$–continuă [deoarece $|\varphi_y(x)| = p_y(x)$ pentru orice x], şi deci este în $(X, \sigma(X, Y))^*$. Fie acum $\varphi \in (X, \sigma(X, Y))^*$. Cum φ este continuă, din Teorema 1.4.7, există $M > 0$ şi $y_1, \ldots, y_n \in Y$ astfel ca

$$|\varphi(x)| \leq M \cdot \max\{|\varphi_{y_1}(x)|, \ldots, |\varphi_{y_n}(x)|\}\ \ \forall x \in X.$$

Din relaţia de mai sus rezultă că $\bigcap_{i=1}^n \ker \varphi_{y_i} \subset \ker \varphi$. Aplicând teorema nucleelor (Teorema 1.3.6), obţinem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in X$,

$$\varphi(x) = \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{y_i}(x) = \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{F}(x, y_i) = \boldsymbol{F}(x, y),$$

unde $y := \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in Y$. Prin urmare $\varphi = \varphi_y$. Am obţinut astfel că aplicaţia $Y \ni y \mapsto \varphi_y \in (X, \sigma(X, Y))^*$ este surjectivă. Pentru a fi injectivă trebuie ca $y_1 = y_2$ de îndată ce $\boldsymbol{F}(x, y_1) = \boldsymbol{F}(x, y_2)$ ($\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F}(x, y_1 - y_2) = 0$) pentru orice $x \in X$, adică,

$$\forall y \in Y\ :\ [\boldsymbol{F}(x, y) = 0\ \ \forall x \in X]\ \Rightarrow\ y = 0.$$

Este clar că această afirmaţie este echivalentă cu condiţia (1.16).

Am obţinut astfel următorul rezultat.

Teorema 1.6.1 *Presupunem că aplicaţia biliniară* $\boldsymbol{F} : X \times Y \to \mathbb{R}$ *satisface condiţiile (1.15) şi (1.16). Atunci* $(X, \sigma(X, Y))$, $(Y, \sigma(Y, X))$ *sunt spaţii local convexe separate şi* $(X, \sigma(X, Y))^* = Y$, $(Y, \sigma(Y, X))^* = X$, *identificând* $y \in Y$ *cu* $\varphi_y : X \to \mathbb{R}$, $\varphi_y(x) = \boldsymbol{F}(x, y)$ *şi* $x \in X$ *cu* $\psi_x : Y \to \mathbb{R}$, $\psi_x(y) = \boldsymbol{F}(x, y)$. ∎

Dacă X, Y şi $\boldsymbol{F}$ sunt ca în teorema de mai sus, spunem că X şi Y sunt în *dualitate (în raport cu $\boldsymbol{F}$)* sau că $\{X, Y\}$ formează un *sistem dual*, notat $(X, Y, \boldsymbol{F})$. Observăm, tot din teorema precedentă, că dacă $\{X, Y\}$ formează un sistem dual, spaţiile X şi Y au rol simetric.

Fie acum $(X, \mathcal{P})$ un spaţiu local convex separat (deci $\mathcal{P}$ este suficientă) şi X^* dualul său topologic. Aplicaţia (naturală)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X^* \to \mathbb{R},\ \langle x, \varphi\rangle := \varphi(x),$$

este biliniară. În plus $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisface condiţia (1.15) deoarece $\mathcal{P}$ este suficientă (a se vedea Teorema 1.4.8) şi condiţia (1.16). Prin urmare spaţiile X şi X^* sunt în dualitate în raport cu $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Topologia $\sigma(X, X^*)$ o vom nota în continuare prin w şi o vom numi *topologia slabă* a lui X, denumire justificată de faptul că $w \preceq \tau_{\mathcal{P}}$ (a se vedea Teoremele 1.4.5 şi 1.4.7), iar topologia $\sigma(X^*, X)$ o vom nota prin w^* şi o vom numi *topologia slab-stelată* a lui X^*. Aceste două topologii sunt topologii local convexe separate şi

$$(X, w)^* = (X, \mathcal{P})^* = X^*,\quad (X^*, w^*)^* = X.$$

În tot ceea ce urmează, dacă X este un spaţiu local convex separat, când vorbim despre topologia slabă pe X şi (sau) despre topologia slab-stelată pe X^* avem în vedere topologiile w şi w^* construite mai sus.

Un rezultat interesant, şi deosebit de util, este următorul.

Teorema 1.6.2 *Fie $(X, \mathcal{P})$ un spaţiu local convex separat şi $A \subset X$ o mulţime convexă. Atunci A este închisă (relativ la $\tau_{\mathcal{P}}$) dacă şi numai dacă A este w–închisă.*

Demonstraţie. Dacă A este w–închisă atunci A este $\tau_{\mathcal{P}}$–închisă deoarece $w \preceq \tau_{\mathcal{P}}$.

Invers, dacă A este convexă şi închisă, din Teorema 1.5.5, A este intersecţia unei familii de semispaţii închise. Cum orice funcţională continuă este şi slab-continuă, orice semispaţiu închis este slab-închis. Prin urmare A este w–închisă. ∎

Folosind teorema precedentă se obţine rapid (exerciţiu !) că dacă $A \subset X$ este convexă atunci w–$\operatorname{cl} A = \tau_{\mathcal{P}}$–$\operatorname{cl} A$. Desigur, acest rezultat nu este adevărat pentru mulţimi arbitrare (cu excepţia cazului în care $w = \tau_{\mathcal{P}}$).

O altă observaţie este aceea că pentru $A \subset (X, \mathcal{P})$ o mulţime nevidă, A° este o mulţime convexă şi w^*-închisă, deoarece $\{\varphi \in X^* \mid \langle x, \varphi\rangle \geq \lambda\}$ este w^*–închisă pentru orice $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$; în mod asemănător avem că A^+ este con convex w^*–închis, iar $A^\perp$ este subspaţiu liniar w^*–închis.

Un rezultat deosebit de important în teoria spaţiilor local convexe, şi foarte util în ceea ce urmează, este următorul.

Teorema 1.6.3 (Alaoglu-Bourbaki). *Fie $(X, \mathcal{P})$ un spaţiu local convex separat şi $U \subset X$ o vecinătate a originii. Atunci U° este mulţime w^*–compactă.*

Demonstraţie. Presupunem pentru început că U este o vecinătate convexă, închisă şi simetrică a originii. Atunci funcţionala Minkowski $p_U : X \to \mathbb{R}$ este o seminormă continuă. În plus

$$U = \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\}.$$

Să considerăm spaţiul $\mathbb{R}^X$ înzestrat cu topologia produs, notată τ; cum $(\mathbb{R}, \tau_0)$ este separat, τ este separată. Reamintim că W este vecinătate pentru f_0 în $\mathbb{R}^X$ dacă există $x_1, \ldots, x_n \in X$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca

$$V(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) := \left\{ f \in \mathbb{R}^X \;\middle|\; |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \;\; \forall\, i,\ 1 \leq i \leq n \right\} \subset W.$$

Să observăm că w^* este urma topologiei τ pe $X^* \subset \mathbb{R}^X$. Deoarece U este simetrică,

$$\varphi \in U^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in X' \text{ şi } |\varphi(x)| \leq p_U(x) \;\; \forall\, x \in X. \tag{1.17}$$

Cum implicaţia "$\Leftarrow$" este evidentă, fie $\varphi \in U^\circ$ şi $x \in X$. Dacă $p_U(x) > 0$ atunci $\pm\frac{x}{p_U(x)} \in U$, şi deci $\left|\varphi\left(\frac{x}{p_U(x)}\right)\right| = \frac{1}{p_U(x)}|\varphi(x)| \leq 1$, adică $|\varphi(x)| \leq p_U(x)$. Dacă $p_U(x) = 0$ atunci $p_U(\lambda x) = 0 \leq 1$, şi deci $\lambda x \in U$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$; rezultă că $\varphi(\lambda x) \geq -1$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, de unde avem că $|\varphi(x)| = 0 \leq p_U(x)$. Echivalenţa de mai sus este dovedită. Prin urmare $U^\circ \subset \prod_{x \in X}[-p_U(x), p_U(x)]$. Cum $[-p_U(x), p_U(x)]$ este mulţime compactă (în raport cu topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$), utilizând teorema lui Tihonov, avem că $\prod_{x \in X}[-p_U(x), p_U(x)]$ este spaţiu compact în raport cu topologia produs, şi deci este submulţime compactă a lui $\mathbb{R}^X$. Având în vedere Teorema 1.1.11, pentru a dovedi că U° este w^*–compactă, este suficient să arătăm că U° este închisă în $(\mathbb{R}^X, \tau)$.

Observăm pentru început că τ–$\operatorname{cl} U^\circ \subset X'$. Într-adevăr, dacă $f \in \mathbb{R}^X \setminus X'$, există $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca $\varepsilon := |f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| > 0$. Luând $\delta := \varepsilon/(1 + |\alpha| + |\beta|)$, avem că $V(f; x, y, \alpha x + \beta y; \delta) \cap X' = \emptyset$, ceea ce arată, de fapt, că X' este τ–închisă.

Fie acum $\varphi \in X' \setminus U^\circ$. Din relaţia (1.17) avem că există $x \in X$ astfel ca $|\varphi(x)| > p_U(x)$; fie $\varepsilon := |\varphi(x)| - p_U(x) > 0$. Dacă $\psi \in V(\varphi; x; \varepsilon) \cap U^\circ$ atunci $|\psi(x)| \leq p_U(x)$ şi

$$\varepsilon > |\varphi(x) - \psi(x)| \geq |\varphi(x)| - |\psi(x)| = \varepsilon + p_U(x) - |\psi(x)| \geq \varepsilon,$$

absurd. Deci $V(\varphi; x; \varepsilon) \cap U^\circ = \emptyset$, ceea ce arată că U° este τ–închisă.

Fie acum U o vecinătate arbitrară a lui 0. Atunci există V o vecinătate convexă, închisă şi simetrică a lui 0 astfel ca $V \subset U$. Prin urmare $U^\circ \subset V^\circ$. Cum, din prima parte, V° este w^*–compactă, iar U° este w^*–închisă, topologia w^* fiind separată, avem că U° este w^*–compactă. ∎

Fie $(X, \mathcal{P})$, $(Y, \mathcal{Q})$ spaţii local convexe separate, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi T^* adjunctul său. Să observăm că T^* este continuu de la (Y^*, w^*) la (X^*, w^*). Într-adevăr, cu notaţiile de la începutul acestei secţiuni, pentru orice $x \in X$, avem

$$(p_x \circ T^*)(\psi) = |\psi(Tx)| = p_{Tx}(\psi) \leq p_y(\psi) \quad \forall\, \psi \in Y^*,$$

unde $y = Tx \in Y$. Desigur, am aplicat Teorema 1.4.6. Este evident, ţinând cont de Teorema 1.6.1, că adjunctul operatorului

$$T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)\,) \to (X^*, \sigma(X^*, X)\,)$$

este chiar T, şi deci T este continuu de la $(X, \sigma(X, X^*)\,)$ la $(Y, \sigma(Y, Y^*)\,)$.

În continuare vom nota în mod frecvent elementele din X^* prin x^*, u^*, iar cele din Y^* prin y^*, v^*, etc.

Teorema 1.6.4 *Fie $(X, \mathcal{P})$ şi $(Y, \mathcal{Q})$ două spaţii local convexe separate, A, $B \subset X$, $C \subset Y$ mulţimi convexe, închise, conţinând originea spaţiului respectiv şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Atunci*

(i) $(A \cap B)^\circ = \overline{\mathrm{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ)$, *aderenţa fiind în raport cu topologia w^*;*

(ii) $\left(T^{-1}(C)\right)^\circ = w^*\text{–cl}\,(T^*(C^\circ))$*;*

(iii) $(\ker T)^\perp = w^*\text{–cl}\,(\mathrm{Im}\, T^*)$, $(\mathrm{Im}\, T)^\perp = \ker T^*$, $(\ker T^*)^\perp = \mathrm{cl}\,(\mathrm{Im}\, T)$ *şi* $(\mathrm{Im}\, T^*)^\perp = \ker T$.

Demonstraţie. (i) Incluziunea $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ este evidentă, şi deci $\overline{\mathrm{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ) \subset (A \cap B)^\circ$, deoarece $(A \cap B)^\circ$ este mulţime convexă şi w^*–închisă. Fie acum $\bar{x}^* \notin \overline{\mathrm{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ)$. Conform Teoremei 1.5.2, ţinând seama şi de Teorema 1.6.1, există $\bar{x} \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle < \lambda < \langle \bar{x}, x^* \rangle \quad \forall\, x^* \in \overline{\mathrm{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ).$$

Luând $x^* = 0$ obţinem că $\lambda < 0$. Putem astfel presupune că $\lambda = -1$. Prin urmare

$$\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle < -1 < \langle \bar{x}, x^* \rangle \quad \forall\, x^* \in A^\circ \cup B^\circ. \tag{1.18}$$

Luând la început $x^* \in A^\circ$ în (1.18) obţinem că $\bar{x} \in (A^\circ)^\circ = A$, conform teoremei bipolarei, apoi luând $x^* \in B^\circ$, obţinem şi $\bar{x} \in B$. Prin urmare

$\bar{x} \in A \cap B$. Utilizând din nou (1.18), avem că $\bar{x}^* \notin (A \cap B)^\circ$. Deci avem şi $(A \cap B)^\circ \subset \overline{\mathrm{conv}}\,(A^\circ \cup B^\circ)$.

(ii) Incluziunea $T^*(C^\circ) \subset (T^{-1}(C))^\circ$ este evidentă. Incluziunea inversă se obţine ca mai sus, utilizând Teorema 1.5.2.

(iii) Deoarece pentru $0 \in X$, $\{0\}^\circ = X^*$, din (ii) obţinem

$$(\ker T)^\perp = (\ker T)^\circ = \Big(T^{-1}(\{0\})\Big)^\circ = w^*\text{–cl}\,(\operatorname{Im} T^*);$$

ţinând seama de proprietăţile polarei menţionate înaintea Teoremei bipolarei şi de faptul că $X^\circ = \{0\} \subset X^*$, avem

$$(\operatorname{Im} T)^\perp = (\operatorname{Im} T)^\circ = (T(X))^\circ = T^{*-1}(X^\circ) = \ker T^*.$$

Celelalte două formule se obţin din acestea prin înlocuirea lui T cu T^*, ţinând seama de faptul, observat mai sus, că $(T^*)^* = T$. ∎

1.7 Subspaţii, spaţii cât şi spaţii produs

Fie X spaţiu liniar, X_0 un subspaţiu liniar al lui X şi $p : X \to \mathbb{R}$ o seminormă. Este evident că $p|_{X_0}$ este o seminormă pe X_0. Considerând $\mathcal{P}$ o familie (dirijată) de seminorme pe X şi $\mathcal{P}_0 := \{p|_{X_0} \mid p \in \mathcal{P}\}$, spunem că $(X_0, \mathcal{P}_0)$ este *subspaţiu* al spaţiului local convex $(X, \mathcal{P})$. Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.7.1 *Fie $(X, \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ familie dirijată, un spaţiu local convex şi X_0 un subspaţiu liniar al lui X. Atunci*

(i) *$\tau_{\mathcal{P}_0}$ este urma topologiei $\tau_{\mathcal{P}}$ pe X_0;*

(ii) *$\mathcal{P}_0$ este suficientă, şi deci $\tau_{\mathcal{P}_0}$ este separată, dacă $\mathcal{P}$ este suficientă;*

(iii) *${X_0}^* = \{\varphi|_{X_0} \mid \varphi \in X^*\}$;*

(iv) *$\sigma(X_0, {X_0}^*)$ este urma topologiei $\sigma(X, X^*)$ pe X_0.*

Demonstraţie. (i) şi (ii) sunt evidente.

(iii) Este evident că dacă $\varphi \in X^*$ atunci $\varphi|_{X_0} \in (X_0, \mathcal{P}_0)^* =: X_0^*$. Fie $\psi \in X_0^*$. Atunci $\psi : X_0 \to \mathbb{R}$ este liniară şi există $p \in \mathcal{P}$, $M > 0$ astfel ca $\psi(x) \le Mp(x)$ pentru orice $x \in X_0$. Aplicând Teorema lui Hahn-Banach găsim $\varphi : X \to \mathbb{R}$ aplicaţie liniară astfel ca $\varphi|_{X_0} = \psi$ şi $\varphi(x) \le Mp(x)$ pentru orice $x \in X$. Prin urmare $\varphi \in X^*$, ceea ce arată că relaţia de dovedit are loc.

(iv) Topologia $\sigma(X, X^*)$ este generată de familia de seminorme $\mathcal{Q} = \{p_\varphi \mid \varphi \in X^*\}$, unde $p_\varphi(x) := |\varphi(x)|$. Avem că

$$\mathcal{Q}_0 = \{(p_\varphi)|_{X_0} \mid p_\varphi \in \mathcal{Q}\} = \{p_{\varphi|_{X_0}} \mid \varphi \in X^*\} = \{p_\psi \mid \psi \in X_0^*\}.$$

Din i) rezultă afirmaţia făcută. ∎

Fie din nou X spaţiu liniar, $X_0 \subset X$ subspaţiu liniar şi $p : X \to \mathbb{R}$ o seminormă. După cum se ştie, X/X_0 este spaţiul claselor de echivalenţă $\hat{x}$, $x \in X$, relativ la relaţia de echivalenţă definită prin $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X_0$. Considerăm şi $\mathrm{Pr} : X \to X/X_0$, $\mathrm{Pr}(x) := \hat{x}$, numită *proiecţia canonică* a lui X pe X/X_0. Este uşor de dovedit (exerciţiu !) că

$$\hat{p} : X/X_0 \to \mathbb{R},\ \hat{p}(\hat{x}) := \inf\{p(x+u) \mid u \in X_0\}, \tag{1.19}$$

este seminormă.

Fie acum $\mathcal{P}$ o familie dirijată de seminorme pe X şi $\widehat{\mathcal{P}} := \{\hat{p} \mid p \in \mathcal{P}\}$, unde $\hat{p}$ este definit în (1.19). Obţinem astfel spaţiul local convex $\left(X/X_0, \widehat{\mathcal{P}}\right)$ numit *spaţiu cât* al lui X *relativ la* X_0. Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.7.2 *Fie $(X, \mathcal{P})$ spaţiu local convex, cu $\mathcal{P}$ dirijată, şi $X_0 \subset X$ subspaţiu liniar, iar $\widehat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} \mid p \in \mathcal{P}\}$. Spaţiul $(X/X_0, \widehat{\mathcal{P}})$ are următoarele proprietăţi:*

(i) Pr *este aplicaţie deschisă, adică* $\forall D \in \tau_{\mathcal{P}} : \mathrm{Pr}(D) \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$.

(ii) $\widehat{D} \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}} \Leftrightarrow \mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{D}) \in \tau_{\mathcal{P}}$; *în particular* Pr *este operator continuu.*

(iii) $\widehat{F} \subset X/X_0$ *este $\tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$-închisă dacă şi numai dacă $\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})$ este $\tau_{\mathcal{P}}$-închisă; în plus, dacă $A \subset X$, atunci $\mathrm{Pr}(A)$ este mulţime $\tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$-închisă dacă şi numai dacă $A + X_0$ este mulţime $\tau_{\mathcal{P}}$-închisă.*

(iv) *$\widehat{\mathcal{P}}$ este suficientă ($\Leftrightarrow$ $\tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$ este separată) dacă şi numai dacă X_0 este mulţime închisă;*

(v) *aplicaţia $\boldsymbol{F} : (X/X_0)^* \to X_0^{\perp}$, $\boldsymbol{F}(\chi) := \chi \circ \mathrm{Pr}$, este izomorfism de spaţii local convexe, $(X/X_0)^*$ fiind înzestrat cu topologia $\sigma((X/X_0)^*, X/X_0)$, iar $X_0^{\perp}$ fiind înzestrat cu urma topologiei $\sigma(X^*, X)$ pe $X_0^{\perp}$.*

Demonstraţie. (i) Fie $D \in \tau_{\mathcal{P}}$ şi $x_0 \in D$. Deoarece $\mathcal{P}$ este dirijată, există $p \in \mathcal{P}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca $\{x \in X \mid p(x - x_0) < \varepsilon\} \subset D$. Fie $\hat{x} \in X/X_0$ astfel ca $\hat{p}(\hat{x} - \hat{x}_0) < \varepsilon$; considerăm $x \in X$ astfel ca $\hat{x} = \mathrm{Pr}(x)$. Din definiţia lui $\hat{p}$ avem că există $u \in X_0$ astfel ca $p(x + u - x_0) < \varepsilon$. Prin urmare $x + u \in D$, şi deci $\hat{x} = \mathrm{Pr}(x + u) \in \mathrm{Pr}(D)$. Am dovedit astfel că $\mathrm{Pr}(D) \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$.

(ii) Deoarece Pr este aplicaţie surjectivă, avem că $\mathrm{Pr}(\mathrm{Pr}^{-1}(\hat{A})) = \hat{A}$ pentru orice $\hat{A} \subset X/X_0$. Având în vedere acest fapt şi (i), este suficient să arătăm că $\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{D}) \in \tau_{\mathcal{P}}$ pentru $\widehat{D} \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$. Fie deci $\widehat{D} \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$ şi $x_0 \in \mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{D})$. Cum $\hat{x}_0 = \mathrm{Pr}(x_0) \in \widehat{D}$, există $p \in \mathcal{P}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca $\{\hat{x} \mid \hat{p}(\hat{x} - \hat{x}_0) < \varepsilon\} \subset \widehat{D}$. Fie $x \in X$ astfel ca $p(x - x_0) < \varepsilon$; atunci $\hat{p}(\hat{x} - \hat{x}_0) \le p(x - x_0) < \varepsilon$. Prin urmare

$\{x \in X \mid p(x - x_0) < \varepsilon\} \subset \mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{D})$, ceea ce arată că $\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{D}) \in \tau_{\mathcal{P}}$. Cele arătate mai înainte dovedesc şi faptul că Pr este funcţie continuă.

(iii) Fie $\widehat{F} \subset X/X_0$. Dacă $\widehat{F}$ este $\tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$-închisă, din continuitatea operatorului Pr, obţinem că $\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})$ este mulţime $\tau_{\mathcal{P}}$-închisă. Presupunem deci că $\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})$ este $\tau_{\mathcal{P}}$-închisă. Rezultă că $X \setminus \mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F}) \in \tau_{\mathcal{P}}$, şi deci, din (i),

$$\mathrm{Pr}\left(X \setminus \mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})\right) = (X/X_0) \setminus \mathrm{Pr}\left(\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})\right) = (X/X_0) \setminus \widehat{F} \in \tau_{\widehat{\mathcal{P}}},$$

adică $\widehat{F}$ este $\tau_{\widehat{\mathcal{P}}}$-închisă. Incluziunea "$\supset$" din prima egalitate de mai sus rezultă din relaţia $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$, adevărată pentru orice funcţie $f : E \to F$ şi $A, B \subset E$, în timp ce incluziunea inversă rezultă imediat utilizând relaţia $\mathrm{Pr}\left(\mathrm{Pr}^{-1}(\widehat{F})\right) = \widehat{F}$. Fie acum $A \subset X$ şi $\hat{A} := \mathrm{Pr}(A)$. Este evident că $\mathrm{Pr}^{-1}(\hat{A}) = A + X_0$. Utilizând cele dovedite mai înainte, obţinem imediat afirmaţia făcută.

(iv) Utilizând Teorema 1.4.8 şi (iii) pentru $A = \{0\}$, avem că

$$\widehat{\mathcal{P}} \text{ este suficientă } \Leftrightarrow \ \{\hat{0}\} = \mathrm{Pr}(\{0\}) \text{ este } \tau_{\widehat{\mathcal{P}}}\text{-închisă } \Leftrightarrow \ X_0 \text{ este } \tau_{\mathcal{P}}\text{-închisă},$$

ceea ce dovedeşte afirmaţia făcută.

(v) Este evident că aplicaţia $\boldsymbol{F}$ este bine definită şi liniară. Dacă $\chi \in (X/X_0)^*$ şi $\boldsymbol{F}(\chi) = 0$ atunci pentru orice $\hat{x} \in X/X_0$ ($x \in X$) avem că $\chi(\hat{x}) = \boldsymbol{F}(\chi)(x) = 0$, şi deci $\chi = 0$; prin urmare $\boldsymbol{F}$ este operator injectiv. Fie acum $\varphi \in X_0^{\perp}$. Definim $\chi_\varphi : X/X_0 \to \mathbb{R}$, $\chi_\varphi(\hat{x}) := \varphi(x)$; deoarece $\varphi \in X_0^{\perp}$, χ_φ este bine definită. Este evident că χ_φ este aplicaţie liniară. Deoarece φ este continuă, există $p \in \mathcal{P}$ şi $M > 0$ astfel ca $\varphi(x) \leq Mp(x)$ pentru orice $x \in X$. Deci

$$\chi_\varphi(\hat{x}) = \varphi(x) = \varphi(x + u) \leq Mp(x + u) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in X_0.$$

Trecând la infimum pentru $u \in X_0$, obţinem că $\chi_\varphi(\hat{x}) \leq M\hat{p}(\hat{x})$ pentru orice $\hat{x} \in X/X_0$. Deci $\chi_\varphi \in (X/X_0)^*$. Relaţia $\boldsymbol{F}(\chi_\varphi) = \varphi$ este evidentă. Prin urmare $\boldsymbol{F}$ este operator bijectiv şi $\boldsymbol{F}^{-1}(\varphi) = \chi_\varphi$.

Topologia $\sigma((X/X_0)^*, X/X_0)$ este generată de familia de seminorme $\{p_{\hat{x}} \mid x \in X\}$, unde $p_{\hat{x}} : (X/X_0)^* \to \mathbb{R}$, $p_{\hat{x}}(\chi) := |\chi(\hat{x})|$, iar topologia lui $X_0^{\perp}$ este generată de familia de seminorme $\{p_x|_{X_0^{\perp}} \mid x \in X\}$, unde $p_x : X^* \to \mathbb{R}$, $p_x(\varphi) := |\varphi(x)|$. Fie $x \in X$ şi $\chi \in (X/X_0)^*$ elemente fixate. Avem că

$$\left(p_x|_{X_0^{\perp}} \circ \boldsymbol{F}\right)(\chi) = p_x|_{X_0^{\perp}}(\chi \circ \mathrm{Pr}) = |\chi(\hat{x})| = p_{\hat{x}}(\chi).$$

Prin urmare avem că $p_x|_{X_0^{\perp}} \circ \boldsymbol{F} = p_{\hat{x}}$ şi $p_{\hat{x}} \circ \boldsymbol{F}^{-1} = p_x|_{X_0^{\perp}}$. Utilizând Teorema 1.4.6, obţinem că $\boldsymbol{F}$ şi $\boldsymbol{F}^{-1}$ sunt operatori continui. ∎

Fie acum $(X_i, \mathcal{P}_i),\ 1 \le i \le n,\ n$ spaţii local convexe. Considerăm familia

$$\mathcal{P} := \{t_{p_1,\dots,p_n} \mid p_i \in \mathcal{P}_i,\ 1 \le i \le n\}, \tag{1.20}$$

unde

$$t_{p_1,\dots,p_n} : \prod\nolimits_{i=1}^{n} X_i =: X \to \mathbb{R}$$

este definit prin

$$t_{p_1,\dots,p_n}(x_1,\dots,x_n) := \max\{p_i(x_i) \mid 1 \le i \le n\}.$$

Este evident că $t_{p_1,\dots,p_n}$ este seminormă pentru $p_1 \in \mathcal{P}_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}_n$. Spaţiul local convex $(X, \mathcal{P})$ se numeşte *produsul* spaţiilor $(X_i, \mathcal{P}_i),\ 1 \le i \le n$. Are loc următorul rezultat.

Teorema 1.7.3 *Fie $(X_i, \mathcal{P}_i),\ 1 \le i \le n$, spaţii local convexe, cu $\mathcal{P}_i$ dirijate, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ şi $\mathcal{P}$ definit de relaţia (1.20). Spaţiul produs $(X, \mathcal{P})$ are următoarele proprietăţi:*

- **(i)** $\tau_{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^{n} \tau_{\mathcal{P}_i}$;
- **(ii)** *$\mathcal{P}$ este suficientă $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_i$ este suficientă $\forall\, i,\ 1 \le i \le n$;*
- **(iii)** *aplicaţia*

$$\boldsymbol{F} : (X, \mathcal{P})^* \to \prod\nolimits_{i=1}^{n} (X_i, \mathcal{P}_i)^*,\ \boldsymbol{F}(\chi) := (\varphi_1,\dots,\varphi_n), \tag{1.21}$$

unde

$$\varphi_i : X_i \to \mathbb{R},\quad \varphi_i(x_i) := \chi(\boldsymbol{x}_i),\quad \text{cu } \boldsymbol{x}_i := (0,\dots,0,x_i,0,\dots,0) \in X, \tag{1.22}$$

este un izomorfism de spaţii local convexe (toate spaţiile fiind înzestrate cu topologiile slab-stelate).

Demonstraţie. (i) Este evident că

$$V\left((x_1,\dots,x_n); t_{p_1,\dots,p_n}; \varepsilon\right) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} V(x_i; p_i; \varepsilon),$$

de unde rezultă imediat că $\tau_{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^{n} \tau_{\mathcal{P}_i}$.

(ii) este consecinţă imediată a Teoremei 1.4.8 şi a primei părţi.

(iii) Este clar că φ_i definit prin (1.22) este din ${X_i}^*$ şi deci operatorul $\boldsymbol{F}$ este bine definit. Se verifică cu uşurinţă că $\boldsymbol{F}$ este liniar şi injectiv. În plus, dacă $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \prod_{i=1}^{n} {X_i}^*$ atunci

$$\chi : X \to \mathbb{R},\quad \chi(x_1,\dots,x_n) := \sum\nolimits_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i),$$

este din X^* şi $\boldsymbol{F}(\chi) = \varphi$. Prin urmare $\boldsymbol{F}$ este un operator liniar bijectiv.

Conform definiţiei spaţiului produs şi a topologiei slab-stelate, topologia spaţiului $\prod_{i=1}^n {X_i}^*$ este dată de familia de seminorme

$$\{t_{x_1,\ldots,x_n} \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \in X\},$$

unde

$$t_{x_1,\ldots,x_n}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) := \max\{|\varphi_i(x_i)| \mid 1 \le i \le n\},$$

iar topologia lui X^* este definită de familia de seminorme

$$\{\theta_x \mid x \in X\}, \quad \theta_x(\chi) := |\chi(x)|.$$

Continuitatea lui $\boldsymbol{F}$ rezultă din relaţia

$$(t_{x_1,\ldots,x_n} \circ \boldsymbol{F})(\chi) = \max\{|\varphi_i(x_i)| \mid 1 \le i \le n\} = \max\{|\theta_{\boldsymbol{x}_i}(\chi)| \mid 1 \le i \le n\},$$

iar continuitatea lui $\boldsymbol{F}^{-1}$ din relaţia

$$\begin{aligned}(\theta_x \circ \boldsymbol{F}^{-1})(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) &= \left|\sum\nolimits_{i=1}^n \varphi_i(x_i)\right| \le n \cdot \max\{|\varphi_i(x_i)| \mid 1 \le i \le n\} \\ &\le n \cdot t_{x_1,\ldots,x_n}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),\end{aligned}$$

ţinând cont de Teorema 1.4.7. ∎

În cele ce urmează vom identifica $(\prod_{i=1}^n (X, \mathcal{P}_i))^*$ cu $\prod_{i=1}^n (X, \mathcal{P}_i)^*$ prin intermediul izomorfismului $\boldsymbol{F}$ din teorema de mai sus.

Un caz particular important este spaţiul $X \times \mathbb{R}$, unde $(X, \mathcal{P})$ este un spaţiu local convex. În această situaţie $(X \times \mathbb{R})^* = X^* \times \mathbb{R}$, iar pentru $(\varphi, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$, $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ avem că $\langle(\varphi, \alpha), (x, \lambda)\rangle = \varphi(x) + \alpha\lambda$.

1.8 Spaţii normate

Fie X spaţiu liniar real, netrivial (adică $X \ne \{0\}$) şi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ o normă. Considerând $\mathcal{P} = \{\| \ \|\}$, spaţiul $(X, \| \ \|) := (X, \mathcal{P})$ se numeşte *spaţiu normat*. Este evident că în acest caz topologia $\tau_{\| \ \|}$ este definită de metrica

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \|x - y\|.$$

Spunem că $(X, \| \ \|)$ este *spaţiu Banach* dacă X înzestrat cu metrica de mai sus este spaţiu metric complet. Să observăm că în acest caz (X spaţiu Banach), dacă seria $\sum_{n=1}^\infty x_n$ este *absolut convergentă*, adică seria $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^\infty x_n$ este convergentă şi $\|\sum_{n=1}^\infty x_n\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

Într-adevăr, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ este convergentă, atunci şirul $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n := x_1 + \cdots + x_n$, este şir Cauchy, şi deci este convergent. Inegalitatea rezultă din $\|S_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$.

În cele ce urmează sfera deschisă de centru 0 şi rază 1 din $(X, \|\ \|)$ va fi notată prin B_X, iar sfera închisă (discul) de centru 0 şi rază 1 va fi notată prin U_X; de asemenea notăm prin S_X mulţimea $\{x \in X \mid \|x\| = 1\} = U_X \setminus B_X$. Dacă nu există pericol de confuzie, vom mai nota aceste mulţimi prin B, U respectiv S. Este clar că $B(x, \rho) = x + \rho B$, $D(x, \rho) = x + \rho U$.

Fie acum $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ două spaţii normate şi $T \in L(X, Y)$. Din Teorema 1.4.6 avem că $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel ca $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$ pentru orice $x \in X$. Această caracterizare dă posibilitatea introducerii normei unui operator liniar şi continuu între două spaţii normate. Fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$;

$$\|T\| := \inf\{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in X\}.$$

Este uşor de dovedit (exerciţiu !) că

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,\middle|\, x \in X \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Se constată uşor (exerciţiu !) că aplicaţia $\mathcal{L}(X, Y) \ni T \mapsto \|T\| \in \mathbb{R}$ definită mai sus este efectiv o normă pe $\mathcal{L}(X, Y)$. De fiecare dată când spaţiile normate $(X, \|\ \|)$ şi $(Y, \|\ \|)$ sunt date, spaţiul $\mathcal{L}(X, Y)$ este înzestrat cu norma definită mai sus.

Operatorul $T : (X, \|\ \|) \to (Y, \|\ \|)$ se numeşte *izomorfism de spaţii normate* dacă T este liniar, bijectiv şi bicontinuu; în acest caz spaţiile normate X şi Y se spune că sunt *izomorfe*. Operatorul T se numeşte *izometrie (liniară)* dacă $\|Tx\| = \|x\|$ pentru orice $x \in X$, T este liniar şi surjectiv (deci bijectiv).

Un caz particular important este cel în care $Y = \mathbb{R}$. Pentru funcţionala $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$ avem că

$$\|\varphi\| := \inf\{M > 0 \mid |\varphi(x)| \leq M \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in X\}.$$

Bineînţeles, şi celelalte formule pentru $\|T\|$ se transpun pentru $\|\varphi\|$; putem menţiona că în toate aceste formule se poate înlocui $|\varphi(x)|$ prin $\varphi(x)$. Spaţiul normat $(X, \|\ \|)$ fiind dat, de fiecare dată dualul său va fi înzestrat cu norma de mai sus, numită şi *normă duală*. Vom nota prin B^*, U^*, S^*, mulţimile B_{X^*}, U_{X^*}, S_{X^*} din X^* (faţă de norma duală). Topologia slabă pe X şi cea slab-stelată pe X^* se introduc ca în Secţiunea 1.6.

Utilizând Consecinţa 1.4.3 avem că toate normele pe un spaţiu finit dimensional X sunt echivalente (adică induc aceeaşi topologie), topologia normei coincide cu topologia slabă, iar pe X^* topologia normei, topologia slabă şi topologia slab stelată coincid.

Un prim rezultat este următorul.

Teorema 1.8.1 *Fie $(X, \| \ \|)$ spaţiu normat şi $A \subset X^*$ o mulţime mărginită, nevidă şi w^*–închisă. Atunci A este w^*–compactă.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} U^\circ &= \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) \geq -1 \ \ \forall x \in U\} = \{\varphi \in X^* \mid |\varphi(x)| \leq 1 \ \ \forall x \in U\} \\ &= U^*. \end{aligned}$$

Cum U este vecinătate a originii, aplicând Teorema Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.6.3), U^* este w^*–compactă. Deoarece A este mărginită, există $\rho > 0$ astfel ca $A \subset \rho U^*$. Mulţimea A fiind submulţime w^*–închisă a unei mulţimi w^*–compacte, este la rândul ei w^*–compactă. ∎

Un alt rezultat, util în aplicaţii, este

Teorema 1.8.2 *Fie $(X, \| \ \|)$ spaţiu norma şi $x \in X$. Atunci*

$$\|x\| = \max\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in U^*\} = \max\{\varphi(x) \mid \varphi \in U^*\} = \max\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in S^*\}.$$

Demonstraţie. Pentru $x = 0$ concluzia este evidentă. Fie deci $x \neq 0$. Este clar că

$$\|x\| \geq \sup\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in U^*\} = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi \in U^*\}.$$

Considerând $X_0 := \mathbb{R}x$, $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(\lambda x) := \lambda\|x\|$, şi luând $p = \|\cdot\|$, avem că $\varphi_0 \in X_0'$ şi $\varphi_0(u) \leq p(u)$ pentru orice $u \in X_0$. Aplicând Teorema Hahn-Banach (Teorema 1.3.3), există $\varphi_1 \in X'$ astfel ca $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) = \|x\|$ şi $\varphi_1(u) \leq \|u\|$ pentru orice $u \in X$, adică $\varphi_1 \in X^*$ şi $\|\varphi_1\| \leq 1$ (de fapt $\|\varphi_1\| = 1$). Obţinem astfel că

$$\|x\| = \varphi_1(x) \leq \sup\{\varphi(x) \mid \varphi \in S^*\} \leq \sup\{\varphi(x) \mid \varphi \in U^*\} \leq \|x\|.$$

Prin urmare concluzia are loc. ∎

Teorema 1.8.3 *Fie $(X, \| \ \|)$ şi $(Y, \| \ \|)$ două spaţii normate.*

(i) *Dacă Y este spaţiu Banach atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ este spaţiu Banach. În particular X^* este spaţiu Banach.*

(ii) *Dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ atunci $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ şi $\|T^*\| = \|T\|$.* ∎

Fie acum $x \in (X, \| \ \|)$; este evident că aplicaţia

$$X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle \in I\!R$$

este liniară şi continuă ($|\langle x, \varphi \rangle| \le \|x\| \cdot \|\varphi\|$) şi deci este un element din $(X^*, \| \ \|)^* =: X^{**}$; notăm cu $J_X(x)$ acest element. Deci $J_X : X \to X^{**}$. Este uşor de dovedit (exerciţiu !) că J_X este operator liniar. În plus avem că pentru orice $x \in X$

$$\|J_X(x)\| = \sup_{\varphi \in U^*} |J_X(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in U^*} |\langle x, \varphi \rangle| = \|x\|.$$

Prin urmare J_X este injectiv. Spunem că spaţiul normat $(X, \| \ \|)$ este *reflexiv* dacă operatorul J_X definit mai sus este surjectiv. Ţinând seama de relaţia $\|J_X(x)\| = \|x\|$ şi de faptul că dualul unui spaţiu normat este spaţiu Banach (Teorema 1.8.3), rezultă rapid (exerciţiu !) că dacă X este reflexiv atunci X este spaţiu Banach.

Următorul rezultat este unul dintre cele mai profunde rezultate din teoria spaţiilor normate.

Teorema 1.8.4 (James). *Fie $(X, \| \ \|)$ spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *X este reflexiv;*

(ii) *$\{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ este mulţime w–compactă;*

(iii) $\forall \, \varphi \in X^*, \ \exists \, x \in X, \ \|x\| \le 1 \ : \ \|\varphi\| = \varphi(x).$ ∎

Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, spaţiul X^{**} se identifică (prin intermediul operatorului J_X de mai sus) cu X. O consecinţă importantă a teoremei precedente este aceea că orice mulţime convexă, închisă şi mărginită dintr-un spaţiu Banach reflexiv este w–compactă.

În analiza funcţională, ca şi în algebră de altfel, de multe ori este convenabilă utilizarea unor subspaţii sau spaţii cât. Am văzut deja în secţiunea precedentă definiţiile şi două rezultate generale referitoare la spaţii local convexe. Dăm în continuare varianta corespunzătoare spaţiilor normate pentru spaţii cât.

Teorema 1.8.5 *Fie $(X, \| \ \|)$ spaţiu liniar normat şi $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar închis. Considerăm aplicaţia*

$$N : X/X_0 \to I\!R, \quad N(\hat{x}) = \inf\{\|x + u\| \mid u \in X_0\}.$$

Atunci

(i) *N este normă pe X/X_0, notată în continuare prin $\| \ \|$. În plus, dacă $(X, \| \ \|)$ este spaţiu Banach atunci şi $(X/X_0, \| \ \|)$ este spaţiu Banach.*

(ii) *Aplicaţia $\boldsymbol{F} : (X/X_0)^* \to X_0^\perp$, $\boldsymbol{F}(\chi) := \mathrm{Pr}^*(\chi)$ este izometrie (liniară) şi homeomorfism de la $(X/X_0)^*$ înzestrat cu topologia slab-stelată la $X_0^\perp$ înzestrat cu urma topologiei $\sigma(X^*, X)$. În plus*

$$\|\hat{x}\| = \max\{\langle x, \varphi\rangle \mid \varphi \in X_0^\perp, \ \|\varphi\| \le 1\}.$$

(iii) *${X_0}^* = \{\varphi|_{X_0} \mid \varphi \in X^*\}$, iar aplicaţia $\Psi : X^*/X_0^\perp \to {X_0}^*$, definită prin $\Psi(\widehat{\varphi}) := \varphi|_{X_0}$ $(\varphi \in X^*)$, este izometrie.*

Demonstraţie. (i) Fie x, $y \in X$. Atunci

$$\begin{aligned} N(\hat{x} + \hat{y}) &= N(\widehat{x+y}) = \inf\{\|x + u + y + v\| \mid u, v \in X_0\} \\ &\le \inf\{\|x + u\| + \|y + v\| \mid u, v \in X_0\} \\ &= \inf\{\|x + u\| \mid u \in X_0\} + \inf\{\|y + v\| \mid v \in X_0\} \\ &= N(\hat{x}) + N(\hat{y}). \end{aligned}$$

Dacă $\lambda \neq 0$, atunci

$$\begin{aligned} N(\lambda\hat{x}) &= N(\widehat{\lambda x}) = \inf\{\|\lambda x + \lambda u\| \mid u \in X_0\} = |\lambda| \cdot \inf\{\|x + u\| \mid u \in X_0\} \\ &= |\lambda| N(\hat{x}). \end{aligned}$$

Relaţia este evidentă pentru $\lambda = 0$. Dacă $N(\hat{x}) = 0 = \inf\{\|x + u\| \mid u \in X_0\}$, atunci există $(u_n) \subset X_0$, $x + u_n \to 0$, adică $X_0 \ni -u_n \to x$. Prin urmare $x \in \overline{X_0} = X_0$, ceea ce arată că $\hat{x} = \hat{0} = 0$. Am obţinut că N este normă (şi o vom nota în continuare prin $\| \ \|$).

Presupunem acum că $(X, \| \ \|)$ este spaţiu Banach şi fie $(x_n) \subset X$ astfel ca $(\hat{x}_n)$ să fie şir Cauchy în X/X_0. Atunci există un şir strict crescător $(n_k) \subset \mathbb{N}$ astfel ca

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall\, n, m \ge n_k \ : \ \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\| < 2^{-k}.$$

Cum $\|\hat{x}_{n_k} - \hat{x}_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$, există $u_k \in X_0$ astfel ca $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}} - u_k\| < 2^{-k}$. Luăm $y_0 := 0$ şi $y_k := x_{n_k} + u_0 + \cdots + u_{k-1}$ pentru $k \ge 1$; obţinem că $\|y_k - y_{k+1}\| < 2^{-k}$. Deci seria $\sum_{k \ge 1}(y_k - y_{k+1})$ este absolut convergentă. Cum X este spaţiu Banach, seria este convergentă, ceea ce antrenează că şirul (y_k) este convergent la un element $x \in X$. Deoarece $\|\hat{x}_{n_k} - \hat{x}\| = \|\hat{y}_k - \hat{x}\| \le \|y_k - x\|$, avem că $\hat{x}_{n_k} \to \hat{x} \in X/X_0$. Cum $(\hat{x}_n)$ este şir Cauchy, $\hat{x}_n \to \hat{x}$. Deci X/X_0 este spaţiu Banach.

(ii) Am văzut în Teorema 1.7.2 că $\boldsymbol{F}$ este un izomorfism de spaţii local convexe, $(X/X_0)^*$ fiind înzestrat cu topologia $\sigma((X/X_0)^*, X/X_0)$, iar $X_0^\perp$ fiind înzestrat cu urma topologiei $\sigma(X^*, X)$ pe $X_0^\perp$.

Fie $\chi \in (X/X_0)^*$ şi $\varphi = \boldsymbol{F}(\chi) = \chi \circ \mathrm{Pr} \in X^*$. Avem că

$$|\chi(\hat{x})| = |\varphi(x+u)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x+u\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in X_0.$$

Luând infimul în raport cu u în membrul drept, obţinem că $|\chi(\hat{x})| \leq \|\varphi\| \cdot \|\hat{x}\|$ pentru orice $\hat{x} \in X/X_0$, ceea ce arată că $\|\chi\| \leq \|\varphi\|$. Însă avem şi

$$\|\varphi\| = \sup\{\langle x, \varphi\rangle \mid x \in X,\ \|x\| \leq 1\},$$

$$\|\chi\| = \sup\{\langle \hat{x}, \chi\rangle \mid \hat{x} \in X/X_0,\ \|\hat{x}\| \leq 1\} = \sup\{\langle x, \varphi\rangle \mid x \in X,\ \|\hat{x}\| \leq 1\}.$$

Cum $\{x \in X \mid \|\hat{x}\| \leq 1\} \supset \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, avem că $\|\chi\| \geq \|\varphi\|$. Utilizând şi inegalitatea inversă obţinută mai sus, avem că $\|\boldsymbol{F}(\chi)\| = \|\chi\|$ pentru orice $\chi \in (X/X_0)^*$. Deci $\boldsymbol{F}$ este izometrie.

Din Teorema 1.8.2 şi cele arătate mai înainte, avem că

$$\|\hat{x}\| = \max\{\langle \hat{x}, \chi\rangle \mid \|\chi\| \leq 1\} = \max\{\langle x, \varphi\rangle \mid \varphi \in X_0^{\perp},\ \|\varphi\| \leq 1\}.$$

(iii) Din Teorema 1.7.1 avem că ${X_0}^* = \{\varphi|_{X_0} \mid \varphi \in X^*\}$. Este evident că Ψ este liniară. În plus, dacă $\Psi(\widehat{\varphi}) = 0$ atunci $\varphi|_{X_0} = 0$, adică $\varphi \in X_0^{\perp}$. Am obţinut astfel că Ψ este bijectivă şi liniară.

Fie $\varphi \in X^*$ şi $\varphi_0 = \varphi|_{X_0} \in {X_0}^*$. Pentru $\psi \in X_0^{\perp}$ şi $x \in X_0,\ \|x\| \leq 1$, avem

$$\langle x, \varphi\rangle = \langle x, \varphi + \psi\rangle \leq \|x\| \cdot \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi + \psi\|,$$

şi deci

$$\|\varphi_0\| = \sup\{\langle x, \varphi\rangle \mid x \in X_0,\ \|x\| \leq 1\} \leq \inf\{\|\varphi + \psi\| \mid \psi \in X_0^{\perp}\} = \|\widehat{\varphi}\|.$$

Prin urmare $\|\Psi(\widehat{\varphi})\| \leq \|\widehat{\varphi}\|$. Aplicând Teorema 2.7.3 (relaţia (2.42)), în relaţia de mai sus are loc chiar egalitate şi deci Ψ este izometrie. ∎

Este posibil ca pe un spaţiu liniar să avem mai multe norme. Dacă $\|\ \|_1$ şi $\|\ \|_2$ sunt două norme pe X, iar τ_1 şi τ_2 sunt topologiile corespunzătoare, din Teorema 1.4.5 avem că

$$\tau_2 \preceq \tau_1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in X\ :\ \|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1.$$

În mod corespunzător, obţinem că

$$\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \exists\,\alpha, \beta > 0,\ \forall\, x \in X\ :\ \alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1.$$

Dacă $(X, \| \ \|)$ şi $(Y, \| \ \|)$ sunt spaţii normate, pe $X \times Y$ considerăm norma $\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}$, conformă cu definiţia produsului a două spaţii local convexe (a se vedea secţiunea precedentă). Se mai pot introduce şi alte norme pe $X \times Y$: $\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$, $\|(x,y)\|_2 := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, etc. Se verifică cu uşurinţă (exerciţiu !) că acestea sunt norme şi sunt echivalente. Mai exact

$$\|(x,y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1 \le 2\|(x,y)\|_\infty \quad \forall\,(x,y) \in X \times Y.$$

Se poate arăta (exerciţiu !) că normele duale ale normelor $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_2$ şi $\| \ \|_1$ sunt respectiv $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ şi $\| \ \|_\infty$ pe $X^* \times Y^*$.

Dorim să prezentăm în continuare câteva rezultate importante ale analizei funcţionale, precum o generalizare semnificativă a principiului aplicaţiilor deschise datorată lui C. Ursescu şi S. Robinson, principiul aplicaţiilor deschise, teorema graficului închis, teorema imaginei închise. Un rezultat ajutător, aplicaţie a Teoremei lui Baire (Teorema 1.2.5), este dat în teorema următoare.

Teorema 1.8.6 *Fie $(X, \| \ \|)$ spaţiu Banach şi $V \subset X$ o mulţime convexă, închisă şi absorbantă. Atunci V este vecinătate a originii.*

Demonstraţie. Fie $W := V \cap -V$; mulţimea W este convexă, închisă, simetrică şi absorbantă. Din faptul că W este absorbantă, rezultă imediat că $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} nW$. Cum W este închisă, nW este închisă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi deci, aplicând Teorema lui Baire amintită mai sus, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\operatorname{int}(n_0 W) = n_0 \cdot \operatorname{int} W \ne \emptyset$. Prin urmare $\operatorname{int} W \ne \emptyset$. Fie $\bar{x} \in \operatorname{int} W$; deoarece W este simetrică, $-\bar{x} \in \operatorname{int} W$, iar din convexitatea mulţimii $\operatorname{int} W$ (a se vedea Teorema 1.4.3) obţinem că $0 = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}(-\bar{x}) \in \operatorname{int} W$. Prin urmare W este vecinătate a originii, şi cum $W \subset V$, V este vecinătate a originii. ∎

În spaţii finit dimensionale condiţiile teoremei precedente pot fi slăbite.

Teorema 1.8.7 *Fie $(X, \| \ \|)$ un spaţiu normat finit dimensional şi $V \subset X$ o mulţime convexă şi absorbantă. Atunci V este vecină-tate a originii.* ∎

Pentru a formula Teorema lui Robinson-Ursescu avem nevoie de câteva noţiuni.

Fie X, Y două mulţimi nevide şi $\mathcal{R} \subset X \times Y$; $\mathcal{R}$ se numeşte *relaţie.* Mulţimea $\operatorname{dom} \mathcal{R} := \{x \in X \mid \exists\, y \in Y\ :\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$ se numeşte *domeniul* relaţiei $\mathcal{R}$; *imaginea* lui $\mathcal{R}$ este $\operatorname{Im} \mathcal{R} := \{y \in Y \mid \exists\, x \in X\ :\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$;

inversa relaţiei $\mathcal{R}$ este relaţia $\mathcal{R}^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{R}\} \subset Y \times X$. Prin urmare $\operatorname{dom}\mathcal{R}^{-1} = \operatorname{Im}\mathcal{R}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{R}^{-1} = \operatorname{dom}\mathcal{R}$. Pentru $x \in X$ considerăm mulţimea $\mathcal{R}(x) := \{y \in Y \mid (x,y) \in \mathcal{R}\}$; deci $\operatorname{dom}\mathcal{R} = \{x \in X \mid \mathcal{R}(x) \neq \emptyset\}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{R} = \bigcup_{x\in X}\mathcal{R}(x) = \bigcup_{x\in\operatorname{dom}\mathcal{R}}\mathcal{R}(x)$. Pentru $A \subset X$, $B \subset Y$ definim $\mathcal{R}(A) := \bigcup_{x\in A}\mathcal{R}(x)$ şi $\mathcal{R}^{-1}(B) := \bigcup_{y\in B}\mathcal{R}^{-1}(y)$.

Din cele de mai sus se observă că relaţiei $\mathcal{R} \subset X \times Y$ i se asociază funcţia $X \ni x \mapsto \mathcal{R}(x) \in \mathcal{P}(Y)$. O funcţie $\mathcal{S} : X \to \mathcal{P}(Y)$, notată în continuare prin $\mathcal{S} : X \rightsquigarrow Y$, se numeşte *aplicaţie multivocă* de la X la Y. Unei astfel de funcţii $\mathcal{S}$ putem să-i asociem relaţia $\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \mathcal{S}(x)\}$; această mulţime se numeşte *graficul* aplicaţiei $\mathcal{S}$. Se obişnuieşte să se identifice o aplicaţie multivocă cu graficul ei, ceea ce vom face şi noi în continuare.

Fie acum $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ două spaţii normate şi $\mathcal{R} \subset X \times Y$. Spunem că $\mathcal{R}$ este *relaţie convexă (închisă)* dacă $\mathcal{R}$ este submulţime convexă (închisă) a lui $X \times Y$. Este evident că $\mathcal{R}$ este convexă (închisă) dacă şi numai dacă $\mathcal{R}^{-1}$ este convexă (închisă), iar dacă $A \subset X$ şi $\mathcal{R}$ sunt convexe atunci $\mathcal{R}(A)$ este convexă (exerciţiu !); în particular, dacă $\mathcal{R}$ este convexă atunci $\operatorname{dom}\mathcal{R}$ şi $\operatorname{Im}\mathcal{R}$ sunt mulţimi convexe.

Putem formula acum Teorema Robinson-Ursescu.

Teorema 1.8.8 (Robinson-Ursescu). *Fie* $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ *spaţii Banach şi* $\mathcal{R} \subset X \times Y$ *o relaţie convexă şi închisă. Fie de asemenea* $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ *astfel ca* $y_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{Im}\mathcal{R})$. *Atunci*

$$\forall V \in \mathcal{V}_X(x_0) \ : \ \mathcal{R}(V) \in \mathcal{V}_Y(y_0).$$

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, considerând eventual relaţia $\widetilde{\mathcal{R}} := \mathcal{R} - (x_0, y_0)$, presupunem că $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Fie $B := \mathcal{R}(U_X) \subset Y$. Mulţimea B este convexă şi absorbantă. Faptul că B este mulţime convexă l-am observat mai sus. Fie $y \in Y$; deoarece $0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{Im}\mathcal{R})$, există $\lambda > 0$ astfel ca $\lambda y \in \operatorname{Im}\mathcal{R}$, adică există $x \in X$ cu $(x, \lambda y) \in \mathcal{R}$. Cum U_X este absorbantă, există $\mu \in]0,1[$ astfel încât $\mu x \in U_X$. Deci $(\mu\lambda)y \in \mathcal{R}(U_X) = B$, deoarece $(\mu x, \mu\lambda y) = \mu(x, \lambda y) + (1-\mu)(0,0) \in \mathcal{R}$. Cum B este convexă, rezultă că B este absorbantă. Avem deci că $\overline{B}$ este convexă, închisă şi absorbantă. Din Teorema 1.8.6 obţinem că $0 \in \operatorname{int}\overline{B}$ şi deci există $\rho > 0$ astfel ca $\rho U_Y \subset \overline{B}$.

Să arătăm acum că $\rho B_Y \subset B = \mathcal{R}(U_X)$. Fie deci $y \in \rho B_Y$; există $\mu > 1$ astfel ca $\mu\|y\| < \rho$. Considerăm $y_0 := \mu y$, $\lambda := 1 - \mu^{-1}$ şi $\varepsilon := \rho\lambda > 0$. Deoarece $y_0 \in \rho B_Y \subset \overline{\mathcal{R}(U_X)}$, există $(x_1, y_1) \in \mathcal{R}$ astfel ca $x_1 \in U_X$ şi $\|y_0 - y_1\| < \varepsilon$; deci $\|\frac{1}{\lambda}y_0 - \frac{1}{\lambda}y_1\| < \rho$. Din nou, există $(x_2, y_2) \in \mathcal{R}$ astfel ca $x_2 \in U_X$ şi $\|\frac{1}{\lambda}y_0 - \frac{1}{\lambda}y_1 - y_2\| < \varepsilon$; deci $\|\frac{1}{\lambda^2}y_0 - \frac{1}{\lambda^2}y_1 - \frac{1}{\lambda}y_2\| < \rho$. Continuând în acest mod obţinem şirul $(\,(x_n, y_n)\,)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ astfel încât $(x_n) \subset U_X$ şi $\|\frac{1}{\lambda^{n-1}}y_0 - \frac{1}{\lambda^{n-1}}y_1 - \cdots - y_n\| < \varepsilon$, adică

$$\|y_0 - y_1 - \lambda y_2 - \cdots - \lambda^{n-1}y_n\| < \varepsilon\lambda^{n-1} = \rho\lambda^n \to 0.$$

Prin urmare

$$(1-\lambda)(y_1 + \lambda y_2 + \cdots + \lambda^{n-1}y_n) \to (1-\lambda)y_0 = y.$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda^{n-1}x_n\|$ este convergentă şi X este spaţiu Banach, avem că $x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda^{n-1}x_n \to x_0 \in X$, de unde

$$(1-\lambda)(x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda^{n-1}x_n) \to (1-\lambda)x_0 = x.$$

În plus $\|x\| \le 1$. Însă

$$(1-\lambda)(x_1, y_1) + (1-\lambda)\lambda(x_2, y_2) + \cdots + (1-\lambda)\lambda^{n-1}(x_n, y_n) + \lambda^n(0,0) \in \mathcal{R},$$

deoarece $\mathcal{R}$ este convexă; prin urmare $(x, y) \in \mathcal{R}$. Am găsit astfel $x \in U_X$ cu $(x, y) \in \mathcal{R}$, ceea ce arată că $\rho B_Y \subset \mathcal{R}(U_X)$.

Fie acum $\mu > 0$ şi $\mu' \in]0, \mu]$; avem că $\mathcal{R}(\mu' U_X) \supset \frac{\mu'}{\mu}\mathcal{R}(\mu U_X)$. Într-adevăr, fie $y \in \mathcal{R}(\mu U_X)$; există $x \in \mu U_X$ astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$. Rezultă că $\left(\frac{\mu'}{\mu}x, \frac{\mu'}{\mu}y\right) = \frac{\mu'}{\mu}(x, y) + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)(0,0) \in \mathcal{R}$. Deoarece $\frac{\mu'}{\mu}x \in \mu' U_X$, incluziunea dorită este dovedită; în particular $\mathcal{R}(\mu' U_X) \supset \mu'\mathcal{R}(U_X) \supset \mu'\rho B_Y$ pentru orice $\mu' \in]0, 1]$. Demonstraţia este terminată. ∎

Formulăm acum două consecinţe importante ale Teoremei lui Robinson-Ursescu. Reamintim că *graficul* operatorului (aplicaţiei) $f : X \to Y$ este mulţimea $\operatorname{gr} f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$. Este evident că graficul oricărei aplicaţii continue este mulţime închisă. Teorema următoare furnizează o reciprocă a acestui rezultat.

Teorema 1.8.9 (a graficului închis). *Fie $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar. Atunci operatorul T este continuu dacă şi numai dacă $\operatorname{gr} T$ este mulţime închisă în $X \times Y$.*

Demonstraţie. Este evident că dacă T este continuu (chiar fără a fi liniar), $\operatorname{gr} T$ este mulţime închisă. Fie deci $\operatorname{gr} T$ mulţime închisă şi considerăm relaţia $\mathcal{R} := \{(Tx, x) \mid x \in X\} = (\operatorname{gr} T)^{-1} \subset Y \times X$. Este evident că $\mathcal{R}$ este mulţime convexă (chiar subspaţiu liniar) şi închisă. În plus $\operatorname{Im}\mathcal{R} = X$. Prin urmare putem aplica Teorema lui Robinson-Ursescu pentru $(x_0, y_0) = (0,0)$. Deci

$$\forall V \in \mathcal{V}_Y(0)\ :\ \mathcal{R}(V) = T^{-1}(V) \in \mathcal{V}_X(0),$$

adică T este continuu în origine. Cum T este liniar, prin Teorema 1.4.6, T este continuu. ∎

O consecinţă imediată a teoremei precedente este

Consecinţa 1.8.1 (Banach-Steinhaus). *Fie $(X, \| \ \|)$, $(Y, \| \ \|)$ spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar şi bijectiv. Atunci T şi T^{-1} sunt simultan continui sau discontinui; în particular, dacă în plus T este continuu atunci T este izomorfism de spaţii normate.*

Demonstraţie. Se aplică teorema graficului închis pentru T şi T^{-1}. ∎

Un alt rezultat interesant şi util este furnizat de consecinţa următoare.

Consecinţa 1.8.2 *Fie $(X, \| \ \|)$, $(Y, \| \ \|)$ spaţii Banach, $A \subset X$ şi operatorul $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Presupunem că $\operatorname{Im} T$ este mulţime închisă. Atunci $T(A)$ este mulţime închisă dacă şi numai dacă $A + \ker T$ este mulţime închisă.*

Demonstraţie. Înlocuind eventual Y prin $\operatorname{Im} T$ şi T prin $T' : X \to \operatorname{Im} T$, $T'x := Tx$, putem presupune că T este surjectiv. Considerăm operatorul $\widehat{T} : X/\ker T \to Y$, $\widehat{T}\hat{x} := Tx$. Este uşor de verificat că $\widehat{T}$ este operator bine definit, liniar şi bijectiv. În plus

$$\|\widehat{T}\hat{x}\| = \|Tx\| = \|T(x+u)\| \le \|T\| \cdot \|x+u\| \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, u \in \ker T,$$

de unde obţinem că $\|\widehat{T}\hat{x}\| \le \|T\| \cdot \|\hat{x}\|$ pentru orice $\hat{x} \in X/\ker T$. Prin urmare $\widehat{T}$ este continuu, iar din Consecinţa 1.8.1 obţinem că $\widehat{T}$ este izomorfism de spaţii normate. Este clar că $T(A) = \widehat{T}(\hat{A})$, unde $\hat{A} := \{\hat{x} \mid x \in A\} = \Pr(A)$. Utilizând şi Teorema 1.7.2, obţinem că

$$T(A) \text{ este închisă } \Leftrightarrow \ \hat{A} \text{ este închisă } \Leftrightarrow \ A + \ker T \text{ este închisă},$$

adică are loc concluzia. ∎

Teorema 1.8.10 (principiul aplicaţiilor deschise). *Fie $(X, \| \ \|)$, $(Y, \| \ \|)$ spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar, continuu şi surjectiv. Atunci T este aplicaţie* deschisă, *adică $T(D)$ este mulţime deschisă în Y pentru orice mulţime deschisă $D \subset X$.*

Demonstraţie. Fie relaţia $\mathcal{R} := \operatorname{gr} T$. Operatorul T fiind liniar, continuu şi surjectiv, avem că $\mathcal{R}$ este relaţie convexă, închisă şi $\operatorname{Im} \mathcal{R} = T(X) = Y$. Fie $D \subset X$ o mulţime deschisă şi $y_0 \in T(D) = \mathcal{R}(D)$; există $x_0 \in D$ astfel ca $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ ($\Leftrightarrow$ $y_0 = Tx_0$). Aplicând Teorema lui Robinson-Ursescu pentru acest punct, cum $D \in \mathcal{V}_X(x_0)$, obţinem că $T(D) \in \mathcal{V}(y_0)$. Deci $T(D)$ este deschisă. ∎

Un rezultat interesant şi util în multe aplicaţii este următorul.

Teorema 1.8.11 *Fie $(X, \| \|)$, $(Y, \| \|)$ spaţii Banach şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\operatorname{Im} T$ *este mulţime închisă;*

(ii) $\exists \rho_1 > 0 \ : \ \operatorname{Im} T \cap U_Y \subset T(\rho_1 U_X)$;

(iii) $\exists \rho_2 > 0 \ : \ \operatorname{Im} T^* \cap U_{X^*} \subset T^*(\rho_2 U_{Y^*})$;

(iv) $\operatorname{Im} T^*$ *este mulţime închisă (în normă);*

(v) $\operatorname{Im} T^*$ *este mulţime w^*–închisă ($\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$).*

În plus, în implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (iii) se poate lua $\rho_2 = \rho_1$, iar în implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (ii) se poate lua orice $\rho_1 > \rho_2$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Considerăm operatorul $T_1 : X \to \operatorname{Im} T =: Y_1$, $T_1 x := Tx$. Atunci $T_1 \in \mathcal{L}(X, Y_1)$ şi este surjectiv. Cum Y_1 este spaţiu Banach, din principiul aplicaţiilor deschise, rezultă că există $\rho_1 > 0$ astfel ca $U_{Y_1} \subset T_1(\rho_1 U_X)$, ceea ce arată că are loc concluzia.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Condiţia din (ii) poate fi reformulată sub forma

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} T,\ \exists\, x \in X \ : \ Tx = y,\ \|x\| \le \rho_1 \|y\|. \tag{1.23}$$

Fie $(y_n) \subset \operatorname{Im} T$, $y_n \to y \in Y$. Există $(n_k) \subset \mathbb{N}$ un şir strict crescător astfel ca $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < 2^{-k}$ pentru orice $k \ge 1$. Din (1.23), pentru fiecare $k \ge 1$ există $u_k \in X$ astfel ca $Tu_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ şi $\|u_k\| < \rho_1/2^k$. Fie $x_1 \in X$ astfel ca $Tx_1 = y_{n_1}$ şi $x_k := x_1 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ pentru $k \ge 2$. Atunci $Tx_k = y_{n_k}$ pentru $k \ge 1$; cum seria $\sum_{k=1}^{n} u_k$ este absolut convergentă şi X este spaţiu Banach, seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ este convergentă. Prin urmare şirul (x_k) converge la un element $x \in X$. Obţinem astfel că $Tx_k = y_{n_k} \to Tx = y$. Deci $\operatorname{Im} T$ este mulţime închisă în normă.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fie $x^* \in (\ker T)^\perp \cap U_{X^*}$. Considerăm aplicaţia $\psi : \operatorname{Im} T \to \mathbb{R}$, $\psi(y) := \langle x, x^* \rangle$, unde $y = Tx$. Este evident că ψ este bine definită şi liniară. În plus, pentru $y \in \operatorname{Im} T$, din ipoteză, există $x \in X$ astfel ca $y = Tx$ şi $\|x\| \le \rho_1 \|y\|$. Prin urmare $\psi(y) \le \|x\| \cdot \|x^*\| \le \rho_1 \|x^*\| \cdot \|y\|$. Aplicând Teorema lui Hahn-Banach, există $y^* \in Y'$ astfel ca $y^*(y) = \langle y, y^* \rangle \le \rho_1 \|x^*\| \cdot \|y\|$ pentru orice $y \in Y$, adică $y^* \in Y^*$ şi $\|y^*\| \le \rho_1 \|x^*\|$, şi $\langle Tx, y^* \rangle = \psi(Tx) = \langle x, x^* \rangle$ pentru orice $x \in X$, adică $x^* = T^* y^*$. Am obţinut astfel că

$$\operatorname{Im} T^* \cap U_{X^*} \subset (\ker T)^\perp \cap U_{X^*} \subset T^*(\rho_1 U_{Y^*}). \tag{1.24}$$

Prin urmare (iii) are loc cu $\rho_2 = \rho_1$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Arătăm pentru început că $\operatorname{Im} T \cap U_Y \subset \overline{T(\rho_2 U_X)}$. În caz contrar, există $\bar{y} \in \operatorname{Im} T \cap U_Y$ astfel ca $\bar{y} \notin \overline{T(\rho_2 U_X)}$. Aplicând o teoremă de separare, există $\bar{y}^* \in Y^* \setminus \{0\}$ astfel ca

$$\begin{aligned}\langle \bar{y}, \bar{y}^* \rangle &> \sup\{\langle Tx, \bar{y}^* \rangle \mid x \in \rho_2 U_X\} = \sup\{\langle x, T^*\bar{y}^* \rangle \mid x \in \rho_2 U_X\} \\ &= \rho_2 \|T^*\bar{y}^*\|. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Este clar că $T^*\bar{y}^* \neq 0$; altfel $\bar{y}^* \in \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ şi deci $\langle \bar{y}, \bar{y}^* \rangle = 0$, contrazicând relaţia (1.25). Luând $x^* := T^*\bar{y}^*$, putem presupune că $\|x^*\| = 1$. Datorită ipotezei, înlocuind eventual pe $\bar{y}^*$ cu un alt element, în (1.25) putem considera că $\|\bar{y}^*\| \leq \rho_2$. Din (1.25) obţinem că

$$\rho_2 \geq \|\bar{y}\| \cdot \|\bar{y}^*\| > \rho_2 \|T^*\bar{y}^*\| = \rho_2,$$

absurd. Reluând partea a doua a demonstraţiei Teoremei lui Robinson-Ursescu obţinem că $\operatorname{Im} T \cap B_Y \subset T(\rho_2 U_X)$, şi deci $\operatorname{Im} T \cap U_Y \subset T(\rho_1 U_X)$ pentru orice $\rho_1 > \rho_2$.

Echivalenţa condiţiilor (iii) şi (iv) rezultă din cea a condiţiilor (i) şi (ii) aplicată operatorului T^*.

(ii) $\Rightarrow$ (v) Presupunând că (ii) are loc, am văzut mai sus că au loc incluziunile din (1.24). Prin urmare avem că $(\ker T)^\perp \subset \operatorname{Im} T^*$. Cum incluziunea inversă are loc întotdeauna, avem că $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$, şi deci $\operatorname{Im} T^*$ este mulţime w^*–închisă.

Implicaţia (v) $\Rightarrow$ (iv) este evidentă. ∎

Echivalenţa condiţiilor (i), (iv) şi (v) din teorema precedentă se întâlneşte în literatură sub denumirea de *teorema imaginei închise* (*closed range theorem* în terminologie engleză). Următoarele două cazuri particulare ale teoremei precedente pot fi utile.

Consecinţa 1.8.3 *Fie* $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ *spaţii Banach şi* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Ur-mă-toarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) T *este injectiv şi* $\operatorname{Im} T$ *este mulţime închisă;*

(ii) $\exists \rho_1 > 0,\ \forall x \in X\ :\ \|Tx\| \geq \rho_1 \|x\|$;

(iii) T *este injectiv şi* $\exists\, \rho_1 > 0$ *astfel ca* $\operatorname{Im} T \cap \rho_1 U_Y \subset T(U_X)$;

(iv) $\exists \rho_2 > 0$ *astfel ca* $\rho_2 U_{X^*} \subset T^*(U_{Y^*})$;

(v) T^* *este surjectiv.*

În plus, în echivalenţa (ii) $\Leftrightarrow$ *(iii) se poate lua acelaşi* ρ_1, *în implicaţia (iii)* $\Rightarrow$ *(iv) se poate lua* $\rho_2 = \rho_1$, *iar în implicaţia (iv)* $\Rightarrow$ *(iii) se poate lua orice* $\rho_1 \in]0, \rho_2[$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie $T_1 : X \to \operatorname{Im} T =: Y_1$, $T_1 x := Tx$; T_1 este operator liniar, continuu şi bijectiv. Cum Y_1 este spaţiu Banach, din Consecinţa 1.8.1, ${T_1}^{-1} \in \mathcal{L}(Y_1, X)$. Avem deci că

$$\|x\| = \|{T_1}^{-1}(Tx)\| \leq \|{T_1}^{-1}\| \cdot \|Tx\| \ \ \forall\, x \in X.$$

Luând $\rho_1 := 1/\|{T_1}^{-1}\|$, concluzia are loc.

Echivalenţa condiţiilor (ii) şi (iii) este imediată.

Implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (i) rezultă din implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (i) din teorema precedentă.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Din relaţia $\operatorname{Im} T \cap \rho_1 U_Y \subset T(U_X)$, utilizând şi implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (iii) din teorema precedentă, avem că $\operatorname{Im} T^* \cap \rho_1 U_{X^*} \subset T^*(U_{Y^*})$. Dar, tot din teorema precedentă, avem că $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp = \{0\}^\perp = X^*$, deoarece T este injectiv. Deci (iv) are loc cu $\rho_2 = \rho_1$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Incluziunea din condiţia (iv) ne arată că T^* este surjectiv, şi deci $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp = \{0\}$, adică T este injectiv. Aceeaşi incluziune ne arată, utilizând implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (ii) din teorema precedentă, că are loc şi incluziunea din (iii), luând $1/\rho_1 > 1/\rho_2$, adică $\rho_1 \in]0, \rho_2[$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) este evidentă.

(v) $\Rightarrow$ (i) rezultă din relaţia $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$. ∎

Consecinţa 1.8.4 *Fie $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ spaţii Banach şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ur-mă-toarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *T este surjectiv;*

(ii) *$\exists \rho_1 > 0$ astfel ca $\rho_1 U_Y \subset T(U_X)$;*

(iii) *T^* este injectiv şi $\exists\, \rho_2 > 0$ astfel ca $\operatorname{Im} T^* \cap \rho_2 U_{X^*} \subset T^*(U_{Y^*})$;*

(iv) *$\exists \rho_2 > 0$, $\forall\, y^* \in Y^*$: $\|T^* y^*\| \geq \rho_2 \|y^*\|$;*

(v) *T^* este injectiv şi $\operatorname{Im} T^*$ este mulţime (w^*–)închisă.*

În plus, în echivalenţa (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) se poate lua acelaşi ρ_2, în implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (iii) se poate lua $\rho_2 = \rho_1$, iar în implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (ii) se poate lua orice $\rho_1 \in]0, \rho_2[$.

Demonstraţie. Demonstraţia este analoagă celei a Consecinţei 1.8.3. ∎

Consecinţa 1.8.5 *Fie $(X, \|\ \|)$ spaţiu Banach şi X_1, $X_2 \subset X$ subspaţii liniare închise astfel ca $X_1 + X_2$ să fie închis. Atunci există $l > 0$ astfel ca*

$$\forall\, x \in X_1 + X_2,\ \exists\, x_1 \in X_1,\ \exists\, x_2 \in X_2\ :\ x = x_1 + x_2,\ \|x_1\| + \|x_2\| \leq l \cdot \|x\|.$$

În particular, dacă $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ atunci $\|x_1\| + \|x_2\| \leq l \cdot \|x_1 + x_2\|$ pentru orice $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Demonstraţie. Spaţiul $Y := X_1 \times X_2$, înzestrat cu norma definită prin $\|(x_1, x_2)\| := \|x_1\| + \|x_2\|$, este spaţiu Banach. Operatorul $T : Y \to X$, $T(x_1, x_2) := x_1 + x_2$, este liniar şi continuu; în plus $\operatorname{Im} T = X_1 + X_2$ este subspaţiu închis. Din Teorema 1.8.11 avem că există $l > 0$ astfel ca $(X_1 + X_2) \cap U_X \subset T(lU_Y)$, adică are loc concluzia. ∎

Înainte de a încheia acest paragraf, facem câteva consideraţii despre aplicaţii biliniare, de care vom avea nevoie în secţiunea următoare.

Fie $(X_1, \|\ \|)$, $(X_2, \|\ \|)$ şi $(Y, \|\ \|)$ trei spaţii normate (reale). Notăm prin $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ mulţimea *aplicaţiilor biliniare* $B : X_1 \times X_2 \to Y$ [adică $B(x_1, \cdot)$ şi $B(\cdot, x_2)$ sunt liniare pentru orice $x_1 \in X_1$ şi $x_2 \in X_2$], care au proprietatea

$$\exists\, M \geq 0,\ \forall\, (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\ :\ \|B(x_1, x_2)\| \leq M \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|.$$

Se poate dovedi uşor (exerciţiu !) că aplicaţia biliniară B satisface condiţia de mai sus dacă şi numai dacă este continuă (în $(0,0)$). Rezultă cu uşurinţă că $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ este spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$. În plus aplicaţia

$$\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y) \ni B \mapsto \|B\| := \sup\{\|B(x_1, x_2)\| \mid \|x_1\| \leq 1,\ \|x_2\| \leq 1\} \in \mathbb{R}$$

este o normă; în cele ce urmează spaţiul $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ este înzestrat cu această normă. În cazul în care $X_1 = X_2 = X$, spaţiul $\mathcal{L}^2(X, X; Y)$ va fi notat prin $\mathcal{L}^2(X; Y)$; spunem că aplicaţia $B \in \mathcal{L}^2(X; Y)$ este *simetrică* dacă pentru orice $x_1,\ x_2 \in X$ are loc relaţia $B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1)$.

Teorema 1.8.12 *Fie $(X_1, \|\ \|)$, $(X_2, \|\ \|)$ şi $(Y, \|\ \|)$ spaţii normate. Atunci aplicaţiile*

$$\boldsymbol{F}_1 : \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y)\,) \to \mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y), \quad (\boldsymbol{F}_1(T))(x_1, x_2) := (Tx_1)(x_2),$$

$$\boldsymbol{F}_2 : \mathcal{L}(X_2, \mathcal{L}(X_1, Y)\,) \to \mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y), \quad (\boldsymbol{F}_2(S))(x_1, x_2) := (Sx_2)(x_1),$$

sunt izometrii de spaţii normate. În plus, dacă Y este spaţiu Banach atunci $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ este spaţiu Banach.

Demonstraţie. Este evident că aplicaţia $\boldsymbol{F}_1(T)$ este biliniară pentru orice $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y)\,)$. În plus

$$\|(\boldsymbol{F}_1(T))(x_1, x_2)\| \leq \|Tx_1\| \cdot \|x_2\| \leq \|T\| \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\|.$$

Obţinem astfel că $\boldsymbol{F}_1(T) \in \mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ şi $\|\boldsymbol{F}_1(T)\| \leq \|T\|$.

Fie $B \in \mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$. Pentru $x_1 \in X_1$ un element fixat avem $B(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}(X_2, Y)$; în plus $\|B(x_1, \cdot)\| \leq \|B\| \cdot \|x_1\|$. Se obţine cu uşurinţă că operatorul

$$T : X_1 \to \mathcal{L}(X_2, Y), \quad Tx_1 := B(x_1, \cdot)$$

este liniar şi $\|Tx_1\| \le \|B\| \cdot \|x_1\|$, de unde avem că $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$ şi $\|T\| \le \|B\|$. Considerând operatorul $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ care asociază lui $B \in \mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ operatorul $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$ construit mai sus, avem că $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ este liniar, continuu şi $\|T\| = \|\widetilde{\boldsymbol{F}}(B)\| \le \|B\|$. Este însă evident că $\widetilde{\boldsymbol{F}} \circ \boldsymbol{F}_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)}$ şi $\boldsymbol{F}_1 \circ \widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))}$. Cele dovedite mai sus ne arată că $\boldsymbol{F}_1$ este bijectivă şi $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}_1^{-1}$; în plus $\|\boldsymbol{F}_1(T)\| = \|T\|$ pentru orice $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$. Prin urmare $\boldsymbol{F}_1$ este izometrie.

În mod analog se arată că şi $\boldsymbol{F}_2$ este izometrie.

Dacă Y este spaţiu Banach atunci $\mathcal{L}(X_2, Y)$ este spaţiu Banach, şi deci $\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$ este spaţiu Banach. Cum $\boldsymbol{F}_1$ este izometrie, rezultă imediat că $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ este tot spaţiu Banach. ∎

În continuare vom identifica uneori $\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$ cu $\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, Y))$, sau cu $\mathcal{L}(X_2, \mathcal{L}(X_1, Y))$, prin intermediul lui $\boldsymbol{F}_1^{-1}$, respectiv $\boldsymbol{F}_2^{-1}$.

1.9 Spaţii Hilbert

O clasă importantă de spaţii normate este aceea a spaţiilor liniare înzestrate cu produs scalar. Fie deci X un spaţiu liniar real; $\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ se numeşte *produs scalar* dacă ϕ este aplicaţie biliniară, simetrică şi $\phi(x, x) > 0$ pentru orice $x \in X \setminus \{0\}$, adică ϕ este pozitiv definită. Se obişnuieşte să se noteze $\phi(x, y)$ prin $\langle x, y \rangle$. Este uşor de dovedit (exerciţiu !) că aplicaţia $N : X \to \mathbb{R}$, $N(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, este normă pe X, notată în continuare prin $\|\ \|$. În plus are loc *inegalitatea lui Schwartz*

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall\, x,\, y \in X,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă elementele x şi y sunt coliniare.

Fie $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar (sau *prehilbertian*); dacă X înzestrat cu norma indusă este spaţiu Banach, spunem că $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ este *spaţiu Hilbert*.

În continuare punem în evidenţă trei rezultate importante din teoria spaţiilor Hilbert, care în final vor conduce la faptul că spaţiile Hilbert sunt reflexive.

Teorema 1.9.1 *Fie $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ spaţiu Hilbert şi $C \subset X$ o mulţime convexă, închisă şi nevidă, iar $x \in X$. Atunci există un element $\bar{c} \in C$, unic, astfel ca $\|x - \bar{c}\| \le \|x - c\|$ pentru orice $c \in C$.*

Demonstraţie. Dacă $x \in C$ atunci $\bar{c} = x$ este singurul element care satisface condiţia din enunţ. Fie deci $x \notin C$; atunci există un şir $(c_n) \subset C$ astfel ca

$\|x - c_n\| \to d := \inf\{\|x - c\| \mid c \in C\}$. Avem că

$$\begin{aligned}\|(x - c_n) + (x - c_m)\|^2 + \|(x - c_n) - (x - c_m)\|^2 \\ = \ 2\|x - c_n\|^2 + 2\|x - c_m\|^2 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Deoarece C este convexă avem că $\|x - \frac{1}{2}(c_n + c_m)\| \geq d$ şi deci

$$\|c_n - c_m\|^2 \leq 2\|x - c_n\|^2 + 2\|x - c_m\|^2 - 4d^2 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Deoarece $\|x - c_n\| \to d$, din (1.26) obţinem că şirul (c_n) este şir Cauchy. Prin urmare există $\bar{c} \in X$ astfel ca $c_n \to \bar{c}$. Este evident că $\bar{c} \in C$ şi $\|x - \bar{c}\| = d$. Dacă $\bar{c}_1$ şi $\bar{c}_2$ satisfac concluzia teoremei, înlocuind în relaţia (1.26) c_n şi c_m prin $\bar{c}_1$ respectiv $\bar{c}_2$, obţinem că $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$. ▮

Fie acum $\emptyset \neq A \subset X$; spaţiul ortogonal mulţimii A este

$$A^{\perp} := \{x \in X \mid \langle a, x\rangle = 0 \ \ \forall\, a \in A\}.$$

Se verifică cu uşurinţă (exerciţiu !) că dacă $\emptyset \neq A, B \subset X$ atunci **1)** $A^{\perp}$ este subspaţiu liniar închis al lui X, **2)** $A \subset B \ \Rightarrow \ A^{\perp} \supset B^{\perp}$, **3)** $A \subset \overline{\operatorname{lin} A} \subset A^{\perp\perp} := (A^{\perp})^{\perp}$, **4)** $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

Teorema 1.9.2 *Fie $(X, \langle\, , \rangle)$ spaţiu Hilbert şi $X_0 \subset X$ un subspaţiu liniar închis. Atunci $X = X_0 \oplus X_0^{\perp}$ şi $X_0^{\perp\perp} = X_0$.*

Demonstraţie. Este evident că $X_0 \cap X_0^{\perp} = \{0\}$. Fie $\bar{x} \in X$. Deoarece X_0 este mulţime convexă, închisă şi nevidă, aplicând teorema precedentă, există $x_0 \in X_0$ astfel ca

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \|\bar{x} - u\| \quad \forall\, u \in X_0.$$

Fie $x_1 := \bar{x} - x_0$; să arătăm că $x_1 \in X_0^{\perp}$. Într-adevăr, din relaţia de mai sus, avem că

$$\|x_1\|^2 \leq \|x_1 + \lambda x\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\lambda\langle x_1, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \quad \forall\, x \in X_0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

şi deci

$$0 \leq 2\lambda\langle x_1, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \quad \forall\, x \in X_0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Împărţind prin $\lambda > 0$ şi făcând $\lambda \to 0$, obţinem că $\langle x_1, x\rangle \geq 0$. Inegalitatea inversă se obţine procedând la fel pentru $\lambda < 0$. Deci $\bar{x} \in X_0 + X_0^{\perp}$.

Fie acum $x \in X_0^{\perp\perp}$. Atunci $x = x_0 + x_1$ cu $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_0^{\perp}$. Rezultă că

$$\|x_1\|^2 = \langle x_1, x_1\rangle = \langle x - x_0, x_1\rangle = \langle x, x_1\rangle - \langle x_0, x_1\rangle = 0 - 0 = 0,$$

şi deci $x_1 = 0$. Prin urmare $x \in X_0$, ceea ce arată că $X_0^{\perp\perp} = X_0$. ▮

Teorema 1.9.3 (Riesz). *Fie $(X, \langle\,,\,\rangle)$ un spaţiu Hilbert. Atunci aplicaţia $\boldsymbol{F}_X : X \to X^*$, $\boldsymbol{F}_X(x)(y) = \langle y, x\rangle$, este bijecţie liniară şi $\|\boldsymbol{F}_X(x)\| = \|x\|$ pentru orice $x \in X$ (adică $\boldsymbol{F}_X$ este izometrie).*

Demonstraţie. Fie $x \in X$; aplicaţia $\varphi_x : X \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(y) = \langle y, x\rangle$, este liniară şi $|\varphi_x(y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$ pentru orice $y \in X$. Deci φ_x este continuă şi $\|\varphi_x\| \le \|x\|$. Cum $\varphi_x(x) = \|x\|^2$, avem că $\|\varphi_x\| = \|x\|$. Întrucât $\boldsymbol{F}_X(x) = \varphi_x$, $\boldsymbol{F}_X$ este bine definită şi $\|\boldsymbol{F}_X(x)\| = \|x\|$ pentru orice $x \in X$. Liniaritatea lui $\boldsymbol{F}_X$ este evidentă. Trebuie să mai arătăm că $\boldsymbol{F}_X$ este surjectivă. Fie $\varphi \in X^*$. Dacă $\varphi = 0$ atunci $\varphi = \varphi_0$. Fie deci $\varphi \ne 0$ şi $X_0 := \ker \varphi$; X_0 este subspaţiu liniar închis, diferit de X. Din teorema precedentă există $\bar{x} \in X_0^\perp \setminus \{0\}$ (în caz contrar $X = X_0$). Deoarece $X = X_0 + \mathbb{R}\bar{x}$, avem că $\ker \varphi_{\bar{x}} = \{\bar{x}\}^\perp = (\mathbb{R}\bar{x})^\perp = X_0$. Într-adevăr, dacă $x = x_0 + \mu\bar{x} \in \{\bar{x}\}^\perp$, unde $x_0 \in X_0$, $\mu \in \mathbb{R}$, atunci $0 = \langle x, \bar{x}\rangle = \langle x_0 + \mu\bar{x}, \bar{x}\rangle = \mu\|\bar{x}\|^2$. Prin urmare $\mu = 0$, şi deci $x \in X_0$. Am obţinut astfel că $\ker \varphi_{\bar{x}} \subset \ker \varphi$. Din teorema nucleelor (Teorema 1.3.6) avem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\varphi = \lambda\varphi_{\bar{x}} = \varphi_{\lambda\bar{x}} = \boldsymbol{F}_X(\lambda\bar{x})$. ▮

Consecinţa 1.9.1 *Dualul topologic al unui spaţiu Hilbert este spaţiu Hilbert.*

Demonstraţie. Fie $(X, \langle\,,\,\rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $\boldsymbol{F}_X$ izomorfismul pus în evidenţă în teorema precedentă. Fie

$$B : X^* \times X^* \to \mathbb{R}, \quad B(x^*, y^*) := \langle \boldsymbol{F}_X^{-1}(x^*), \boldsymbol{F}_X^{-1}(y^*)\rangle.$$

Este evident că B este aplicaţie biliniară simetrică. În plus, utilizând faptul că $\|\boldsymbol{F}_X(x)\| = \|x\|$,

$$B(x^*, x^*) = \langle \boldsymbol{F}_X^{-1}(x^*), \boldsymbol{F}_X^{-1}(x^*)\rangle = \|\boldsymbol{F}_X^{-1}(x^*)\|^2 = \|x^*\|^2,$$

ceea ce arată că B este şi pozitiv definită. Deci B este produs scalar. Din relaţia de mai sus avem că norma dualului provine din produsul scalar B. ▮

Teorema 1.9.4 *Orice spaţiu Hilbert este reflexiv.*

Demonstraţie. Fie $(X, \langle\,,\,\rangle)$ spaţiu Hilbert, iar X^* înzestrat cu produsul scalar construit în consecinţa precedentă. Considerăm izometriile $\boldsymbol{F} := \boldsymbol{F}_X$ şi $\boldsymbol{F}^* := \boldsymbol{F}_{X^*}$ date de Teorema lui Riesz pentru spaţiile X şi X^*. Fie $x \in X$ şi $x^* \in X^*$. Deoarece $\boldsymbol{F}$ este bijecţie, există $u \in X$ astfel ca $x^* = \boldsymbol{F}(u)$. Avem că $\boldsymbol{F}^* \circ \boldsymbol{F} : X \to X^*$ este bijecţie. În plus

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}^* \circ \boldsymbol{F})(x)(x^*) &= \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{F}(x))(\boldsymbol{F}(u)) = B(\boldsymbol{F}(u), \boldsymbol{F}(x)) = \langle u, x\rangle \\ &= \boldsymbol{F}(u)(x) = x^*(x) = J_X(x)(x^*),\end{aligned}$$

unde J_X este operatorul definit în secţiunea precedentă. Deci $\boldsymbol{F}^* \circ \boldsymbol{F} = J_X$, ceea ce arată că J_X este operator bijectiv. Prin urmare $(X, \langle\, , \,\rangle)$ este spaţiu reflexiv. ∎

Dacă $X,\ Y$ sunt spaţii Hilbert şi $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, putem considera operatorul $A' := \boldsymbol{F}_X^{-1} \circ A^* \circ \boldsymbol{F}_Y \in \mathcal{L}(Y,X)$. Este evident că A' este caracterizat de relaţia

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A'y\rangle \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

De cele mai multe ori dualul X^* al spaţiului Hilbert $(X, \langle\, , \,\rangle)$ se identifică, prin intermediul izometriei $\boldsymbol{F}_X$, cu X. Făcând astfel de identificări avem că dacă $X,\ Y$ sunt spaţii Hilbert, iar $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, atunci $A' = A^*$.

1.10 Diferenţiabilitate în spaţii normate

În această secţiune X, Y, Z sunt spaţii liniare (reale) normate. Fie $f : D \to Y$, unde $D \subset X$, şi $a \in \operatorname{int} D$; prin urmare există o sferă $B(a,\rho) \subset D$ $(\rho > 0)$, şi deci pentru orice $x \in X$ şi $t \in \left[-\frac{\rho}{\|x\|+1}, \frac{\rho}{\|x\|+1}\right]$, $a + tx \in D$. Spunem că f este *diferenţiabilă Gâteaux* în a, pe scurt *G-diferenţiabilă*, dacă există un operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ astfel ca

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t} = Tx \quad \forall\, x \in X; \tag{1.27}$$

operatorul T se numeşte *diferenţiala Gâteaux* (sau *gradient*) a funcţiei f în a. Spunem că f este *diferenţiabilă Fréchet* în a, pe scurt *F-diferenţiabilă*, dacă există un operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ astfel ca

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Th}{\|h\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0; \tag{1.28}$$

operatorul T se numeşte în acest caz *diferenţiala Fréchet* a funcţiei f în a. Operatorul T din definiţiile de mai sus se notează prin $\nabla f(a)$, $df(a)$ sau $d^1 f(a)$.

Să observăm că (1.28) este echivalentă cu fiecare din urmă-toarele două condiţii:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in B(a,\delta)\ :\ \|f(x) - f(a) - T(x-a)\| \le \varepsilon \|x-a\|,$$

$$\begin{aligned} \exists\, \alpha : D - a \to Y\ :\ & \lim_{h\to 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0, \\ & f(a+h) = f(a) + Th + \|h\| \cdot \alpha(h) \ \ \forall\, h \in D-a. \end{aligned}$$

În cazul în care pentru un $x \in X$ există

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} \in Y,$$

aceasta poartă numele de *derivata direcţională* a funcţiei f în a în direcţia x şi se notează prin $f'_+(a;x)$. Se observă că f este G-diferenţiabilă în $a \in \operatorname{int} D$ dacă şi numai dacă

$$\forall\, x \in X,\ \exists\, f'_+(a;x) \in Y \text{ şi } x \mapsto f'_+(a;x) \text{ este aplicaţie liniară şi continuă.}$$

Vom vedea că există clase de funcţii care au derivate direcţionale în orice direcţie, fără a fi diferenţiabile Gâteaux.

Un prim rezultat este următorul.

Teorema 1.10.1 *Fie $f : D \subset X \to Y$ şi $a \in \operatorname{int} D$.*

(i) *Dacă f este G-diferenţiabilă în a atunci diferenţiala sa este unică.*

(ii) *Dacă f este F-diferenţiabilă în a atunci f este G-diferenţiabilă în a şi diferenţialele coincid.*

(iii) *Dacă f este F-diferenţiabilă în a atunci f este continuă în a.* ▮

Un caz particular important este acela în care $X = \mathbb{R}$. În acest caz spunem că f este *derivabilă* în a dacă există $\lim_{h\to 0} (f(a+h)-f(a))/h \in Y$; acest element îl notăm prin $f'(a)$ şi-l numim *derivata* lui f în a. Observăm că în această situaţie

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} = x \cdot f'(a) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum aplicaţia $\mathbb{R} \ni x \mapsto xf'(a) \in Y$ este liniară şi continuă, f este G-diferenţiabilă în a şi $\nabla f(a)(x) = xf'(a)$. Avem astfel

Teorema 1.10.2 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to Y$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este derivabilă în a,*

(ii) *f este G-diferenţiabilă în a,*

(iii) *f este F-diferenţiabilă în a.*

În plus $\nabla f(a)(x) = xf'(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ în fiecare din aceste cazuri. ▮

În rezultatul următor punem în evidenţă patru exemple de funcţii F-diferenţiabile frecvent utilizate.

Teorema 1.10.3 *Fie* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}^2(X;Y)$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ *şi* $y_0 \in Y$.

(i) *Funcţia* $f_1 : X \to Y$, $f_1(x) := y_0 + Tx$ *(adică* f_1 *este* afină*), este F-diferenţiabilă în orice* $a \in X$ *şi* $\nabla f_1(a) = T$.

(ii) *Funcţia* $f_2 : \mathbb{R}^n \to X$, $f_2(t_1, \ldots, t_n) := x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$, *este F-diferenţiabilă în orice* $a \in \mathbb{R}^n$ *şi* $\nabla f_2(a)(t_1, \ldots, t_n) = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$.

(iii) *Funcţia* $f_3 : X \to Y$, $f_3(x) := B(x,x)$, *este F-diferenţiabilă în orice* $a \in X$ *şi* $\nabla f_3(a)(x) = B(a,x) + B(x,a)$, *adică* $\nabla f_3(a) = B(a,\cdot) + B(\cdot,a)$. *În particular, dacă* B *este simetrică atunci* $\nabla f_3(a) = 2B(\cdot,a)$.

(iv) *Fie* X *spaţiu Hilbert. Funcţia* $f_4 : X \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, *este F-diferenţiabilă în orice* $a \in X$ *şi* $\nabla f_4(a)(x) = \langle x, a\rangle$. ∎

În teorema următoare punem în evidenţă câteva formule pentru funcţii diferenţiabile şi diferenţialele lor.

Teorema 1.10.4 *Fie mulţimile* $D \subset X$, $\Delta \subset Y$, $a \in \operatorname{int} D$, $b \in \operatorname{int} \Delta$, *şi funcţiile* $f, g : D \to Y$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *şi* $h : \Delta \to Z$.

(i) *Dacă* f *şi* g *sunt G(F)-diferenţiabile în* a, *iar* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *atunci* $\alpha f + \beta g$ *este G(F)-diferenţiabilă în* a *şi*

$$\nabla(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \nabla f(a) + \beta \nabla g(a).$$

(ii) *Dacă* f *şi* φ *sunt G(F)-diferenţiabile în* a, *atunci* $\varphi \cdot f$ *este G(F)-diferenţiabilă în* a *şi*

$$\nabla(\varphi \cdot f)(a) = \varphi(a) \cdot \nabla f(a) + f(a) \cdot \nabla \varphi(a),$$

unde pentru $x^* \in X^*$, $y \in Y$ *avem că* $y \cdot x^* \in \mathcal{L}(X,Y)$, $(y \cdot x^*)(x) := \langle x, x^*\rangle \cdot y$.

(iii) *Dacă* $f(D) \subset \Delta$, $b = f(a)$, f *este F-diferenţiabilă în* a *şi* h *este F-diferenţiabilă în* b *atunci* $h \circ f$ *este F-diferenţiabilă în* a *şi*

$$\nabla(h \circ f)(a) = \nabla h(b) \circ \nabla f(a).$$

Demonstraţie. Demonstraţia punctelor (i) şi (ii) este simplă.

(iii) Fie $T := \nabla f(a)$, $S := \nabla h(b)$. Din definiţia F-diferenţiabilităţii, există $\alpha : D - a \to Y$, $\beta : \Delta - b \to Z$ astfel ca

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \alpha(0) = 0, \quad \lim_{y\to 0} \beta(y) = \beta(0) = 0,$$

$$f(a+x) = f(a) + Tx + \|x\| \cdot \alpha(x) \quad \forall\, x \in D - a,$$
$$h(b+y) = h(b) + Sy + \|y\| \cdot \beta(y) \quad \forall\, y \in \Delta - b.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}(h \circ f)(a+x) &= h(f(a+x)) = h\left(b + (Tx + \|x\| \cdot \alpha(x))\right) \\ &= h(b) + S\left(Tx + \|x\| \cdot \alpha(x)\right) + \\ &\qquad + \|Tx + \|x\| \cdot \alpha(x)\| \cdot \beta\left(Tx + \|x\| \cdot \alpha(x)\right) \\ &= (h \circ f)(a) + (S \circ T)x + \|x\| \cdot \gamma(x),\end{aligned}$$

unde $\gamma : D - a \to Z$,

$$\gamma(x) := S(\alpha(x)) + \left\|T\left(\|x\|^{-1}x\right) + \alpha(x)\right\| \cdot \beta\left(Tx + \|x\| \cdot \alpha(x)\right)$$

pentru $x \neq 0$ şi $\gamma(0) := 0$; avem că $\lim_{x\to 0} \gamma(x) = 0$. Deci $h \circ f$ este F-diferenţiabilă în a şi $\nabla(h \circ f)(a) = S \circ T = \nabla h(b) \circ \nabla f(a)$. ∎

Următorul rezultat va fi folosit chiar în această secţiune.

Teorema 1.10.5 (de medie). *Fie $f : D \subset X \to Y$ şi $a, b \in X$. Presupunem că $[a, b] \subset \operatorname{int} D$, şi f este G-diferenţiabilă în orice punct din $[a, b]$. Atunci*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{u \in\,]a,b[} \|\nabla f(u)(b-a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{u \in\,]a,b[} \|\nabla f(u)\|.$$

Demonstraţie. Fie mulţimea $\mathcal{O} := \{t \in \mathbb{R} \mid (1-t)a + tb \in D\}$, funcţia $\varphi : \mathcal{O} \to X$, $\varphi(t) := (1-t)a + tb$, şi $y^* \in U_{Y^*}$. Utilizând Teoremele 1.10.3 şi 1.10.4, obţinem că aplicaţia $\psi := y^* \circ f \circ \varphi$ este diferenţiabilă în orice $t_0 \in [0, 1]$, iar

$$\nabla(y^* \circ f \circ \varphi)(t_0)(u) = (y^* \circ \nabla f(\varphi(t_0)) \circ \nabla\varphi(t_0))(u) = u \cdot (y^* \circ \nabla f(\varphi(t_0)))(b-a).$$

Prin urmare, conform Teoremei 1.10.2, $(y^* \circ f \circ \varphi)'(t_0) = (y^* \circ \nabla f(\varphi(t_0)))(b-a)$. Aplicând Teorema lui Lagrange pe $[0, 1]$, obţinem că există $t_0 \in]0, 1[$ astfel ca

$$\begin{aligned}|\psi(1) - \psi(0)| &= |\psi'(t_0)| = |(y^* \circ \nabla f(\varphi(t_0)))(b-a)| \\ &\leq \|y^*\| \cdot \|\nabla f(\varphi(t_0))(b-a)\| \leq M,\end{aligned}$$

unde $M := \sup_{u \in\,]a,b[} \|\nabla f(u)(b-a)\|$. Prin urmare

$$|\langle y^*, f(b) - f(a)\rangle| \leq M \quad \forall\, y^* \in U_{Y^*},$$

şi deci $\|f(b) - f(a)\| \leq M$. Din relaţia $\|\nabla f(u)(b-a)\| \leq \|\nabla f(u)\| \cdot \|b - a\|$ rezultă cealaltă inegalitate. ∎

Să observăm că în teorema precedentă concluzia are loc dacă presupunem că restricţia lui f la $[a, b]$ este continuă şi f este G-diferenţiabilă în orice punct din $]a, b[$.

O consecinţă importantă a teoremei de medie este următorul rezultat.

Teorema 1.10.6 (Criteriul I de diferenţiabilitate Fréchet). *Fie $D \subset X$, $a \in \operatorname{int} D$ şi $f : D \to Y$. Presupunem că f este G-diferenţiabilă pe o vecinătate $V \subset D$ a lui a şi $\nabla f : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ este continuă în a. Atunci f este F-diferenţiabilă în a.*

Demonstraţie. Există $\rho > 0$ astfel ca $B(a, \rho) \subset V$. Fie $T := \nabla f(a)$ şi aplicaţia $g : D \to Y$, $g(x) := f(x) - Tx$. Funcţia g este G-diferenţiabilă pe $B(a, \rho)$ şi $\nabla g(x) = \nabla f(x) - T = \nabla f(x) - \nabla f(a)$. Pentru x, $x' \in B(a, \rho)$, din Teorema de medie, avem că

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \|x - x'\| \cdot \sup_{u \in]x, x'[} \|\nabla g(u)\|.$$

Din continuitatea lui ∇f în a, pentru $\varepsilon > 0$ avem că

$$\exists\, \delta \in]0, \rho[,\ \forall\, u \in B(a, \delta)\ :\ \|\nabla g(u)\| = \|\nabla f(u) - \nabla f(a)\| \leq \varepsilon,$$

şi deci

$$\|g(x) - g(x')\| = \|f(x) - f(x') - T(x - x')\| \leq \varepsilon \|x - x'\| \quad \forall\, x, x' \in B(a, \delta). \tag{1.29}$$

Luând $x' = a$ în (1.29), obţinem că f este F-diferenţiabilă în a. ∎

O altă consecinţă a teoremei de medie este şi rezultatul următor.

Consecinţa 1.10.1 *Fie $f : D \subset X \to Y$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Presupunem că f este G-diferenţiabilă pe o vecinătate $V \subset D$ a lui a şi $\nabla f : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ este continuă în a. Dacă $(x_n) \subset D$, $(t_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $(u_n) \subset X$ sunt astfel ca $x_n \to a$, $t_n \to 0$ şi $u_n \to u \in X$ atunci*

$$\frac{f(x_n + t_n u_n) - f(x_n)}{t_n} \to \nabla f(a)(u).$$

Demonstraţie. Fie $\rho > 0$ şi g definite în demonstraţia teoremei precedente. Considerăm (x_n), (t_n) şi (u_n) cu proprietăţile din enunţ. Există $M > 0$ astfel ca $\|u_n\| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $\varepsilon > 0$ considerăm $\delta \in]0, \rho[$ astfel încât (1.29) să aibă loc. Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca x_n, $x_n + t_n u_n \in B(a, \delta)$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. Din (1.29) obţinem

$$\|g(x_n + t_n u_n) - g(x_n)\| \leq \varepsilon \|t_n u_n\| \leq \varepsilon |t_n| M \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

şi deci

$$\|[f(x_n + t_n u_n) - f(x_n)]/t_n - \nabla f(a)(u_n)\| \le \varepsilon M \quad \forall\, n \ge n_\varepsilon.$$

Prin urmare

$$\frac{f(x_n + t_n u_n) - f(x_n)}{t_n} - \nabla f(a)(u_n) \to 0.$$

Cum $\nabla f(a)(u_n) \to \nabla f(a)(u)$, obţinem imediat concluzia. ∎

Considerăm acum funcţia $f : D \subset X \times Y \to Z$ şi $(a, b) \in \operatorname{int} D$ un element fixat. Putem considera funcţiile

$$f_1 : D_1 \to Z,\ f_1(x) := f(x, b),\ \text{unde } D_1 := \{x \in X \mid (x, b) \in D\},$$

$$f_2 : D_2 \to Z,\ f_2(y) := f(a, y),\ \text{unde } D_2 := \{y \in Y \mid (a, y) \in D\}.$$

Este clar că $a \in \operatorname{int} D_1,\ b \in \operatorname{int} D_2$. Spunem că f este *F(G)-diferenţiabilă (parţial) în raport cu variabila x* dacă f_1 este F(G)-diferenţiabilă în a; diferenţiala va fi notată prin $\nabla_x f(a, b)$. Analog, f este *F(G)-diferenţiabilă (parţial) în raport cu variabila y* dacă f_2 este F(G)-diferenţiabilă în b; diferenţiala va fi notată prin $\nabla_y f(a, b)$.

Dacă f este F-diferenţiabilă în (a, b) cu diferenţiala $T \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ atunci există $\gamma : D - (a, b) \to Z$ astfel ca $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \gamma(x, y) = \gamma(0, 0) = 0$ şi

$$f(a + x, b + y) = f(a, b) + T(x, y) + \|(x, y)\| \cdot \gamma(x, y) \quad \forall\, (x, y) \in D - (a, b),$$

de unde obţinem, luând pe rând $y = 0$ respectiv $x = 0$, că

$$f_1(a + x) = f_1(a) + T(x, 0) + \|(x, 0)\| \cdot \gamma(x, 0) \quad \forall\, x \in D_1 - a,$$

$$f_2(b + y) = f_2(b) + T(0, y) + \|(0, y)\| \cdot \gamma(0, y) \quad \forall\, y \in D_2 - b.$$

Prin urmare f este F-diferenţiabilă în raport cu x şi y în (a, b) şi

$$\nabla_x f(a, b) = \nabla f(a, b)(\cdot, 0), \qquad \nabla_y f(a, b) = \nabla f(a, b)(0, \cdot).$$

Afirmaţia corespunzătoare pentru G-diferenţiabilitate este de asemenea adevărată, şi mai simplu de dovedit.

În condiţii suplimentare are loc şi implicaţia inversă.

Teorema 1.10.7 (Criteriul II de diferenţiabilitate Fréchet). *Fie $D \subset X \times Y$, $(a, b) \in \operatorname{int} D$ şi $f : D \to Z$. Presupunem că f este G-diferenţiabilă în raport cu x şi y pe o vecinătate $V \subset D$ a lui (a, b) şi $\nabla_x f$, $\nabla_y f$ sunt continue în (a, b). Atunci f este F-diferenţiabilă în (a, b).*

Demonstraţie. Există $\rho > 0$ astfel ca $B(a,\rho) \times B(b,\rho) \subset V$. Notăm $\nabla_x f(a,b)$ prin T şi $\nabla_y f(a,b)$ prin S. Atunci, pentru $(x,y) \in D$,

$$f(x,y) - f(a,b) - T(x-a) - S(y-b) = \\ [f(x,y) - f(x,b) - S(y-b)] + [f(x,b) - f(a,b) - T(x-a)].$$

Procedând ca şi în teorema precedentă, pentru $(x,y) \in B(a,\rho) \times B(b,\rho)$ avem

$$\|f(x,y) - f(x,b) - S(y-b)\| \leq \|y-b\| \cdot \sup_{v\in[b,y]} \|\nabla_y f(x,v) - \nabla_y f(a,b)\|,$$

$$\|f(x,b) - f(a,b) - T(x-a)\| \leq \|x-a\| \cdot \sup_{u\in[a,x]} \|\nabla_x f(u,b) - \nabla_x f(a,b)\|.$$

Fie $\varepsilon > 0$; datorită continuităţii diferenţialelor $\nabla_x f$ şi $\nabla_y f$ în (a,b), există $\delta \in]0,\rho[$ astfel că pentru orice $(x,y) \in B(a,\delta) \times B(b,\delta) := U$ avem

$$\|\nabla_x f(x,y) - \nabla_x f(a,b)\| \leq \varepsilon/2, \quad \|\nabla_y f(x,y) - \nabla_y f(a,b)\| \leq \varepsilon/2.$$

Prin urmare, pentru $(x,y) \in U$, avem că

$$\|f(x,y) - f(a,b) - T(x-a) - S(y-b)\| \leq \varepsilon \cdot \|(x,y) - (a,b)\|,$$

şi deci f este F-diferenţiabilă în (a,b), iar

$$\nabla f(a,b)(u,v) = \nabla_x f(a,b)(u,0) + \nabla_y f(a,b)(0,v) \quad \forall\, (u,v) \in X \times Y.$$

Demonstraţia este completă. ▮

Fie acum $f : D \subset X \to Y$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Spunem că f este *F-diferenţiabilă de ordin II* în a dacă f este F-diferenţiabilă pe o vecinătate $V \subset D$ a lui a şi $\nabla f : V \to \mathcal{L}(X,Y)$ este F-diferenţiabilă în a, adică există $B \in \mathcal{L}^2(X;Y)$ şi $\alpha : D - a \to \mathcal{L}(X,Y)$ astfel ca

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0,\ \nabla f(a+h) = \nabla f(a) + B(h,\cdot) + \|h\| \cdot \alpha(h) \ \ \forall\, h \in D - a;$$

aplicaţia biliniară B se numeşte diferenţiala de ordin II a funcţiei f în a şi se notează prin $\nabla^2 f(a)$ sau $d^2 f(a)$. Desigur, utilizăm identificarea lui $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$ cu $\mathcal{L}^2(X;Y)$ specificată în Teorema 1.8.12.

Să observăm că dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II în a şi $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$, atunci $T \circ f$ este F-diferenţiabilă de ordin II în a şi $\nabla^2 (T \circ f)(a) = T \circ \nabla^2 f(a)$. De asemenea, dacă considerăm funcţia $\varphi : \mathcal{O} \to Y$, $\varphi(t) := f(x_0 + tx)$, unde $\mathcal{O} := \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tx \in D\}$, iar f este F-diferenţiabilă în $a = x_0 + t_0 x$ atunci φ este derivabilă ($\Leftrightarrow$ diferenţiabilă) în t_0 şi $\varphi'(t_0) = \nabla f(x_0 + t_0 x)(x)$. Dacă f

este F-diferenţiabilă de ordin II în $a = x_0 + t_0 x$ atunci f este F-diferenţiabilă pe o vecinătate a lui a, şi deci φ este derivabilă pe o vecinătate U a lui t_0, iar $\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + tx)(x)$ pentru orice $t \in U$. În plus avem că

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) - \varphi'(t_0) &= \nabla f(x_0 + tx)(x) - \nabla f(x_0 + t_0 x)(x) \\
&= [\nabla f(x_0 + tx) - \nabla f(x_0 + t_0 x)](x) \\
&= [B((t - t_0)x, \cdot) + |t - t_0| \cdot \|x\| \cdot \alpha\left((t - t_0)x\right)](x) \\
&= (t - t_0)B(x, x) + |t - t_0| \cdot \|x\| \cdot \alpha\left((t - t_0)x\right)(x).
\end{aligned}$$

Prin urmare există $\varphi''(t_0) = B(x, x) = \nabla^2 f(a)(x, x)$ dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II în $a = x_0 + t_0 x \in \operatorname{int} D$, unde $\varphi''(t)$ notează *derivata de ordin II* a funcţiei φ în t.

Teorema următoare arată că diferenţiala de ordin II este simetrică.

Teorema 1.10.8 (simetria diferenţialei de ordin II). *Fie $f : D \subset X \to Y$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II în a atunci $\nabla^2 f(a)$ este aplicaţie biliniară simetrică.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că D este deschisă şi f este F-diferenţiabilă pe D (altfel restrângem funcţia f la o vecinătate a lui a pe care o notăm tot D). Fie $B := \nabla^2 f(a)$ şi $u, v \in X$ elemente fixate. Să arătăm că $B(u, v) = B(v, u)$.

Fie pentru început cazul $Y = \mathbb{R}$.

Considerăm mulţimea $\Delta := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a + su + tv \in D\}$ şi funcţia $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}$, $\varphi(s, t) := f(a + su + tv)$. Mulţimea Δ este deschisă, iar din consideraţiile de mai sus avem că există

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = \nabla f(a + su + tv)(u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \nabla f(a + su + tv)(v).$$

În plus $\partial \varphi / \partial s$ este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) &= [\nabla f(a + su + tv) - \nabla f(a)](u) \\
&= B(su + tv, u) + \|su + tv\| \cdot \alpha(su + tv)(u) \\
&= sB(u, u) + tB(v, u) + \sqrt{s^2 + t^2} \cdot \gamma(s, t),
\end{aligned}$$

cu

$$\left|\sqrt{s^2 + t^2} \cdot \gamma(s, t)\right| \leq \sqrt{s^2 + t^2}\sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} \cdot \|\alpha(su + tv)\| \cdot \|u\|,$$

şi deci $\lim_{(s,t)\to(0,0)} \gamma(s,t) = 0 = \gamma(0,0)$. Avem deci că $\partial\varphi/\partial s$ este diferenţiabilă în $(0,0)$ şi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0) = B(u,u), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial s}(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)(0,0) = B(v,u).$$

În mod analog se obţine că $\partial\varphi/\partial t$ este diferenţiabilă în $(0,0)$ şi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\,\partial t}(0,0) = B(u,v), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(0,0) = B(v,v).$$

Utilizând Teorema lui Young pentru funcţii reale de două variabile reale ([42, p. 416]), avem că

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial s}(0,0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\,\partial t}(0,0),$$

adică $B(v,u) = B(u,v)$.

Fie acum cazul general. Considerând $y^* \in Y^*$, avem că $y^* \circ f$ este F-diferenţiabilă de ordin II în a şi $\nabla^2(y^* \circ f)(a) = y^* \circ \nabla^2 f(a)$. Din prima parte obţinem că $\langle B(u,v), y^*\rangle = \langle B(v,u), y^*\rangle$, şi cum $y^* \in Y^*$ este arbitrar, $B(u,v) = B(v,u)$. ∎

Desigur, se pot introduce şi diferenţiale de ordin superior. Noi ne limităm numai la diferenţiabilitatea de ordin I şi II.

Următorul rezultat al acestei secţiuni este formula lui Taylor. Înainte de a formula acest rezultat amintim că funcţia $f : D \subset X \to Y$ este de *clasă* $\mathcal{C}^1$ pe mulţimea deschisă $D \subset X$ dacă f este F-diferenţiabilă pe D şi ∇f este continuă pe D; f este de *clasă* $\mathcal{C}^2$ dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II pe D şi $\nabla^2 f : D \to \mathcal{L}^2(X;Y)$ este continuă.

Teorema 1.10.9 (formula lui Taylor). *Fie $D \subset X$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D. Presupunem că segmentul $[a,b] \subset D$. Atunci există $\xi \in]a,b[$ astfel ca*

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a)(b-a) + \tfrac{1}{2}\nabla^2 f(\xi)(b-a, b-a).$$

Demonstraţie. Considerăm $\mathcal{O} := \{t \in \mathbb{R} \mid (1-t)a + tb = a + t(b-a) \in D\}$ şi $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) := f((1-t)a + tb)$. Avem că

$$\varphi'(t) = \nabla f((1-t)a+tb)(b-a),\ \varphi''(t) = \nabla^2 f((1-t)a+tb)(b-a, b-a) \quad \forall\, t \in \mathcal{O}.$$

Rezultă că φ este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathcal{O} \supset [0,1]$. Aplicând formula lui Taylor pentru funcţii reale de o variabilă reală, avem că există $\theta \in]0,1[$ astfel ca

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\varphi''(\theta)\cdot 1^2.$$

Luând $\xi := (1-\theta)a + \theta b \in]a,b[$, obţinem concluzia. ∎

Are loc următoarea teoremă a funcţiilor implicite.

Teorema 1.10.10 *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu normat, $D \subset X$ o mulţime deschisă, $M \subset X$ o mulţime închisă, $x_0 \in D \cap M$ şi $h : D \to Y$ o funcţie F-diferenţiabilă. Presupunem că există $c > 0$, $\eta > 0$, $\alpha \in [0,1[$ astfel ca $D(x_0,\eta) \subset D$ şi*

$$\forall\, x \in D(x_0,\eta) \cap M,\ \forall\, t > 0\ : S_Y \subset \nabla h(x)([t,\infty[\cdot(M-x) \cap cU_X) + \alpha U_Y. \tag{1.30}$$

Atunci există $\gamma,\ l > 0$ astfel ca $D(x_0,\gamma) \subset D$ şi

$$\forall\, u \in D(x_0,\gamma) \cap M,\ \forall\, y \in D(h(x_0),\gamma),\ \exists\, x \in D \cap M\ : \\ h(x) = y,\ \|x-u\| \le l \cdot \|y - h(u)\|. \tag{1.31}$$

În particular, $h(U \cap M) \in \mathcal{V}(h(x_0))$ pentru orice $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

Demonstraţie. Deoarece $\alpha \in [0,1[$, există $\varepsilon > 0$ astfel ca $1 > \alpha + \varepsilon c$. Fie $\mu := \varepsilon\eta/(2+\varepsilon)$. Din continuitatea lui h în x_0, există $\gamma \in]0,\mu[$ astfel ca

$$\forall\, x \in D(x_0,\gamma)\ :\ h(x) \in D(h(x_0),\mu). \tag{1.32}$$

Fie $u \in D(x_0,\gamma)$ şi $y \in D(h(x_0),\gamma)$ elemente fixate. Considerăm funcţia

$$f : D(x_0,\eta) \cap M \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \|y - h(x)\|.$$

Mulţimea $D(x_0,\eta) \cap M \subset X$ înzestrată cu distanţa indusă ($d(x,x') = \|x - x'\|$) este spaţiu metric complet, iar f este funcţie continuă (deci i.s.c.) şi mărginită inferior. Aplicând principiul variaţional al lui Ekeland (Teorema 1.2.6), există $\bar{x} \in D(x_0,\eta) \cap M \subset D$ astfel ca

$$\|y - h(\bar{x})\| + \varepsilon \cdot \|\bar{x} - u\| \le \|y - h(u)\|, \tag{1.33}$$

$$\|y - h(\bar{x})\| \le \varepsilon \cdot \|x - \bar{x}\| + \|y - h(x)\| \quad \forall\, x \in D(x_0,\eta) \cap M. \tag{1.34}$$

Dorim să arătăm că $h(\bar{x}) = y$. Presupunem că $h(\bar{x}) \ne y$. Din (1.33) şi (1.32) avem că

$$\varepsilon \cdot \|\bar{x} - u\| \le \|y - h(u)\| \le \|y - h(x_0)\| + \|h(x_0) - h(u)\| \le \gamma + \mu < 2\mu,$$

şi deci

$$\|\bar{x} - x_0\| \le \|\bar{x} - u\| + \|u - x_0\| < \frac{2\mu}{\varepsilon} + \gamma < \frac{2\mu}{\varepsilon} + \mu = \frac{\varepsilon\eta}{2+\varepsilon} \cdot \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} = \eta. \tag{1.35}$$

Din (1.30) avem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $t_n \in]0, \frac{1}{n}]$, $x_n \in M$ şi $w_n \in Y$ astfel că, pentru $u_n := t_n^{-1}(x_n - \bar{x})$, avem

$$\|u_n\| \leq c \cdot \|y - h(\bar{x})\|, \ \|w_n\| \leq \alpha \cdot \|y - h(\bar{x})\|, \ y - h(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})(u_n) + w_n. \quad (1.36)$$

Deoarece $x_n = \bar{x} + t_n u_n \to \bar{x}$, din (1.35) rezultă existenţa unui $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x_n \in D(x_0, \eta)$ pentru $n \geq n_0$. Deoarece h este diferenţiabilă în $\bar{x}$, avem că există $(v_n) \subset Y$ astfel ca $v_n \to 0$ şi

$$h(\bar{x} + t_n u_n) = h(\bar{x}) + t_n \nabla h(\bar{x})(u_n) + t_n v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizând această relaţie, (1.34) şi (1.36) obţinem că pentru $n \geq n_0$ au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} \|y - h(\bar{x})\| &\leq \|y - h(x_n)\| + \|x_n - \bar{x}\| \\ &= \|y - h(\bar{x}) - t_n \nabla h(\bar{x})(u_n) - t_n v_n\| + \varepsilon t_n \|u_n\| \\ &= \|y - h(\bar{x}) - t_n(y - h(\bar{x}) - w_n) - t_n v_n\| + \varepsilon t_n \|u_n\| \\ &\leq (1 - t_n)\|y - h(\bar{x})\| + t_n\|w_n\| + t_n\|v_n\| + \varepsilon t_n \|u_n\|, \end{aligned}$$

şi deci

$$t_n\|y - h(\bar{x})\| \leq t_n\|w_n\| + t_n\|v_n\| + \varepsilon t_n\|u_n\|.$$

Împărţind prin $t_n > 0$ şi utilizând din nou (1.36), obţinem

$$\|y - h(\bar{x})\| \leq \alpha \cdot \|y - h(\bar{x})\| + \varepsilon c \cdot \|y - h(\bar{x})\| + t_n\|v_n\| \quad \forall n \geq n_0.$$

Trecând la limită şi apoi împărţind prin $\|y - h(\bar{x})\| > 0$ obţinem că $1 \leq \alpha + \varepsilon c$, ceea ce contrazice alegerea lui ε. Deci $y = h(\bar{x})$.

Este acum clar că din (1.33) se obţine concluzia pentru $l = 1/\varepsilon$.

Fie acum $U \in \mathcal{V}(x_0)$; există numărul $\delta \in]0, l\gamma[$ astfel ca $B(x_0, \delta) \subset U$. Fie $y \in B(h(x_0), \delta/l) \subset D(h(x_0), \gamma)$; din (1.31) există $x \in D \cap M$ astfel ca $h(x) = y$ şi $\|x_0 - x\| \leq l \cdot \|h(x_0) - y\| < \delta$. Deci $B(h(x_0), \delta) \subset h(U \cap M)$. ∎

În Capitolul 3 vom pune în evidenţă câteva condiţii suficiente pentru ca să fie îndeplinită condiţia (1.30).

Capitolul 2

Programare convexă

2.1 Funcţii convexe

Fie X spaţiu liniar real şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$; spunem că f este *convexă* dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall\, x,\, y \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,1], \tag{2.1}$$

cu convenţiile: $(+\infty) + (-\infty) = +\infty,\ 0 \cdot (+\infty) = +\infty,\ 0 \cdot (-\infty) = 0$. Să observăm că dacă $x = y$, sau $\lambda \in \{0,1\}$, sau x (y) nu este în $\operatorname{dom} f$ atunci inegalitatea din (2.1) este satisfăcută. Prin urmare funcţia f este convexă dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall\, x,\, y \in \operatorname{dom} f,\ x \ne y,\ \forall\, \lambda \in]0,1[. \tag{2.2}$$

Dacă are loc relaţia (2.2) cu "$\le$" înlocuit prin "$<$" spunem că f este *strict convexă*. De asemenea, spunem că f este *(strict) concavă* dacă $-f$ este (strict) convexă. Deoarece toate proprietăţile funcţiilor convexe se transpun cu uşurinţă la funcţii concave, în cele ce urmează considerăm, practic, numai funcţii convexe.

Pentru a evita, în cele ce urmează, înmulţirea cu 0, având în vedere şi observaţia de mai înainte, vom lua numai $\lambda \in]0,1[$.

În teorema următoare punem în evidenţă câteva caracterizări utile ale funcţiilor convexe.

Teorema 2.1.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este convexă;*

(ii) *funcţia $\varphi_{x,y} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi_{x,y}(t) := f((1-t)x + ty)$, este convexă oricare ar fi x, $y \in X$;*

(iii) $\operatorname{dom} f$ *este mulţime convexă şi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall\, x,\, y \in \operatorname{dom} f,\ \forall\, \lambda \in]0,1[;$$

(iv) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0,1[,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1,\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in X\ :$

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots \lambda_n f(x_n); \tag{2.3}$$

(v) $\operatorname{epi} f$ *este submulţime convexă a lui* $X \times \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Implicaţiile (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (i), (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i) şi (iv) $\Rightarrow$ (i) sunt evidente.

(i) $\Rightarrow$ (v) Fie (x_1, t_1), $(x_2, t_2) \in \operatorname{epi} f$ şi $\lambda \in]0,1[$. Atunci x_1, $x_2 \in \operatorname{dom} f$, $f(x_1) \le t_1$ şi $f(x_2) \le t_2$. Cum f este convexă, din (2.1) avem că

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \le \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2,$$

şi deci $\lambda(x_1, t_1) + (1-\lambda)(x_2, t_2) \in \operatorname{epi} f$. Prin urmare $\operatorname{epi} f$ este convexă.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in]0,1[$ astfel ca $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, şi $x_1, \ldots, x_k \in X$. Dacă există i astfel ca $f(x_i) = \infty$ atunci, în mod evident, (2.3) are loc. Dacă $f(x_i) \in \mathbb{R}$ pentru orice i, $1 \le i \le k$ atunci $(x_i, f(x_i)) \in \operatorname{epi} f$ pentru orice i, şi cum $\operatorname{epi} f$ este convexă, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i, f(x_i)) \in \operatorname{epi} f$, ceea ce arată că inegalitatea (2.3) are loc. În sfârşit, presupunem că $f(x_i) < \infty$ pentru orice i şi există i_0 cu $f(x_{i_0}) = -\infty$; luând $\bar{t}_i \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x_i, \bar{t}_i) \in \operatorname{epi} f$ pentru $i \ne i_0$, cum $(x_{i_0}, -n) \in \operatorname{epi} f_{i_0}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem că

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \\ & \quad \le \quad \lambda_1 \bar{t}_1 + \cdots + \lambda_{i_0 - 1} \bar{t}_{i_0 - 1} + \lambda_{i_0}(-n) + \lambda_{i_0 + 1} \bar{t}_{i_0 + 1} + \cdots + \lambda_k \bar{t}_k \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Făcând $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus, obţinem că $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = -\infty$, şi deci (2.3) are loc. ∎

Să observăm că dacă f este strict convexă atunci în (2.3) inegalitatea este strictă în cazul în care $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{dom} f$ şi cel puţin două elemente sunt distincte. Dacă f este convexă atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ mulţimile $\{x \in X \mid f(x) \le \lambda\}$ ($= \operatorname{niv}_\lambda f$) şi $\{x \in X \mid f(x) < \lambda\}$ sunt mulţimi convexe. Reciproca nu este, în general, adevărată. O funcţie f cu proprietatea că $\operatorname{niv}_\lambda f$ este convexă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ se numeşte *cvasiconvexă*. Astfel $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este cvasiconvexă dacă şi numai dacă

$$\forall\, x,\, y \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\ :\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \le \max\{f(x), f(y)\}.$$

Noţiunea de funcţie convexă se extinde în mod natural la funcţii cu valori în spaţii ordonate. Fie Y un spaţiu liniar real şi $Q \subset Y$ un con convex; Q induce o relaţie de ordine pe Y în modul următor: $y_1 \leq y_2$ (sau $y_1 \leq_Q y_2$ dacă există pericol de confuzie) dacă $y_2 - y_1 \in Q$. Prin analogie cu $\overline{I\!R}$, considerăm $Y^\bullet := Y \cup \{\infty\}$, unde $\infty \notin Y$ şi $y \leq \infty$ pentru orice $y \in Y$, iar $\lambda \cdot \infty = \infty$ pentru orice $\lambda \in]0, \infty[$ (notăm $y < \infty$ dacă $y \neq \infty$). Elementul $-\infty$ se introduce în mod similar. Punem în evidenţă faptul că Y este ordonat de Q prin notaţia (Y, Q) sau $(Y, \leq)$.

Fie (Y, Q) un spaţiu liniar ordonat şi $G : X \to Y^\bullet$; operatorul G se numeşte *Q-convex* dacă

$$G(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda G(x) + (1-\lambda)G(y) \quad \forall\, x,\, y \in X,\ \forall\, \lambda \in]0, 1[.$$

Operatorul $G : X \to Y \cup \{-\infty\}$ se numeşte *Q-concav* dacă $-G : X \to Y^\bullet$ este Q-convex.

Dacă $A \in L(X, Y)$ atunci A este Q-convex pentru orice con convex $Q \subset Y$.

Ca şi în cazul $Y = I\!R$,

$$\operatorname{dom} G := \{x \in X \mid G(x) < \infty\}, \quad \operatorname{epi} G := \{(x, y) \in X \times Y \mid G(x) \leq y\}.$$

Caracterizările pentru funcţii convexe date în Teorema 2.1.1 sunt valabile şi pentru operatori Q-convecşi.

Funcţia $f : (Y, Q) \to \overline{I\!R}$ se numeşte *Q-crescătoare* dacă $f(y_1) \leq f(y_2)$ pentru $y_1 \leq y_2$. Pentru o astfel de funcţie convenim că $f(\infty) = +\infty$. Este evident că orice funcţie este $\{0\}$-crescătoare, iar o funcţională liniară $\varphi : Y \to I\!R$ este Q-crescătoare dacă şi numai dacă $\varphi(y) \geq 0$ pentru orice $y \in Q$. În mod analog se definesc şi funcţiile Q-descrescătoare.

Punem în evidenţă câteva operaţii cu funcţii convexe.

Teorema 2.1.2 *Fie X, Y spaţii liniare şi $Q \subset Y$ un con convex.*

(i) *Dacă $f_i : X \to \overline{I\!R}$ este convexă pentru orice $i \in I$ $(\neq \emptyset)$ atunci* $\sup_{i \in I} f_i$ *este convexă. În plus* $\operatorname{epi}\,(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i$.

(ii) *Dacă f_1, $f_2 : X \to \overline{I\!R}$ sunt funcţii convexe şi λ_1, $\lambda_2 \in [0, \infty[$ atunci $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este convexă, unde $0 \cdot f_1 := I_{\operatorname{dom} f_1}$. În plus*

$$\operatorname{dom}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2.$$

(iii) *Dacă $f_n : X \to \overline{I\!R}$ este funcţie convexă pentru orice $n \in I\!N$, iar funcţia $f : X \to \overline{I\!R}$ este astfel ca $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pentru orice $x \in X$, atunci f este convexă.*

(iv) *Dacă* $G : X \to Y^\bullet$ *este operator* Q*-convex, iar* $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *este funcţie convexă şi* Q*-crescătoare, atunci* $f \circ G$ *este convexă; aceeaşi concluzie are loc dacă* $G : X \to Y \cup \{-\infty\}$ *este* Q*-concav, iar* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *este convexă şi* Q*-descrescătoare. În particular, dacă* $A \in L(X, Y)$ *şi* $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *este convexă atunci* $g \circ A$ *este convexă.*

(v) *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţii convexe, proprii şi*

$$F,\ H : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x,y) := f(x) + g(y),\ H(x,y) := \max\{f(x), g(y)\}.$$

Atunci funcţiile F *şi* H *sunt convexe şi proprii. În plus*

$$\operatorname{dom} F \ = \ \operatorname{dom} H \ = \ \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g.$$

(vi) *Dacă* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *este funcţie convexă şi* $A \in L(X, Y)$ *atunci funcţia*

$$Af : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (Af)(y) := \inf\{f(x) \mid Ax = y\},$$

este convexă. În plus $\operatorname{dom}(Af) = A(\operatorname{dom} f)$.

(vii) *Dacă* $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sunt convexe şi proprii atunci* convoluţia *şi* max-convoluţia *lor, definite în modul următor:*

$$f_1 \square \cdots \square f_n : X \to \overline{\mathbb{R}},\ (f_1 \square \cdots \square f_n)(x) := \inf\left\{ \sum\nolimits_{i=1}^n f_i(x_i) \,\Big|\, \sum\nolimits_{i=1}^n x_i = x \right\},$$

$$f_1 \nabla \cdots \nabla f_n : X \to \overline{\mathbb{R}},\ (f_1 \nabla \cdots \nabla f_n)(x) := \inf\left\{ \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i) \,\Big|\, \sum\nolimits_{i=1}^n x_i = x \right\},$$

sunt convexe. În plus

$$\operatorname{dom}(f_1 \square \cdots \square f_n) = \operatorname{dom}(f_1 \nabla \cdots \nabla f_n) = \operatorname{dom} f_1 + \cdots + \operatorname{dom} f_n.$$

Demonstraţie. (i) Este clar că $\operatorname{epi}(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i$. Cum f_i este convexă pentru orice i, din Teorema 2.1.1 avem că $\operatorname{epi} f_i$ este convexă, şi deci $\operatorname{epi}(\sup_{i \in I} f_i)$ este convexă. Concluzia rezultă aplicând din nou Teorema 2.1.1.

(ii) este imediată.

(iii) Fie $\lambda \in]0,1[$ şi $x, y \in \operatorname{dom} f$. Deoarece $\lim f_n(x),\ \lim f_n(y) < \infty$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $f_n(x),\ f_n(y) < \infty$ pentru $n \ge n_0$. Cum f_n este convexă, avem că

$$f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y).$$

Trecând la limită obţinem că

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Prin urmare f este convexă.

(iv) Fie G şi f satisfăcând condiţiile date. Avem că

$$x \in \operatorname{dom}(f \circ G) \;\Leftrightarrow\; G(x) \in \operatorname{dom} f \;\Leftrightarrow\; x \in G^{-1}(\operatorname{dom} f).$$

Fie deci x_1, $x_2 \in G^{-1}(\operatorname{dom} f)$ şi $\lambda \in]0,1[$. Atunci

$$G(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda G(x_1) + (1-\lambda)G(x_2).$$

Cum f este Q-crescătoare şi convexă,

$$\begin{aligned} f(G(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) &\leq f(\lambda G(x_1) + (1-\lambda)G(x_2)) \\ &\leq \lambda f(G(x_1)) + (1-\lambda) f(G(x_2)), \end{aligned}$$

adică $f \circ G$ este convexă. Celălalt caz se demonstrează la fel. Partea a doua este imediată deoarece A este $\{0\}$-convex iar g este $\{0\}$-crescătoare.

(v) Se obţine imediat că $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} H = \operatorname{dom} f \times \operatorname{dom} g$ şi că F, H sunt convexe.

(vi) Avem că

$$(Af)(y) < \infty \;\Leftrightarrow\; [\, \exists x \in \operatorname{dom} f \;:\; Ax = y] \;\Leftrightarrow\; y \in A(\operatorname{dom} f).$$

Fie y_1, $y_2 \in A(\operatorname{dom} f)$, $\lambda \in]0,1[$ şi t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $(Af)(y_i) < t_i$ pentru $i = 1, 2$. Atunci pentru fiecare $i \in \{1,2\}$ există $x_i \in X$ astfel ca $Ax_i = y_i$, $f(x_i) < t_i$. Cum $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$,

$$\begin{aligned} (Af)(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &\leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ &< \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2. \end{aligned}$$

Cum $t_i > (Af)(y_i)$ este arbitrar, din inegalitatea de mai sus obţinem că $(Af)(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda (Af)(y_1) + (1-\lambda)(Af)(y_2)$, şi deci Af este convexă.

(vii) Considerăm funcţiile F, $H : X^n \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \sum\nolimits_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad H(x_1, \ldots, x_n) := \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i),$$

şi

$$A : X^n \to X, \quad A(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n.$$

Observăm că$(f_1 \square \cdots \square f_n)(x) = (AF)(x)$, iar $(f_1 \nabla \cdots \nabla f_n)(x) = (AH)(x)$. Din (v) avem că F şi H sunt funcţii convexe, iar din (vi) obţinem că $f_1 \square \cdots \square f_n$ şi $f_1 \nabla \cdots \nabla f_n$ sunt convexe. ∎

Funcţiile convexe care iau valoarea $-\infty$ sunt destul de particulare.

Teorema 2.1.3 *Fie $f : X \to \overline{I\!R}$ funcţie convexă. Dacă există $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) = -\infty$ atunci $f(x) = -\infty$ pentru orice $x \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$.*

Demonstraţie. Fie $x \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$; cum $x_0 \in \operatorname{dom} f$, există $\mu > 0$ astfel ca $-\mu(x_0 - x) \in \operatorname{dom} f - x$, adică $y := (1+\mu)x - \mu x_0 \in \operatorname{dom} f$. Luând $\lambda := \frac{1}{\mu+1} \in]0,1[$, $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda y$, şi deci

$$f(x) \le (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(y) = -\infty. \qquad \blacksquare$$

În Secţiunea 1.1 am introdus funcţia indicatoare a unei mulţimi; dacă $A \subset X$, I_A este convexă dacă şi numai dacă A este convexă. Tot în Secţiunea 1.1 am asociat unei mulţimi $A \subset X \times I\!R$ (de tip epigraf) o funcţională $\varphi_A : X \to \overline{I\!R}$. Se verifică cu uşurinţă (exerciţiu !) că dacă A este convexă atunci φ_A este funcţie convexă.

Noţiunea de funcţională subliniară introdusă în Secţiunea 1.3 se poate extinde astfel: $f : X \to \overline{I\!R}$ este *subliniară* dacă **1)** $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in]0,\infty[$, **2)** $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in X$ şi **3)** $f(0) = 0$. Se constată uşor că f este subliniară dacă şi numai dacă $\operatorname{epi} f \subset X \times I\!R$ este con convex; în particular, orice funcţională subliniară este convexă. Teorema precedentă ne arată că dacă f este subliniară şi $0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$ atunci f este proprie.

Fie acum $\emptyset \ne C \subset X$ şi $f : C \to I\!R$; spunem că f este convexă dacă C este convexă şi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in C, \ \forall \lambda \in]0,1[.$$

Este uşor de văzut (exerciţiu !) că funcţia f de mai sus este convexă dacă şi numai dacă funcţia

$$\tilde{f} : X \to \overline{I\!R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad x \in C, \\ \infty & \text{dacă} \quad x \in X \setminus C, \end{cases}$$

este convexă în sensul definiţiei de la începutul acestei secţiuni. Desigur, se poate proceda şi invers: funcţia proprie $f : X \to \overline{I\!R}$ este convexă dacă şi numai dacă $f|_{\operatorname{dom} f}$ este convexă în sensul de mai sus. Considerarea funcţiilor (convexe) cu valori în $\overline{I\!R}$ conferă unele avantaje ce vor putea fi remarcate în cele ce urmează.

Având în vedere echivalenţa (i) $\Leftrightarrow$ (ii) din Teorema 2.1.1, este utilă cunoaşterea unor proprietăţi şi caracterizări ale funcţiilor convexe de o (singură) variabilă. Un prim rezultat în această direcţie este dat în teorema următoare.

Teorema 2.1.4 *Fie $f : I\!R \to \overline{I\!R}$ o funcţie convexă, proprie, cu proprietatea că $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \ne \emptyset$.*

(i) *Fie* $t_1, t_2 \in \operatorname{dom} f,\ t_1 < t_2$. *Presupunem că există* $\lambda_0 \in]0,1[$ *astfel ca* $f((1-\lambda_0)t_1 + \lambda_0 t_2) = (1-\lambda_0)f(t_1) + \lambda_0 f(t_2)$. *Atunci*

$$f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) = (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t_2) \quad \forall\, \lambda \in [0,1], \tag{2.4}$$
$$f(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} f(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} f(t_2) \quad \forall\, t \in [t_1, t_2]. \tag{2.5}$$

(ii) *Fie* $t_0 \in \operatorname{dom} f$. *Atunci aplicaţia*

$$\varphi_{t_0} : \operatorname{dom} f \setminus \{t_0\} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{t_0}(t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

este crescătoare; dacă f *este strict convexă atunci* φ_{t_0} *este strict crescătoare.*

(iii) *Fie* $t_0 \in \operatorname{dom} f$. *Atunci există*

$$f'_+(t_0) := \lim_{t \downarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \inf_{t > t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{2.6}$$
$$f'_-(t_0) := \lim_{t \uparrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \sup_{t < t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{2.7}$$

şi

$$f'_-(t_0) \le f'_+(t_0); \tag{2.8}$$

în plus $f'_-(t_0),\ f'_+(t_0) \in \mathbb{R}$ *dacă* $t_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. *Prin urmare* f *are derivate la stânga şi la dreapta în orice punct din* $\operatorname{dom} f$. *De asemenea,*

$$\tau \in [f'_-(t_0), f'_+(t_0)] \cap \mathbb{R} \iff \tau(t - t_0) \le f(t) - f(t_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

În cazul în care f *este strict convexă atunci în (2.9) inegalitatea este strictă pentru* $t \neq t_0$.

(iv) *Fie* $t_1, t_2 \in \operatorname{dom} f,\ t_1 < t_2$. *Atunci* $f'_+(t_1) \le f'_-(t_2)$, *iar dacă* f *este strict convexă atunci* $f'_+(t_1) < f'_-(t_2)$. *Prin urmare aplicaţiile* f'_- *şi* f'_+ *sunt crescătoare pe* $\operatorname{dom} f$. *În plus,* f *este strict convexă dacă şi numai dacă* f'_- (f'_+) *este strict crescătoare pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

(v) *Funcţia* f *este lipschitziană pe orice interval compact din* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, *şi deci este continuă pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, *iar pentru orice* $t_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$,

$$\lim_{t \uparrow t_0} f'_-(t) = \lim_{t \uparrow t_0} f'_+(t) = f'_-(t_0), \quad \lim_{t \downarrow t_0} f'_+(t) = \lim_{t \downarrow t_0} f'_-(t) = f'_+(t_0).$$

(vi) *Funcţia* f *este monotonă pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *sau există* $t_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ *astfel că* f *este descrescătoare pe* $]-\infty, t_0] \cap \operatorname{dom} f$ *şi este crescătoare pe* $[t_0, \infty[\cap \operatorname{dom} f$.

Demonstraţie. Pentru început fie t_1, t_2, $t_3 \in \operatorname{dom} f$ astfel ca $t_1 < t_2 < t_3$. Atunci $t_2 = (1-\lambda)t_1 + \lambda t_3$ cu $\lambda = \frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}$, şi deci

$$f(t_2) \leq \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} f(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} f(t_3),$$

inegalitatea fiind strictă dacă f este strict convexă. Scăzând pe rând $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$ din ambii membri ai inegalităţii de mai sus şi înmulţind apoi cu $\frac{1}{t_2-t_1}$, $\frac{t_3-t_1}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)}$, respectiv $\frac{1}{t_3-t_2}$, obţinem

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \leq \frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}, \qquad \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \leq \frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2},$$
$$\frac{f(t_1)-f(t_3)}{t_1-t_3} \leq \frac{f(t_2)-f(t_3)}{t_2-t_3}, \tag{2.10}$$

inegalităţile fiind stricte dacă f este strict convexă.

(i) Fie t_1, $t_2 \in \operatorname{dom} f$, $t_1 < t_2$, şi $\lambda_0 \in]0,1[$ astfel ca $f((1-\lambda_0)t_1 + \lambda_0 t_2) = (1-\lambda_0)f(t_1) + \lambda_0 f(t_2)$. Presupunem că există $\lambda \in [0,1]$ astfel ca $f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) < (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t_2)$; fie $\lambda < \lambda_0$ (se procedează analog în cazul $\lambda > \lambda_0$). Luând $\theta := \frac{1-\lambda_0}{1-\lambda} \in]0,1[$, avem că $\lambda_0 = \theta\lambda + (1-\theta)\cdot 1$ şi $(1-\lambda_0)t_1 + \lambda_0 t_2 = \theta[(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2] + (1-\theta)t_2$, de unde obţinem contradicţia

$$\begin{aligned} f((1-\lambda_0)t_1 + \lambda_0 t_2) &\leq \theta f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) + (1-\theta)f(t_2) \\ &< \theta[(1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t_2)] + (1-\theta)f(t_2) \\ &= (1-\lambda_0)f(t_1) + \lambda_0 f(t_2). \end{aligned}$$

Deci (2.4) are loc. Luând $t \in [t_1, t_2]$ şi $\lambda = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \in [0,1]$ în (2.4) obţinem (2.5).

(ii) Fie $t_0 \in \operatorname{dom} f$ şi t_1, $t_2 \in \operatorname{dom} f \setminus \{t_0\}$, $t_1 < t_2$. Considerând succesiv cazurile $t_1 < t_2 < t_0$, $t_1 < t_0 < t_2$, $t_0 < t_1 < t_2$, din (2.10) obţinem că φ_{t_0} este crescătoare, iar dacă f este strict convexă, φ_{t_0} este strict crescătoare.

(iii) Fie pentru început $t_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Deoarece φ_{t_0} este crescătoare pe $\operatorname{dom} f \cap]t_0, \infty[$ $(\neq \emptyset)$, respectiv pe $\operatorname{dom} f \cap]-\infty, t_0[$ $(\neq \emptyset)$, există

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow t_0} \varphi_{t_0}(t) &:= \lim_{t \downarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \inf_{t > t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < \infty, \\ \lim_{t \uparrow t_0} \varphi_{t_0}(t) &:= \lim_{t \uparrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \sup_{t < t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} > -\infty, \end{aligned}$$

adică există $f'_-(t_0)$ şi $f'_+(t_0)$. Deoarece φ_{t_0} este crescătoare pe $\operatorname{dom} f \setminus \{t_0\}$, inegalitatea (2.8) are loc. Din cele arătate mai sus avem că $f'_-(t_0)$, $f'_+(t_0) \in \mathbb{R}$.

Dacă t_0 este extremitatea dreaptă a intervalului $\operatorname{dom} f$, $f(t) = \infty$ pentru $t > t_0$, şi deci $f'_+(t_0) = \infty$, iar $f'_-(t_0) \leq \infty$ (existenţa acesteia din urmă rezultând tot din monotonia lui φ_{t_0}), iar dacă t_0 este extremitatea stângă a intervalului $\operatorname{dom} f$ avem că $f'_-(t_0) = -\infty \leq f'_+(t_0)$.

Fie acum $\tau \in [f'_-(t_0), f'_+(t_0)] \cap I\!\!R$ şi $t < t_0 < t'$; din (2.6) şi (2.7) avem că

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq f'_-(t_0) \leq \tau \leq f'_+(t_0) \leq \frac{f(t') - f(t_0)}{t' - t_0}.$$

Observăm că prima, respectiv ultima inegalitate, din relaţia de mai sus este strictă dacă prima, respectiv ultima cantitate din aceeaşi relaţie este finită, iar funcţia f este strict convexă. Din aceste inegalităţi se obţine imediat (2.9), cu inegalitate strictă dacă f este strict convexă.

Invers, dacă $\tau \in I\!\!R$ şi $\tau(t - t_0) \leq f(t) - f(t_0)$ pentru orice $t \in I\!\!R$, împărţind prin $t - t_0$ în cazul în care $t > t_0$, respectiv $t < t_0$, şi făcând $t \to t_0$, obţinem $\tau \in [f'_-(t_0), f'_+(t_0)]$.

(iv) Fie $t_1,\ t_2 \in \operatorname{dom} f,\ t_1 < t_2$. Considerăm $t \in]t_1, t_2[$; din (2.6), (2.7) şi (2.10) avem că

$$f'_+(t_1) \leq \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} \leq f'_-(t_2),$$

inegalităţile fiind stricte dacă f este strict convexă. Utilizând şi (2.8), avem că f'_- şi f'_+ sunt crescătoare, chiar strict crescătoare dacă f este strict convexă.

Presupunem că f nu este strict convexă; există $t_1,\ t_2 \in \operatorname{dom} f,\ t_1 < t_2$, şi $\lambda_0 \in]0, 1[$ astfel ca $f((1 - \lambda_0)t_1 + \lambda_0 t_2) = (1 - \lambda_0)f(t_1) + \lambda_0 f(t_2)$. Prin urmare are loc (2.5), şi deci

$$f'_-(t) = f'_+(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \forall\, t \in]t_1, t_2[.$$

Cum $]t_1, t_2[\subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, obţinem că f'_- şi f'_+ nu sunt strict crescătoare pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

(v) Fie $t_1,\ t_2 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f),\ t_1 < t_2$, şi $t,\ t' \in]t_1, t_2[,\ t < t'$. Din (2.6), (2.7) şi (2.10) avem că

$$f'_+(t_1) \leq \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t} \leq \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \leq \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t} \leq f'_-(t_2),$$

şi deci $|f(t') - f(t)| \leq M|t' - t|$, unde $M := \max\{|f'_+(t_1)|, |f'_-(t_2)|\} \in I\!\!R$. Deci f este lipschitziană pe $]t_1, t_2[$. Cum orice interval compact din $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ este conţinut într-un interval $]t_1, t_2[$ cu $[t_1, t_2] \subset \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, are loc concluzia.

Fie acum $t_0 \in \operatorname{dom} f$ astfel ca f să fie continuă la stânga în t_0 (prin urmare t_0 nu este extremitatea stângă pentru $\operatorname{dom} f$), de exemplu $t_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Ştim deja că

$$f'_-(t) \leq f'_+(t) \leq f'_-(t_0) \in]-\infty, \infty] \quad \forall\, t \in \operatorname{dom} f \cap]-\infty, t_0[.$$

Fie $\lambda \in I\!R$ astfel ca $\lambda < f'_-(t_0)$; din definiţia supremului şi relaţia (2.7), există $t_1 \in \operatorname{dom} f$ astfel ca $t_1 < t_0$ şi $\lambda < (f(t_1) - f(t_0))/(t_1 - t_0)$. Datorită continuităţii la stânga a funcţiei f în t_0, există $t_2 \in]t_1, t_0[$ astfel ca $\lambda < (f(t_1) - f(t_2))/(t_1 - t_2)$. Fie $t \in]t_2, t_0[$. Utilizând din nou (2.10), avem că

$$\lambda < \frac{f(t) - f(t_2)}{t - t_2} = \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t} \leq f'_-(t).$$

Prin urmare

$$\lim_{t \uparrow t_0} f'_-(t) = \lim_{t \uparrow t_0} f'_+(t) = f'_-(t_0).$$

În mod analog se obţine şi cealaltă formulă.

(vi) Să observăm mai întâi că dacă $f'_+(t_0) \geq (>)\, 0$ atunci f este (strict) crescătoare pe $[t_0, \infty[\, \cap \operatorname{dom} f$. Într-adevăr, dacă t_1, $t_2 \in \operatorname{dom} f$ şi $t_0 \leq t_1 < t_2$ atunci $0 \leq (<)\, f'_+(t_0) \leq f'_+(t_1) \leq [f(t_2) - f(t_1)]/(t_2 - t_1)$. Analog, dacă $f'_-(t_0) \leq (<)\, 0$ atunci f este (strict) descrescătoare pe $]-\infty, t_0] \cap \operatorname{dom} f$.

Dacă $f'_+(t) \geq 0$ pentru orice $t \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, din cele observate mai sus, avem că f este crescătoare pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, iar dacă $f'_+(t) \leq 0$ pentru orice $t \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, atunci, prin (2.8), $f'_-(t) \leq 0$ pentru $t \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, şi deci f este descrescătoare pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Dacă nici una din aceste condiţii nu este îndeplinită atunci există $t_1 < t_2$ din $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ astfel ca $f'_+(t_1) < 0 < f'_+(t_2)$. Fie $t_0 := \inf\{t \in \operatorname{dom} f \mid f'_+(t) \geq 0\} \in]t_1, t_2]$. Rezultă că $f'_-(t) < 0$ pentru orice $t \in \operatorname{dom} f$, $t < t_0$, şi deci f este strict descrescătoare pe $]-\infty, t_0] \cap \operatorname{dom} f$. Din (v) avem că $f'_+(t_0) \geq 0$ şi deci f este crescătoare pe $[t_0, \infty[\, \cap \operatorname{dom} f$. ∎

Un exemplu important de funcţie convexă este următorul: Fie $I \subset I\!R$ interval, $t_0 \in I$ fixat, $\varphi : I \to I\!R$ o funcţie crescătoare şi

$$f : I\!R \to \overline{I\!R}, \quad f(t) := \begin{cases} \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt & \text{dacă} \quad t \in I, \\ \infty & \text{dacă} \quad t \notin I; \end{cases}$$

funcţia f este convexă, iar pentru orice $\bar{t} \in I = \operatorname{dom} f$,

$$\begin{aligned} f'_+(\bar{t}) &= \varphi_+(\bar{t}) = \inf\{\varphi(t) \mid t \in I,\ t > \bar{t}\}, \\ f'_-(\bar{t}) &= \varphi_-(\bar{t}) = \sup\{\varphi(t) \mid t \in I,\ t < \bar{t}\}. \end{aligned}$$

Următorul rezultat se foloseşte în mod frecvent pentru a stabili că o funcţie de o variabilă este convexă.

Teorema 2.1.5 *Fie $I \subset I\!R$ interval deschis (nevid) şi $f : I \to I\!R$ o funcţie derivabilă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este convexă;*

(ii) *$f'(s)\cdot(t-s)\le f(t)-f(s)$ pentru orice $t,\ s\in I$;*

(iii) *$(f'(t)-f'(s))\cdot(t-s)\ge 0$ pentru orice $t,\ s\in I$, adică f' este crescătoare;*

(iv) *(dacă f este de două ori derivabilă pe I) $f''(t)\ge 0$ pentru orice $t\in I$.*

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fie deci f convexă. Cum f este derivabilă, avem că $f'(s)=f'_-(s)=f'_+(s)$ pentru orice $s\in I$. Concluzia rezultă din (2.9) luând $\tau=f'(s)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Fie $t,\ s\in I$. Din ipoteză avem că

$$f'(s)(t-s)\le f(t)-f(s),\qquad f'(t)(s-t)\le f(s)-f(t).$$

Sumând cele două relaţii obţinem concluzia.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Considerăm $t_1,t_2\in I$ astfel ca $t_1<t_2$, şi $\lambda\in]0,1[$; fie $t_\lambda:=(1-\lambda)t_1+\lambda t_2\in]t_1,t_2[$. Atunci

$$\begin{aligned}(1-\lambda)f(t_1)+\lambda f(t_2)-f(t_\lambda) &=\\ &=(1-\lambda)[f(t_1)-f(t_\lambda)]+\lambda[f(t_2)-f(t_\lambda)]\\ &=(1-\lambda)f'(\tau_1)(t_1-t_\lambda)+\lambda f'(\tau_2)(t_2-t_\lambda)\\ &=\lambda(1-\lambda)f'(\tau_1)(t_1-t_2)+\lambda(1-\lambda)f'(\tau_2)(t_2-t_1)\\ &=\lambda(1-\lambda)(t_1-t_2)[f'(\tau_1)-f'(\tau_2)]\ge 0,\end{aligned}$$

unde $\tau_1\in]t_1,t_\lambda[,\ \tau_2\in]t_\lambda,t_2[$ (deci $\tau_1<\tau_2$) s-au obţinut prin utilizarea Teoremei lui Lagrange; desigur am utilizat faptul că f' este crescătoare.

Presupunem acum că f este de două ori derivabilă pe I. În acest caz avem că (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) dintr-o cunoscută consecinţă a teoremei lui Lagrange. ∎

Teorema 2.1.6 *Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval deschis şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este strict convexă;*

(ii) *$f'(s)\cdot(t-s)<f(t)-f(s)$ pentru orice $t,\ s\in I,\ t\ne s$;*

(iii) *$(f'(t)-f'(s))\cdot(t-s)>0$ pentru orice $t,\ s\in I$, $t\ne s$, adică f' este strict crescătoare;*

(iv) *(dacă f este de două ori derivabilă pe I) $f''(t)\ge 0$ pentru orice $t\in I$, şi $\{t\in I\mid f''(t)=0\}$ nu conţine nici un interval propriu.*

Demonstraţie. Demonstraţia este complet analoagă celei a teoremei precedente, înlocuind, bineînţeles, inegalităţile cu inegalităţi stricte, şi, desigur, utilizând caracterizarea funcţiilor strict crescătoare. ∎

Caracterizări similare celor din teoremele precedente se reformulează imediat pentru funcţii concave şi respectiv strict concave.

Ca aplicaţii imediate ale ultimelor două teoreme se pot arăta următoarele: **1)** $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := |x|^p$, unde $p \in]1, \infty[$, este funcţie strict convexă; **2)** $f_2 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_2(x) := x^p$, unde $p \in]0, 1[$, este strict concavă şi strict crescătoare; **3)** $f_3 :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_3(x) := x^p$, unde $p \in] - \infty, 0[$, este strict convexă şi strict descrescătoare; **4)** $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) := x^p$ dacă $x \geq 0$, $f_4(x) := 0$ în caz contrar, unde $p \in]1, \infty[$, este convexă şi crescătoare; **5)** $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) := \exp x$, este strict convexă şi strict crescătoare; **6)** $f_6 :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_6(x) := \ln x$, este strict concavă şi strict crescătoare; **7)** $f_7 : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_7(x) := x \ln x$ dacă $x > 0$, $f_7(x) := 0$ dacă $x = 0$, este strict convexă; **8)** $f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_8(x) := \sqrt{1 + x^2}$, este strict convexă.

Dăm în continuare caracterizări ale convexităţii funcţiilor G-diferenţiabile definite pe spaţii normate.

Teorema 2.1.7 *Fie $D \subset (X, \| \ \|)$ o mulţime nevidă, convexă şi deschisă, şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie G-diferenţiabilă pe D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este convexă;*

(ii) *$\langle y - x, \nabla f(x) \rangle \leq f(y) - f(x)$ pentru orice orice x, $y \in D$;*

(iii) *$\langle y - x, \nabla f(y) - \nabla f(x) \rangle \geq 0$ pentru orice x, $y \in D$;*

(iv) *(dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II pe D) $\nabla^2 f(x)(y, y) \geq 0$ pentru orice $x \in D$ şi $y \in X$.*

Demonstraţie. Pentru x, $y \in D$ fie $I_{x,y} := \{t \in \mathbb{R} \mid (1 - t)x + ty \in D\}$; se constată cu uşurinţă că $I_{x,y}$ este interval (deoarece D este convexă) deschis (deoarece D este deschisă) şi $[0, 1] \subset I_{x,y}$. Considerăm de asemenea funcţia

$$\varphi_{x,y} : I_{x,y} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{x,y}(t) := f((1 - t)x + ty).$$

Am văzut în Secţiunea 1.10 că

$$\begin{aligned} \varphi'_{x,y}(t) &= \nabla f((1 - t)x + ty)(y - x), \\ \varphi''_{x,y}(t) &= \nabla^2 f((1 - t)x + ty)(y - x, y - x) \ \ \forall\, t \in I_{x,y}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

desigur, a doua formulă are loc în cazul în care f este F-diferenţiabilă de ordin II pe D.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Fie x, $y \in D$. Din Teorema 2.1.1 avem că $\varphi_{x,y}$ este convexă, iar din Teorema 2.1.5 avem că $\varphi'_{x,y}(0)(1 - 0) \leq \varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0)$, şi deci concluzia are loc.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Scriind ipoteza pentru perechile (x, y) şi (y, x) obţinem imediat concluzia.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Fie $x,\ y \in D$ şi $t,\ s \in I_{x,y},\ s < t$; avem că

$$\begin{aligned}\varphi'(t) - \varphi'(s) \quad &= \quad \frac{1}{t-s}\langle (1-t)x + ty - (1-s)x - sy, \\ &\qquad \nabla f((1-t)x + ty) - \nabla f((1-s)x + sy)\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Din Teorema 2.1.5 obţinem că $\varphi_{x,y}$ este convexă, iar din Teorema 2.1.1 obţinem că f este convexă.

Presupunem acum că f este F-diferenţiabilă de ordin II pe D.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Fie $x \in D$ şi $y \in X$. Deoarece D este deschisă, $D - x$ este absorbantă, şi deci există $\alpha > 0$ astfel ca $u := x + \alpha y \in D$. Din ipoteză rezultă că $\varphi_{x,u}$ este convexă, şi deci, din Teorema 2.1.5, $\varphi''_{x,u}(t) \geq 0$ pentru orice $t \in I_{x,u}$. În particular

$$\varphi''_{x,u}(0) = \nabla^2 f(x)(u - x, u - x) = \alpha^2 \nabla^2 f(x)(y, y) \geq 0.$$

Prin urmare concluzia are loc.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Fie $x,\ y \in D$. Pentru $t \in I_{x,y}$, din (2.11), avem că $\varphi''_{x,y}(t) \geq 0$. Aplicând din nou Teorema 2.1.5 obţinem că $\varphi_{x,y}$ este convexă, şi deci f este convexă. ∎

Caracterizări asemănătoare se pot da pentru funcţii strict convexe.

Teorema 2.1.8 *Fie $D \subset (X, \|\ \|)$ o mulţime nevidă, convexă şi deschisă, şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie G-diferenţiabilă pe D. Atunci (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftarrow$ (iv), unde*

(i) *f este strict convexă;*

(ii) *$\langle y - x, \nabla f(x)\rangle < f(y) - f(x)$ pentru orice $x,\ y \in D,\ x \neq y$;*

(iii) *$\langle y - x, \nabla f(y) - \nabla f(x)\rangle > 0$ pentru orice $x,\ y \in D,\ x \neq y$;*

(iv) *(dacă f este F-diferenţiabilă de ordin II pe D) $\nabla^2 f(x)(y, y) > 0$ pentru orice $x \in D$ şi $y \in X \setminus \{0\}$.*

Demonstraţie. Desigur, ca şi în Teorema 2.1.1, avem că f este strict convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x,\ y \in D,\ x \neq y,\ \varphi_{x,y}$, construită în cursul demonstraţiei teoremei precedente, este strict convexă. Demonstraţia urmăreşte pas cu pas demonstraţia teoremei precedente, folosind însă Teorema 2.1.6 în locul Teoremei 2.1.5. ∎

O proprietate remarcabilă a funcţiilor convexe este pusă în evidenţă în rezultatul următor.

Teorema 2.1.9 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă, proprie şi $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Atunci pentru orice $x \in X$ există*

$$f'_+(x_0;x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t} = \inf_{t>0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t} \in \overline{\mathbb{R}} \qquad (2.12)$$

şi

$$f'_+(x_0;x) \le f(x_0+x) - f(x_0) \quad \forall\, x \in X, \qquad (2.13)$$

inegalitatea fiind strictă dacă f este strict convexă, $x \neq 0$ şi $f'_+(x_0;x) < \infty$. În plus $f'_+(x_0;\cdot)$ este subliniară. Dacă $x_0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $f'_+(x_0;\cdot)$ este proprie, iar dacă $x_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $f'_+(x_0;x) \in \mathbb{R}$ pentru orice $x \in X$.

Demonstraţie. Fie $x \in X$ şi $\psi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\psi(t) := f(x_0+tx)$. Deoarece $\psi = \varphi_{x_0,x_0+x}$ ($\varphi_{x,y}$ utilizată în Teorema 2.1.1), ψ este convexă, chiar strict convexă dacă f este strict convexă şi $x \neq 0$. Din Teorema 2.1.4 avem că există

$$\psi'_+(0) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0} = \inf_{t>0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0},$$

adică are loc (2.12). Tot din Teorema 2.1.4 obţinem şi relaţia (2.13), cu varianta corespunzătoare în cazul în care f este strict convexă şi $x \neq 0$.

Este evident că $f'_+(x_0;0) = 0$ şi $f'_+(x_0;\lambda x) = \lambda f'_+(x_0;x)$ pentru orice $x \in X$, $\lambda > 0$. Fie acum $x, y \in X$. Avem

$$\begin{aligned} f(x_0+t(x+y)) &= f\left(\tfrac{1}{2}(x_0+2tx) + \tfrac{1}{2}(x_0+2ty)\right) \\ &\le \tfrac{1}{2} f(x_0+2tx) + \tfrac{1}{2} f(x_0+2ty), \end{aligned}$$

şi deci

$$\frac{f(x_0+t(x+y))-f(x_0)}{t} \le \frac{f(x_0+2tx)-f(x_0)}{2t} + \frac{f(x_0+2ty)-f(x_0)}{2t}.$$

Făcând $t \downarrow 0$, obţinem

$$f'_+(x_0;x+y) \le f'_+(x_0;x) + f'_+(x_0;y) \quad \forall\, x,\, y \in X.$$

Deci $f'_+(x_0;\cdot)$ este subliniară.

Observăm că $\operatorname{dom} f'_+(x_0;\cdot) = [0,\infty[\,\cdot(\operatorname{dom} f - x_0)$. Dacă $x_0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $\operatorname{dom} f'_+(x_0;\cdot) = \operatorname{lin}(\operatorname{dom} f - x_0)$ şi deci $0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f'_+(x_0;\cdot))$. Din Teorema 2.1.3 avem că $f'_+(x_0;\cdot)$ este proprie. Dacă $x_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $\operatorname{dom} f'_+(x_0;\cdot) = X$ şi $f'_+(x_0;\cdot)$ este proprie, ceea ce arată că $f'_+(x_0;x) \in \mathbb{R}$ pentru orice $x \in X$. ∎

Să observăm că este posibil ca $f'_+(x_0;\cdot)$ să ia valoarea $-\infty$; de exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) := -\sqrt{1-x^2}$ dacă $|x| \le 1$, $f(x) := \infty$ dacă $|x| > 1$, şi $x_0 = -1$ avem $f'_+(x_0;x) = -\infty$ pentru orice $x > 0$ (exerciţiu !).

O generalizare firească a teoremei anterioare este formulată în continuare.

Teorema 2.1.10 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă şi proprie, $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon \in [0, \infty[$. Atunci ε-*derivata direcţională *a funcţiei f în x_0*

$$f'_\varepsilon(x_0; \cdot) : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f'_\varepsilon(x_0; x) := \inf_{t>0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0) + \varepsilon}{t},$$

este subliniară,

$$f'_\varepsilon(x_0; x) \leq f(x_0 + x) - f(x_0) + \varepsilon \quad \forall\, x \in X, \tag{2.14}$$

şi

$$f'_+(x_0; x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'_\varepsilon(x_0; x) = \inf_{\varepsilon > 0} f'_\varepsilon(x_0; x) \quad \forall\, x \in X. \tag{2.15}$$

În plus, dacă $x_0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $f'_\varepsilon(x_0; \cdot)$ este proprie, iar dacă $x_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$ atunci $f'_\varepsilon(x_0; x) \in \mathbb{R}$ pentru orice $x \in X$.

Demonstraţie. Este evident că $f'_\varepsilon(x_0; 0) = 0$ şi pentru $\lambda > 0$

$$f'_\varepsilon(x_0; \lambda x) = \inf_{t>0} \frac{f(x_0 + t\lambda x) - f(x_0) + \varepsilon}{t\lambda} \cdot \lambda = \lambda f'_\varepsilon(x_0; x).$$

Fie acum x, $y \in X$ şi s, $t > 0$. Atunci

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \tfrac{st}{s+t}(x + y)\right) &= f\left(\tfrac{t}{s+t}(x_0 + sx) + \tfrac{s}{s+t}(x_0 + ty)\right) \\ &\leq \tfrac{t}{s+t} f(x_0 + sx) + \tfrac{s}{s+t} f(x_0 + ty). \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} &\left[f\left(x_0 + \tfrac{st}{s+t}(x + y)\right) - f(x_0) + \varepsilon\right] \Big/ \tfrac{st}{s+t} \\ &\leq \frac{f(x_0 + sx) - f(x_0) + \varepsilon}{s} + \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0) + \varepsilon}{t}. \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru orice s, $t > 0$ avem că

$$f'_\varepsilon(x_0; x + y) \leq \frac{f(x_0 + sx) - f(x_0) + \varepsilon}{s} + \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0) + \varepsilon}{t}.$$

Trecând la infimum în membrul drept, succesiv, în raport cu s şi t, obţinem că

$$f'_\varepsilon(x_0; x + y) \leq f'_\varepsilon(x_0; x) + f'_\varepsilon(x_0; y).$$

Luând $t = 1$ în definiţia lui $f'_\varepsilon(x_0; x)$ obţinem (2.14). Pe de altă parte, observând că pentru $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < \infty$ au loc inegalităţile

$$f'_0(x_0; x) = f'_+(x_0; x) \leq f'_{\varepsilon_1}(x_0; x) \leq f'_{\varepsilon_2}(x_0; x) \quad \forall\, x \in X,$$

obţinem că

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f'_\varepsilon(x_0;x) &= \inf_{\varepsilon>0} f'_\varepsilon(x_0;x) = \inf_{\varepsilon>0}\inf_{t>0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)+\varepsilon}{t} \\
&= \inf_{t>0}\inf_{\varepsilon>0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)+\varepsilon}{t} = \inf_{t>0} \frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t} \\
&= f'_+(x_0;x) \quad \forall\, x\in X.
\end{aligned}$$

Celelalte concluzii rezultă în acelaşi mod ca şi în teorema precedentă. ▮

2.2 Semicontinuitatea funcţiilor convexe

În acest paragraf X este un spaţiu normat, însă cele mai multe rezultate pot fi stabilite în spaţii local convexe separate.

Are loc următorul rezultat.

Teorema 2.2.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *f este convexă şi inferior semicontinuă;*

(ii) *f este convexă şi w–inferior semicontinuă;*

(iii) epi f *este mulţime convexă şi închisă;*

(iv) epi f *este mulţime convexă şi w–închisă.*

Demonstraţie. Echivalenţa condiţiilor din teoremă rezultă imediat prin aplicarea Teoremei 2.1.1, Teoremei 1.1.14 şi Teoremei 1.6.2. ▮

Următorul criteriu de convexitate se dovedeşte util uneori.

Teorema 2.2.2 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie satisfă-când urmă-toarele condiţii:* **1)** $f(0) = 0$, **2)** $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *pentru orice* $x \in X$, $\lambda \in]0,\infty[$, **3)** f *este cvasiconvexă,* **4)** f *este i.s.c. în orice* $x \in \operatorname{dom} f$. *Presupunem că* **a)** $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$ *sau* **b)** $\operatorname{dom} f \subset \overline{\{x \in X \mid f(x) < 0\}}$. *Atunci f este subliniară, şi deci convexă.*

Demonstraţie. Observăm mai întâi că dacă x, $y \in \operatorname{dom} f$ şi $f(x)\cdot f(y) > 0$ atunci $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Într-adevăr, avem că

$$f\left(\tfrac{f(x)}{f(x)+f(y)}\cdot\tfrac{f(y)}{f(x)}\cdot x + \tfrac{f(y)}{f(x)+f(y)}\cdot y\right) \leq \max\left\{f\left(\tfrac{f(y)}{f(x)}x\right), f(y)\right\} = f(y),$$

şi deci $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Din ipoteză avem că $\operatorname{dom} f$ este con convex. Prin urmare este suficient să arătăm că $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pentru orice x, $y \in \operatorname{dom} f$.

Presupunem că are loc a); deci $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in X$, şi fie $x, y \in \operatorname{dom} f$. Putem presupune că $f(x) \leq f(y)$. Dacă $f(x) > 0$, din cele arătate mai sus avem că $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Fie $f(x) = 0$; atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(x + (1 - \tfrac{1}{n})y\right) = f\left(\tfrac{1}{n}(nx) + (1 - \tfrac{1}{n})y\right) \leq \max\{f(nx), f(y)\} = f(y).$$

Trecând la limită inferioară obţinem că $f(x+y) \leq f(y) = f(x) + f(y)$.

Presupunem acum că b) are loc. Fie $A := \{x \in X \mid f(x) < 0\} \subset \operatorname{dom} f$. Dacă $x \in \operatorname{dom} f \setminus A$ atunci, din ipoteză, există $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, $x_n \to x$. În plus, avem că

$$0 \leq f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0,$$

şi deci $f(x_n) \to f(x) = 0$. Prin urmare $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$.

Fie $x, y \in \operatorname{dom} f$. Dacă $x, y \in A$, am văzut la începutul demonstraţiei, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Dacă $x, y \in \operatorname{dom} f \setminus A$ atunci $f(x) = f(y) = 0$, iar $x + y \in \operatorname{dom} f$, şi deci $f(x+y) \leq 0 = f(x) + f(y)$. A mai rămas de considerat cazul în care $x \in \operatorname{dom} f \setminus A$ şi $y \in A$; există $(x_n) \subset A$, $x_n \to x$. Atunci $x + y \in \operatorname{dom} f$ şi $f(x_n + y) \leq f(x_n) + f(y)$. Luând limita inferioară, şi ţinând seama de faptul că $f(x_n) \to 0$, obţinem că $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. ∎

Consecinţa 2.2.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie cvasiconvexă, i.s.c., proprie şi pozitiv omogenă. Considerăm funcţiile $f_1 := \max\{f, 0\}$ şi $f_2 := f + I_{\bar{A}}$, unde $A := \{x \in X \mid f(x) < 0\}$. Atunci f_1 şi f_2 (în cazul în care $A \neq \emptyset$) sunt subliniare.*

Demonstraţie. Este evident că f_1 şi f_2 sunt cvasiconvexe, i.s.c. şi pozitiv omogene. Concluzia rezultă aplicând teorema precedentă. ∎

Un rezultat asemănător este stabilit în consecinţa următoare.

Consecinţa 2.2.2 *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie cvasiconvexă şi pozitiv omogenă. Dacă f este majorată pe o vecinătate a originii sau X este finit dimensional atunci $f_1 := \max\{f, 0\}$ este funcţională subliniară.*

Demonstraţie. Presupunem că există $\lambda_0 > 0$ astfel ca $\operatorname{niv}_{\lambda_0} f$ să fie vecinătate a originii. Deoarece $\operatorname{niv}_\lambda f = \frac{\lambda}{\lambda_0} \operatorname{niv}_{\lambda_0} f$ pentru $\lambda > 0$, avem că $0 \in \operatorname{int}\,(\operatorname{niv}_\lambda f)$ pentru orice $\lambda > 0$. Fie $0 < \lambda < \mu$ şi $x \in \overline{\operatorname{niv}_\lambda f}$. Cum $0 \in \operatorname{int}\,(\operatorname{niv}_\lambda f)$, din Teorema 1.4.3, $\frac{\lambda}{\mu} x \in \operatorname{int}\,(\operatorname{niv}_\lambda f)$. Rezultă că

$$x \in \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{int}\,(\operatorname{niv}_\lambda f) = \operatorname{int}\left(\frac{\mu}{\lambda} \operatorname{niv}_\lambda f\right) = \operatorname{int}\,(\operatorname{niv}_\mu f) \subset \operatorname{niv}_\mu f.$$

Prin urmare
$$\overline{\mathrm{niv}_\lambda f} \subset \bigcap\nolimits_{\mu>\lambda} \mathrm{niv}_\mu f = \mathrm{niv}_\lambda f \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Deci $\mathrm{niv}_\lambda f$ este mulţime închisă pentru $\lambda > 0$. Deoarece $\mathrm{niv}_0 f = \bigcap_{\lambda>0} \mathrm{niv}_\lambda f$, avem că şi $\mathrm{niv}_0 f$ este mulţime închisă. Cum $\mathrm{niv}_\lambda f_1 = \mathrm{niv}_\lambda f$ pentru $\lambda \geq 0$, iar $\mathrm{niv}_\lambda f_1 = \emptyset$ pentru $\lambda < 0$, rezultă că f_1 este i.s.c. Deoarece f_1 este şi cvasiconvexă, din Teorema 2.2.2, avem că f_1 este subliniară.

Presupunem acum că $\dim X < \infty$. Din ipoteză avem că $\mathrm{niv}_1 f$ este mulţime convexă şi absorbantă. Deoarece $\dim X < \infty$, $0 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{niv}_1 f)$. Concluzia rezultă din cele dovedite mai sus. ∎

Un rezultat analog celui stabilit în Teorema 2.1.3 este următorul.

Teorema 2.2.3 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie i.s.c. şi convexă. Dacă există $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) = -\infty$ atunci $f(x) = -\infty$ pentru orice $x \in \mathrm{dom}\, f$.*

Demonstraţie. Presupunem că există $x \in \mathrm{dom}\, f$ astfel ca $f(x) := t \in \mathbb{R}$. Atunci $(x, t) \in \mathrm{epi}\, f$ şi $(x_0, t - n) \in \mathrm{epi}\, f$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că

$$\tfrac{1}{n}(x_0, t - n) + (1 - \tfrac{1}{n})(x, t) = \left(\tfrac{1}{n}x_0 + \tfrac{n-1}{n}x, t - 1\right) \in \mathrm{epi}\, f \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

şi deci $(x, t - 1) \in \overline{\mathrm{epi}\, f} = \mathrm{epi}\, f$, adică $f(x) \leq f(x) - 1$, absurd. Demonstraţia este completă. ∎

Teorema precedentă şi Teorema 2.1.3 justifică considerarea în cele ce urmează, în general, a funcţiilor convexe şi proprii.

Varianta pentru funcţii convexe a Teoremei 1.1.16 este

Teorema 2.2.4 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă.*

(i) *$\bar{f}$ este convexă;*

(ii) *dacă $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este convexă, i.s.c. şi $g \leq f$ atunci $g \leq \bar{f}$;*

(iii) *$\bar{f}$ nu ia valoarea $-\infty$ dacă şi numai dacă f este minorată de o funcţională afină continuă;*

(iv) *dacă există $x_0 \in X$ astfel ca $\bar{f}(x_0) = -\infty$ (sau $f(x_0) = -\infty$) atunci $\bar{f}(x) = -\infty$ pentru orice $x \in \mathrm{dom}\, \bar{f} \supset \mathrm{dom}\, f$.*

Demonstraţie. (i) Cum $\mathrm{epi}\, \bar{f} = \overline{\mathrm{epi}\, f}$ şi $\mathrm{epi}\, f$ este convexă, avem că $\mathrm{epi}\, \bar{f}$ este convexă, şi deci $\bar{f}$ este convexă.

(ii) Din $g \leq f$ obţinem că $\mathrm{epi}\, f \subset \mathrm{epi}\, g$. Concluzia rezultă din relaţiile

$$\mathrm{epi}\, \bar{f} = \overline{\mathrm{epi}\, f} \subset \overline{\mathrm{epi}\, g} = \mathrm{epi}\, g.$$

(iii) Presupunem că $\bar{f}$ nu ia valoarea $-\infty$. Dacă $\bar{f}(x) = \infty$ pentru orice $x \in X$ atunci $f(x) \geq \langle x, 0\rangle + 0$ pentru orice x. Fie acum $\operatorname{dom} \bar{f} \neq \emptyset$ şi $\bar{x} \in \operatorname{dom} \bar{f}$. Atunci $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \operatorname{epi} \bar{f}$, unde $\bar{t} := \bar{f}(\bar{x}) - 1$. Cum $\operatorname{epi} \bar{f}$ este mulţime convexă, închisă şi nevidă, aplicând Teorema 1.5.2, există $(x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ astfel ca

$$\langle x, x^*\rangle + \alpha t < \langle \bar{x}, x^*\rangle + \alpha \bar{t} \quad \forall\, (x, t) \in \operatorname{epi} \bar{f}.$$

Luând $x = \bar{x}$ şi $t = \bar{f}(\bar{x}) + n,\ n \in \mathbb{N}$, obţinem că $\alpha < 0$. Împărţind eventual prin $-\alpha > 0$, putem presupune că $\alpha = -1$. Obţinem astfel că

$$f(x) \geq \bar{f}(x) \geq \langle x, x^*\rangle + \gamma \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} \bar{f} \supset \operatorname{dom} f,$$

unde $\gamma := \bar{t} - \langle \bar{x}, x^*\rangle$. Prin urmare f este minorată de o funcţională afină continuă.

Invers, dacă $f(x) \geq \langle x, x^*\rangle + \gamma =: g(x)$, unde $x^* \in X^*,\ \gamma \in \mathbb{R}$, atunci g este convexă şi i.s.c., iar din (ii) avem că $\bar{f} \geq g$. Prin urmare $\bar{f}$ nu ia valoarea $-\infty$.

(iv) Dacă $\bar{f}(x_0) = -\infty$, din teorema precedentă, $\bar{f}(x) = -\infty$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} \bar{f}$. Este evident că $\operatorname{dom} \bar{f} \supset \operatorname{dom} f$. ∎

Unei funcţii arbitrare $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ îi asociem în mod natural acea funcţie convexă şi inferior semicontinuă, notată $\overline{\operatorname{conv}}\, f$, a cărei epigraf este mulţimea $\overline{\operatorname{conv}}\,(\operatorname{epi} f)$; este evident că $\overline{\operatorname{conv}}\, f \leq \bar{f} \leq f$. Funcţia $\overline{\operatorname{conv}}\, f$ se numeşte *înfăşurătoarea convexă i.s.c.* a funcţiei f.

Referitor la semicontinuitatea superioară a funcţiilor convexe, observăm că dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este s.s.c. în $x_0 \in \operatorname{dom} f$ atunci f este majorată (de o constantă reală) pe o vecinătate a lui x_0; prin urmare $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$. În continuare vom arăta că pentru funcţii convexe este adevărată şi reciproca acestui rezultat. De fapt vom arăta mult mai mult.

Teorema 2.2.5 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă. Presupunem că $f(x_0) \in \mathbb{R}$ şi*

$$\exists\, \rho > 0,\ \exists\, M \geq 0,\ \forall\, x \in D(x_0, \rho)\ :\ f(x) \leq f(x_0) + M.$$

Atunci f este proprie şi

$$\forall\, \rho' \in]0, \rho[,\ \forall\, x, y \in D(x_0, \rho')\ :\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{M}{\rho} \cdot \frac{\rho + \rho'}{\rho - \rho'} \cdot \|x - y\|.$$

În particular f este continuă pe $B(x_0, \rho)$.

Demonstraţie. Faptul că f este proprie rezultă din Teorema 2.1.3, deoarece $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$ şi $f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x_0 = 0$ şi $f(0) = 0$ (altfel considerăm funcţia g definită prin $g(x) := f(x_0 + x) - f(x_0)$). Fie $\rho' \in]0, \rho[$ şi $x,\, y \in D(0, \rho')$, $x \neq y$. Există $z \in X$, $\|z\| = \rho$, şi $\lambda \in]0, 1[$ astfel ca $y = (1-\lambda)x + \lambda z$. Într-adevăr, luând $\varphi(t) := ty + (1-t)x$, aplicaţia $t \mapsto \|\varphi(t)\|$ este continuă pe $[1, \infty[$, $\|\varphi(1)\| = \|y\| < \rho$ şi $\|\varphi(t)\| \geq t\|y - x\| - \|x\| \to \infty$ pentru $t \to \infty$. Deci există $\bar{t} \in]1, \infty[$ astfel ca $\|\varphi(\bar{t})\| = \rho$. Luând $z := \varphi(\bar{t})$ şi $\lambda = 1/\bar{t}$, are loc afirmaţia făcută. În plus $\lambda = \|y-x\|/\|z-x\|$. Din inegalitatea $f(y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$ obţinem

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\|y - x\|}{\|z - x\|}(f(z) - f(x)).$$

Din

$$0 = f(0) = f\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(-x)\right) \leq \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(-x),$$

obţinem că $-f(x) \leq f(-x)$. Însă $u := \frac{\rho}{\|x\|}(-x) \in D(0, \rho)$ şi deci

$$f(-x) = f\left(\frac{\|x\|}{\rho}u\right) \leq \frac{\|x\|}{\rho}f(u) \leq M\frac{\|x\|}{\rho},$$

evident adevărată şi pentru $x = 0$. Deci

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\|y - x\|}{\|z - x\|}\left(M + M\frac{\|x\|}{\rho}\right) \leq \frac{M}{\rho} \cdot \frac{\rho + \rho'}{\rho - \rho'} \cdot \|x - y\|,$$

deoarece $\|z - x\| \geq \rho - \rho'$ şi $\rho + \|x\| \leq \rho + \rho'$. Schimbând x cu y obţinem o inegalitate care împreună cu aceasta ne dă concluzia din enunţ. ∎

Să observăm că rezultatul din teorema precedentă se poate formula şi în spaţii local convexe. Anume, dacă V este o vecinătate convexă, închisă şi simetrică a originii astfel ca $f(x) \leq f(x_0) + M$ pentru orice $x \in x_0 + V$ atunci (exerciţiu !)

$$\forall\, \rho \in]0, 1[,\ \forall\, x,\, y \in x_0 + \rho V\ :\ |f(y) - f(x)| \leq M\frac{1+\rho}{1-\rho} \cdot p_V(y - x).$$

Concluzia teoremei precedente arată că f este lipschitziană pe o vecinătate a lui x_0. Spunem că funcţia proprie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este *local lipschitziană* pe o mulţime $A \subset \operatorname{dom} f$ dacă pentru orice $x \in A$ există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel că $V \subset \operatorname{dom} f$ şi f este lipschitziană pe V.

Teorema 2.2.6 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă şi proprie. Dacă f este mărginită superior pe o vecinătate a unui punct din* $\operatorname{dom} f$ *atunci f este local lipschitziană pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ $(\neq \emptyset)$ *şi deci continuă pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

Demonstraţie. Presupunem că există $M \in \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ şi $V \in \mathcal{V}(0)$ astfel ca

$$\forall x \in x_0 + V \ : \ f(x) \leq M.$$

Este evident că $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Fie $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$; există atunci $y \in \operatorname{dom} f$ şi $\lambda \in]0,1[$ astfel ca $\bar{x} = \lambda x_0 + (1-\lambda)y$. Fie $x \in \bar{x} + \lambda V$; există $v \in V$ astfel ca $x = \bar{x} + \lambda v = \lambda(x_0 + v) + (1-\lambda)y$. Prin urmare

$$f(x) \leq \lambda f(x_0 + v) + (1-\lambda) f(y) \leq M' := \lambda M + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x \in \bar{x} + U,$$

unde $U := \lambda V \in \mathcal{V}(0)$. Aplicând teorema precedentă, obţinem că f este lipschitziană pe o vecinătate a lui $\bar{x}$, şi deci f este continuă în $\bar{x}$. Deoarece $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ este arbitrar, concluzia teoremei are loc. ∎

Reamintim că în Teorema 2.1.4 am arătat că o funcţie convexă şi proprie $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ este local lipschitziană pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$; este interesant de observat că dacă, în plus, f este i.s.c. atunci $f|_{\operatorname{dom} f}$ este continuă (exerciţiu !).

Două consecinţe imediate ale teoremei precedente şi Teoremei 2.1.3 sunt următoarele rezultate.

Consecinţa 2.2.3 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă. Dacă f este superior semicontinuă în $x_0 \in \operatorname{dom} f$ atunci $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$ şi fie f este egală cu $-\infty$ pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, fie f este proprie şi local lipschitziană pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.* ∎

Consecinţa 2.2.4 *Fie $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $1 \leq i \leq n$, funcţii convexe şi proprii, iar $f := f_1 \square \cdots \square f_n$, $g := f_1 \nabla \cdots \nabla f_n$. Dacă f_1 este continuă într-un punct din $\operatorname{dom} f_1$ atunci $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} g) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f_1) + \operatorname{dom} f_2 + \cdots + \operatorname{dom} f_n$, şi fie f $[g]$ este egală cu $-\infty$ pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ $[\operatorname{int}(\operatorname{dom} g)]$, fie f $[g]$ este proprie şi continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.* ∎

Amintim că s-au definit $f_1 \square \cdots \square f_n$ şi $f_1 \nabla \cdots \nabla f_n$ în Teorema 2.1.2.

Dacă X este spaţiu Banach chiar şi semicontinuitatea inferioară asigură continuitatea unei funcţii convexe pe interiorul domeniului său.

Teorema 2.2.7 *Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi inferior semicontinuă. Atunci $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$ şi f este continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.*

Demonstraţie. Dacă $\operatorname{aint}(\operatorname{dom} f) = \emptyset$ nu avem nimic de dovedit. Fie deci $\operatorname{aint}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$. Considerăm relaţia $\mathcal{R} := \{(t,x) \mid (x,t) \in \operatorname{epi} f\}$. Este evident că în condiţiile noastre $\mathcal{R}$ este convexă şi închisă. Fie $(t_0, x_0) \in \mathcal{R}$ astfel ca $x_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{Im} \mathcal{R}) = \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$. Din Teorema Robinson-Ursescu (Teorema 1.8.8) avem că $V := \mathcal{R}(]-\infty, t_0 + 1[) \in \mathcal{V}(x_0)$. Atunci pentru $x \in V$

există $t < t_0+1$ astfel ca $(t,x) \in \mathcal{R}$, adică $f(x) \le t$. Prin urmare $f(x) \le t_0+1$ pentru orice $x \in V$. Concluzia rezultă din Teorema 2.2.6. ∎

O aplicaţie interesantă a rezultatului precedent este

Teorema 2.2.8 (Principiul uniformei mărginiri). *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu normat şi $\{T_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ $(I \neq \emptyset)$. Presupunem că pentru orice $x \in X$ mulţimea $\{T_i x \mid i \in I\}$ este mărginită. Atunci $\{T_i \mid i \in I\}$ este mărginită în $\mathcal{L}(X,Y)$ $(\Leftrightarrow\ \exists M > 0,\ \forall\, x \in X,\ \forall\, i \in I\ :\ \|T_i x\| \le M \cdot \|x\|)$.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $i \in I$ considerăm funcţia $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definită prin $f_i(x) := \|T_i x\|$. Este evident că f_i este convexă, finită şi continuă. Prin urmare $f := \sup_{i\in I} f_i$ este convexă, proprie şi i.s.c.; din ipoteză avem că $\operatorname{dom} f = X$. Din teorema precedentă avem că f este continuă pe X, şi deci este continuă în 0. Prin urmare există $\rho > 0$ astfel ca $f(x) \le f(0) + 1 = 1$ pentru orice $x \in \rho U_X$, ceea ce implică faptul că $\|T_i\| \le 1/\rho$ pentru orice $i \in I$. ∎

Punem în evidenţă două consecinţe utile ale teoremei precedente.

Consecinţa 2.2.5 *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu normat şi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathcal{L}(X,Y)$. Presupunem că pentru orice $x \in X$ şirul $(T_n x) \subset Y$ este convergent. Atunci $(\|T_n\|)$ este şir mărginit şi există $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ astfel ca $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ pentru orice $x \in X$, iar $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

Demonstraţie. Fie $T : X \to Y$, $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Se verifică cu uşurinţă că T este liniar. Deoarece $(T_n x)$ este convergent, $(T_n x)$ este mărginit pentru fiecare $x \in X$. Din teorema precedentă obţinem că $(\|T_n\|)$ este mărginit în $\mathbb{R}$. Fie $M > \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$; rezultă că mulţimea $P := \{n \in \mathbb{N} \mid \|T_n\| < M\}$ este infinită. Cum $\|T_n x\| \le M\|x\|$ pentru toţi $n \in P$ şi $x \in X$, prin trecere la limită obţinem că $\|Tx\| \le M\|x\|$ pentru orice $x \in X$. Prin urmare T este continuu şi $\|T\| \le M$. Cum $M > \liminf \|T_n\|$ a fost arbitrar, rezultă că $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$. ∎

Consecinţa 2.2.6 *Fie X spaţiu normat şi $\emptyset \neq A \subset X$. Dacă mulţimea $\{\langle x, x^*\rangle \mid x \in A\}$ este mărginită pentru orice $x^* \in X^*$, adică A este w-*mărginită*, atunci A este mărginită (în normă).*

Presupunem în plus că X este spaţiu Banach şi $\emptyset \neq A^* \subset X^*$. Dacă mulţimea $\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in A^*\}$ este mărginită pentru orice $x \in X$, adică A^* este w^*-mărginită, *atunci A^* este mărginită (în normă).*

Demonstraţie. Partea a doua este consecinţă imediată a Teoremei 2.2.8, luând $Y = \mathbb{R}$.

Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile din prima parte. Pentru fiecare $x \in A$ considerăm operatorul $T_x : X^* \to \mathbb{R}$, $T_x x^* := \langle x, x^*\rangle$. Din Teorema

1.8.2 avem că $\|T_x\| = \|x\|$. Prin urmare $\{T_x \mid x \in A\} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ şi $\{T_x x^* \mid x \in A\}$ este mulţime mărginită pentru orice $x^* \in X^*$. Cum X^* este spaţiu Banach, din Teorema 2.2.8 rezultă că există $M > 0$ astfel ca $\|x\| = \|T_x\| \leq M$ pentru orice $x \in A$. ∎

Din Consecinţele 2.2.5 şi 2.2.6 rezultă că dacă şirul $(x_n) \subset X$ *w-converge* la $x \in X$, adică $\langle x, x^*\rangle = \lim\langle x_n, x^*\rangle$ pentru orice $x^* \in X^*$, atunci (x_n) este mărginit (în normă) şi $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$, iar dacă X este spaţiu Banach, dacă şirul $(x_n^*) \subset X^*$ w^**-converge* la $x^* \in X^*$, adică $\langle x, x^*\rangle = \lim\langle x, x_n^*\rangle$ pentru orice $x \in X$, atunci (x_n^*) este mărginit (în normă) şi $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$.

Faptul că şirul $(x_n) \subset X$ w-converge la $x \in X$ îl notăm prin $x_n \xrightarrow{w} x$ sau $x = w\text{-}\lim x_n$, iar faptul că şirul $(x_n^*) \subset X^*$ w^*-converge la $x^* \in X^*$ îl notăm prin $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ sau $x^* = w^*\text{-}\lim x_n^*$.

În cazul funcţiilor convexe definite pe spaţii finit dimensionale continuitatea se obţine în condiţii mai slabe.

Teorema 2.2.9 *Fie X un spaţiu normat finit dimensional şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie cu* $\operatorname{aint}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$. *Atunci f este continuă pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, \ldots, e_k\}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ o bază a lui X. Deoarece toate normele pe X sunt echivalente (a se vedea Consecinţa 1.4.3), este suficient să considerăm norma $\|\ \|_1 : X \to \mathbb{R}$, $\|x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_k|$.

Fie $x_0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$. Putem presupune că $x_0 = 0$ şi $f(0) = 0$. Deoarece $0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$, există $\delta > 0$ astfel ca $\pm\delta e_i \in \operatorname{dom} f$ pentru orice i, $1 \leq i \leq n$. Considerăm

$$M := \max\{f(\delta e_1),\ f(-\delta e_1), \ldots, f(\delta e_n),\ f(-\delta e_n)\} \in \mathbb{R}.$$

Fie $x \in \delta U$; atunci

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \frac{|x_1|}{\delta}(\pm\delta e_1) + \cdots + \frac{|x_n|}{\delta}(\pm\delta e_n),$$

cu $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq \delta$ (semnul + este luat dacă şi numai dacă $x_i \geq 0$). Cum f este convexă,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{|x_1|}{\delta} f(\pm\delta e_1) + \cdots + \frac{|x_n|}{\delta} f(\pm\delta e_n) + \left(1 - \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{\delta}\right) f(0) \\ &\leq M \quad \forall\, x \in \delta U. \end{aligned}$$

Utilizând Teorema 2.2.6 obţinem concluzia. ∎

2.3 Funcţii conjugate

Şi în acest paragraf X, Y sunt spaţii normate, deşi toate rezultatele sunt valabile în spaţii local convexe separate.

Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$; se numeşte *conjugata* lui f funcţia

$$f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f^*(x^*) := \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x) \mid x \in X\}. \tag{2.16}$$

Să observăm că dacă există $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) = -\infty$ atunci $f^*(x^*) = \infty$ pentru orice $x^* \in X^*$, iar dacă $f(x) = \infty$ pentru orice x atunci $f^*(x^*) = -\infty$ pentru orice $x^* \in X^*$. În cazul în care f este proprie (dar şi în celelalte cazuri, utilizând convenţia $\inf \emptyset = \infty$) avem că

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\}. \tag{2.17}$$

Conjugata funcţiei $h : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ se defineşte în mod asemănător:

$$h^* : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h^*(x) := \sup\{\langle x, x^*\rangle - h(x^*) \mid x^* \in X^*\}.$$

Observaţia de mai sus cu privire la f^* este valabilă şi pentru h^*.

În teorema următoare punem în evidenţă câteva proprietăţi simple ale funcţiilor conjugate.

Teorema 2.3.1 *Fie $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $k : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) *f^* este convexă şi w^*-i.s.c., iar h^* este convexă şi (w-)i.s.c.;*

(ii) *are loc* inegalitatea lui Young-Fenchel*:*

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^*\rangle \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, x^* \in X^*;$$

(iii) *$f \leq g \ \Rightarrow\ g^* \leq f^*$;*

(iv) *$f^* = \bar{f}^* = (\overline{\operatorname{conv}}\, f)^*$ şi $f^{**} := (f^*)^* \leq \overline{\operatorname{conv}}\, f \leq \bar{f} \leq f$;*

(v) *dacă $\alpha > 0$ atunci $(\alpha f)^*(x^*) = \alpha f^*(\alpha^{-1}x^*)$ pentru orice $x^* \in X^*$;*

(vi) *dacă $\bar{x}^* \in X^*$ atunci $(f + \bar{x}^*)^*(x^*) = f^*(x^* - \bar{x}^*)$;*

(vii) *dacă f, h sunt proprii, iar $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, y) := f(x) + h(y)$, atunci $F^*(x^*, y^*) = f^*(x^*) + h^*(y^*)$ pentru orice $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$;*

(viii) *$(Af)^* = f^* \circ A^*$, $(f \Box g)^* = f^* + g^*$.*

Demonstraţie. (i) Dacă f nu-i proprie am constatat mai sus că f^* este constantă şi deci f^* este convexă şi w^*–continuă. Dacă f este proprie, avem că $f^* = \sup_{x\in \operatorname{dom} f} \varphi_x$, unde $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$, $\varphi_x(x^*) := \langle x, x^*\rangle - f(x)$. Este evident că pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$, φ_x este afină (deci convexă) şi w^*–continuă (deci w^*–i.s.c.). Prin urmare f^* este convexă şi w^*–i.s.c. Afirmaţia pentru h^* se obţine asemănător.

(ii) Din (2.16) avem că

$$f^*(x^*) \geq \langle x, x^*\rangle - f(x) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, x^* \in X^*,$$

de unde se obţine imediat inegalitatea lui Young-Fenchel.

(iii) este consecinţă imediată a definiţiei şi a relaţiei $f \leq g$.

(iv) Am observat deja că $\overline{\operatorname{conv}}\, f \leq \bar f \leq f$, şi deci, utilizând (iii), avem că $f^* \leq \bar f^* \leq (\overline{\operatorname{conv}}\, f)^*$. Fie $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $f^*(x^*) \leq \alpha$. Atunci $\langle x, x^*\rangle - f(x) \leq \alpha$ pentru orice $x \in X$, de unde $\varphi(x) := \langle x, x^*\rangle - \alpha \leq f(x)$ pentru orice x. Cum φ este convexă şi i.s.c., iar $\operatorname{epi}\varphi \supset \operatorname{epi} f$, avem că $\operatorname{epi}\varphi \supset \operatorname{epi}(\overline{\operatorname{conv}}\, f) = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{epi} f)$. Prin urmare $\varphi(x) \leq \overline{\operatorname{conv}}\, f(x)$ pentru orice $x \in X$. În acest mod avem că $\langle x, x^*\rangle - \overline{\operatorname{conv}}\, f(x) \leq \alpha$ pentru orice x, şi deci $(\overline{\operatorname{conv}}\, f)^*(x^*) \leq \alpha$. Am obţinut astfel că $f^* = \bar f^* = (\overline{\operatorname{conv}}\, f)^*$.

(v), (vi) şi (vii) sunt imediate.

(viii) Avem că

$$\begin{aligned}
(Af)^*(y^*) &= \sup_{y\in Y}(\langle y, y^*\rangle - (Af)(y)\,) = \sup_{y\in Y}\Big(\langle y, y^*\rangle - \inf_{Ax=y} f(x)\Big)\\
&= \sup\{\langle y, y^*\rangle - f(x) \mid (x,y) \in X \times Y,\ Ax = y\}\\
&= \sup\{\langle Ax, y^*\rangle - f(x) \mid x \in X\}\\
&= \sup\{\langle x, A^*y^*\rangle - f(x) \mid x \in X\}\\
&= f^*(A^*y^*) = (f^* \circ A^*)(y^*).
\end{aligned}$$

În mod asemănător se obţine relaţia corespunzătoare pentru $(f \Box g)^*$. ∎

Următorul rezultat este foarte important în teoria dualităţii.

Teorema 2.3.2 (a biconjugatei). *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi inferior semicontinuă. Atunci $f^{**} = f$.*

Demonstraţie. Am văzut în teorema precedentă că $f^{**} \leq f$. Fie deci f convexă, i.s.c. şi proprie. Fie $\bar x \in X$ fixat şi $\bar t \in \mathbb{R}$ astfel ca $\bar t < f(\bar x)$; prin urmare $(\bar x, \bar t) \notin \operatorname{epi} f$. Utilizând o teoremă de separare, există $(\bar x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\langle x, \bar x^*\rangle + t\alpha < \lambda < \langle \bar x, \bar x^*\rangle + \bar t\alpha \quad \forall\,(x,t) \in \operatorname{epi} f. \tag{2.18}$$

Luând $(x,t) = (\tilde{x}, f(\tilde{x}) + n),\ n \in I\!N$, unde $\tilde{x} \in \operatorname{dom} f$, obţinem

$$\langle \tilde{x}, \bar{x}^* \rangle + \alpha f(\tilde{x}) + n\alpha < \lambda < \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle + \bar{t}\alpha \quad \forall n \in I\!N.$$

Făcând $n \to \infty$, obţinem $\alpha \leq 0$. Considerăm pentru început că $\alpha < 0$. Împărţind eventual prin $-\alpha > 0$, în (2.18) putem presupune că $\alpha = -1$. Avem astfel că

$$\langle x, \bar{x}^* \rangle - f(x) < \lambda \quad \forall x \in \operatorname{dom} f,$$

şi deci

$$f^*(\bar{x}^*) \leq \lambda < \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - \bar{t},$$

de unde

$$\bar{t} < \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*) \leq f^{**}(\bar{x}).$$

Fie acum $\alpha = 0$; din relaţia (2.18) obţinem existenţa unui $c > 0$ astfel ca

$$\langle x, \bar{x}^* \rangle + c \leq \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Utilizând Teorema 2.2.4, există $x_0^* \in X^*$ şi $\alpha \in I\!R$ astfel ca

$$f(x) \geq \langle x, x_0^* \rangle + \alpha \quad \forall x \in X.$$

Din ultimele două relaţii, obţinem succesiv:

$$f(x) \geq \langle x, x_0^* \rangle + \alpha \geq \langle x, x_0^* \rangle + \alpha + t\langle x, \bar{x}^* \rangle + tc - t\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle \ \ \forall x \in \operatorname{dom} f,\ \forall t > 0,$$

$$-tc + t\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - \alpha \geq \langle x, x_0^* + t\bar{x}^* \rangle - f(x) \quad \forall x \in X,\ \forall t > 0,$$

$$-tc + t\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - \alpha \geq f^*(x_0^* + t\bar{x}^*) \quad \forall t > 0,$$

$$f^{**}(\bar{x}) \geq \langle \bar{x}, x_0^* + t\bar{x}^* \rangle - f^*(x_0^* + t\bar{x}^*) \geq \alpha + tc + \langle \bar{x}, x_0^* \rangle \ \ \forall t > 0.$$

Prin urmare există $t > 0$ astfel ca $\alpha + tc + \langle \bar{x}, x_0^* \rangle > \bar{t}$, şi deci $f^{**}(\bar{x}) > \bar{t}$ şi în acest caz. Prin urmare $f(\bar{x}) \leq f^{**}(\bar{x})$. Deci $f^{**} = f$. ▮

Pentru funcţii arbitrare are loc următorul rezultat.

Teorema 2.3.3 *Fie* $f : X \to \overline{I\!R}$ *cu* $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

(i) *Dacă* $\overline{\operatorname{conv}}\, f$ *este proprie atunci* $f^{**} = \overline{\operatorname{conv}}\, f$*; dacă* $\overline{\operatorname{conv}}\, f$ *nu-i proprie atunci* $f^{**} = -\infty$.

(ii) *Presupunem că* f *este convexă. Dacă* f *este i.s.c. în* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ *atunci* $f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x})$*; în plus, dacă* $f(\bar{x}) \in I\!R$ *atunci* $f^{**} = \bar{f}$ *şi* $\bar{f}$ *este proprie.*

Demonstraţie. (i) Funcţia $\overline{\operatorname{conv}} f$ este convexă şi i.s.c. Dacă $\overline{\operatorname{conv}} f$ este proprie, din teorema precedentă şi Teorema 2.3.1 (iv) avem că

$$\overline{\operatorname{conv}} f = (\overline{\operatorname{conv}} f)^{**} = (f^*)^* = f^{**}.$$

Dacă $\overline{\operatorname{conv}} f$ este improprie, cum $\operatorname{dom}(\overline{\operatorname{conv}} f) \supset \operatorname{dom} f \neq \emptyset$, $\overline{\operatorname{conv}} f$ ia valoarea $-\infty$, şi deci $f^* = (\overline{\operatorname{conv}} f)^* = \infty$, de unde avem că $f^{**} = -\infty$.

(ii) Deoarece f este convexă, $\overline{\operatorname{conv}} f = \bar{f}$. Cum f este i.s.c. în $\bar{x}$, avem că $\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Avem două situaţii: a) $f(\bar{x}) = -\infty$ şi b) $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Este evident că în cazul a) avem că $f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Fie deci $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$; prin urmare $\bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, şi deci $\bar{f}$ este proprie. Din prima parte avem că $f^{**} = \bar{f}$, de unde obţinem că $f^{**}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. ▮

Consecinţa 2.3.1 *Fie $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ două funcţii convexe şi proprii. Dacă $\overline{f \square g}$ este proprie, $(f^*+g^*)^* = \overline{f \square g} = \bar{f} \square \bar{g}$, iar în caz contrar $(f^*+g^*)^* = -\infty$. În plus, dacă f este continuă într-un punct din domeniul său atunci*

$$(f \square g)(x) = (f^* + g^*)^*(x) \quad \forall\, x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f \square g)) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f) + \operatorname{dom} g.$$

Demonstraţie. Din Teorema 2.3.1 avem că

$$(f \square g)^* = f^* + g^* = \bar{f}^* + \bar{g}^* = (\bar{f} \square \bar{g})^*,$$

iar cum $\bar{f} \square \bar{g}$ este convexă, concluzia primei părţi rezultă din Teorema 2.3.3.

Dacă f este continuă în $x_0 \in \operatorname{dom} f$, atunci f este majorată pe o vecinătate a lui x_0. Luând $y_0 \in \operatorname{dom} g$, $f \square g$ este majorată pe o vecinătate a lui $x_0 + y_0$. Aplicând Consecinţa 2.2.4, $f \square g$ este continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom}(f \square g))$, şi deci este i.s.c. pe această mulţime. Concluzia rezultă acum din partea a doua a teoremei precedente. ▮

Fie $C \subset X$ o mulţime nevidă. Observăm că

$$(I_C)^*(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle = \sup_{x \in \overline{\operatorname{conv}} C} \langle x, x^* \rangle = (I_{\overline{\operatorname{conv}} C})^*(x^*),$$

adică $(I_C)^*$ este *funcţionala suport* a mulţimii C. În plus $I_{\overline{\operatorname{conv}} C} = \overline{\operatorname{conv}}\, I_C$ şi

$$\operatorname{dom}(I_C)^* = \{x^* \in X^* \mid x^* \text{ este mărginită superior pe } C\}.$$

În secţiunea următoare vom vedea că I_C este utilă pentru determinarea conului normal la C într-un punct.

2.4 Subdiferenţiala unei funcţii convexe

Am observat în Secţiunea 2.1 că dacă funcţia proprie $f : (X, \| \ \|) \to \overline{\mathbb{R}}$ este G-diferenţiabilă în $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ atunci

$$\langle x - \bar{x}, \nabla f(\bar{x})\rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f \ (\ \forall\, x \in X).$$

Având în vedere acest fapt, este firesc să considerăm acele elemente $x^* \in X^*$ care satisfac inegalitatea

$$\langle x - \bar{x}, x^*\rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in X, \tag{2.19}$$

chiar şi în cazul în care f nu-i G-diferenţiabilă în $\bar{x}$.

Şi în această secţiune presupunem că X este un spaţiu normat, deşi toate rezultatele, cu excepţia acelora care fac apel în mod explicit la normă, sunt valabile în spaţii local convexe separate.

Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $\bar{x} \in X$ astfel ca $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Elementul $x^* \in X^*$ se numeşte *subgradient* al funcţiei f în $\bar{x}$ dacă este satisfăcută relaţia (2.19); mulţimea tuturor subgradienţilor funcţiei f în $\bar{x}$ se notează prin $\partial f(\bar{x})$ şi se numeşte *subdiferenţiala* funcţiei f în $\bar{x}$. Considerăm că $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$ dacă $f(\bar{x}) \notin \mathbb{R}$; desigur, putem avea $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$ chiar dacă $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Obţinem astfel aplicaţia multivocă $\partial f : X \rightsquigarrow X^*$. Din cele de mai sus avem că $\operatorname{dom} \partial f \subset \operatorname{dom} f$. Spunem că f este *subdiferenţiabilă* în $\bar{x} \in X$ dacă $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Observăm că dacă $x^* \in \partial f(\bar{x})$, atunci funcţia afină $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definită prin $\varphi(x) = \langle x, x^*\rangle - \langle \bar{x}, x^*\rangle + f(\bar{x})$, minorează f şi coincide cu f în $\bar{x}$; rezultă că

$$\langle x, x^*\rangle - t \leq \alpha := \langle \bar{x}, x^*\rangle - f(\bar{x}) \quad \forall\, (x,t) \in \operatorname{epi} f,$$

ceea ce arată că hiperplanul $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid \langle x, x^*\rangle - t \cdot 1 = \alpha\}$ este hiperplan nevertical (deoarece coeficientul lui t este $\neq 0$) de sprijin (deoarece lasă de o singură parte $\operatorname{epi} f$ şi îl intersectează).

Reamintim că în Teorema 2.1.4 am determinat deja subdiferenţiala funcţiei convexe şi proprii $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ în $t_0 \in \operatorname{dom} f$:

$$\partial f(t_0) \ = \ [\, f'_-(t_0), f'_+(t_0)\,] \cap \mathbb{R}.$$

În continuare punem în evidenţă proprietăţi şi metode de calcul pentru subdiferenţiale şi în cazul în care $X \neq \mathbb{R}$.

Un prim rezultat, destul de uşor de obţinut, este următorul.

Teorema 2.4.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $\bar{x} \in X$ cu $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$.*

(i) *$\partial f(\bar{x}) \subset X^*$ este o mulţime convexă şi w^*–închisă (eventual vidă).*

(ii) *Dacă* $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$ *atunci*

$$(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad \text{şi} \quad \partial(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) = \partial \bar{f}(\bar{x}) = \partial f(\bar{x});$$

în particular f *este proprie şi i.s.c. în* $\bar{x}$.

(iii) *Dacă* f *este proprie,* $\mathrm{dom}\, f$ *este mulţime convexă şi* f *este subdiferenţiabilă în orice* $x \in \mathrm{dom}\, f$ *atunci* f *este convexă.*

Demonstraţie. (i) Fie x_1^*, $x_2^* \in \partial f(\bar{x})$ şi $\lambda \in]0,1[$. Atunci

$$\langle x - \bar{x}, x_1^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}), \quad \langle x - \bar{x}, x_2^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \ \ \forall\, x \in X.$$

Înmulţind prima relaţie cu $\lambda > 0$ şi a doua cu $1 - \lambda > 0$ obţinem

$$\langle x - \bar{x}, \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in X,$$

adică $\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in \partial f(\bar{x})$.

Fie $\bar{x}^* \in X^* \setminus \partial f(\bar{x})$. Există $x_0 \in X$ astfel ca $\langle x_0 - \bar{x}, \bar{x}^* \rangle > f(x_0) - f(\bar{x})$. Fie $\alpha \in I\!R$ astfel ca $\langle x_0 - \bar{x}, \bar{x}^* \rangle > \alpha > f(x_0) - f(\bar{x})$. Atunci $V := \{x^* \mid \langle x_0 - \bar{x}, x^* \rangle > \alpha\}$ este o vecinătate pentru $\bar{x}^*$ faţă de topologia $w^* = \sigma(X^*, X)$. Este evident că $V \cap \partial f(\bar{x}) = \emptyset$. Rezultă că $\partial f(\bar{x})$ este w^*–închisă.

(ii) Ştim că $\overline{\mathrm{conv}}\, f \leq \bar{f} \leq f$. Fie $\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$ şi

$$\varphi : X \to I\!R, \quad \varphi(x) := \langle x - \bar{x}, \bar{x}^* \rangle + f(\bar{x}).$$

Atunci φ este convexă şi continuă, iar $\varphi \leq f$. Deci $\varphi \leq \overline{\mathrm{conv}}\, f \leq \bar{f} \leq f$. Deoarece $\varphi(\bar{x}) = f(\bar{x})$, avem că $(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Aceste relaţii arată că funcţiile f, $\bar{f}$, $\overline{\mathrm{conv}}\, f$ sunt proprii şi f este i.s.c. în $\bar{x}$. Din inegalitatea de mai înainte obţinem, în mod evident, că $\partial(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) \supset \partial \bar{f}(\bar{x}) \supset \partial f(\bar{x})$. Dacă $x^* \in \partial(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x})$ atunci

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq (\overline{\mathrm{conv}}\, f)(x) - (\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \ \ \forall\, x \in X,$$

şi deci $\partial(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$. Prin urmare $\partial(\overline{\mathrm{conv}}\, f)(\bar{x}) = \partial \bar{f}(\bar{x}) = \partial f(\bar{x})$.

(iii) Din (ii) avem că $f(x) = \overline{\mathrm{conv}}\, f(x)$ pentru orice $x \in \mathrm{dom}\, f$. Cum $\overline{\mathrm{conv}}\, f$ este funcţie convexă, iar $\mathrm{dom}\, f$ este mulţime convexă, este evident că f este convexă. ∎

Proprietatea (ii) din Teorema 2.4.1 justifică considerarea în continuare a funcţiilor convexe şi proprii când discutăm despre subdiferenţiale.

În mod asemănător se introduce noţiunea de subdiferenţială pentru o funcţie $h : X^* \to \overline{I\!R}$ într-un punct $\bar{x}^* \in X^*$ cu $h(\bar{x}^*) \in I\!R$:

$$\partial h(\bar{x}^*) := \{x \in X \mid \langle x, x^* - \bar{x}^* \rangle \leq h(x^*) - h(\bar{x}^*) \ \ \forall\, x^* \in X^*\}.$$

Are loc un rezultat similar celui prezentat în Teorema 2.4.1, şi anume $\partial h(\bar{x}^*)$ este mulţime convexă şi închisă (eventual vidă), iar dacă $\partial h(\bar{x}^*) \neq \emptyset$ atunci h este proprie şi w^*–i.s.c. în $\bar{x}^*$; sunt adevărate şi celelalte afirmaţii, însă aderenţa trebuie considerată pentru topologia slab-stelată.

În practică (de exemplu în rezolvarea numerică, pe calculator, a unor probleme) nu se pot calcula chiar subgradienţi, ci valori aproximative ale acestora. În acest sens, dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ cu $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon \in [0, \infty[$, elementul $x^* \in X^*$ se numeşte *ε–subgradient* al funcţiei f în $\bar{x}$ dacă

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \quad \forall\, x \in X; \tag{2.20}$$

mulţimea ε–subgradienţilor funcţiei f în $\bar{x}$ se notează prin $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ şi se numeşte *ε–subdiferenţiala* funcţiei f în $\bar{x}$. La fel ca mai sus, dacă $f(\bar{x}) \notin \mathbb{R}$, considerăm că $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \emptyset$; obţinem astfel aplicaţia multivocă $\partial_\varepsilon f : X \rightsquigarrow X^*$, cu $\operatorname{dom}(\partial_\varepsilon f) \subset \operatorname{dom} f$. Observăm că f este proprie dacă $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \neq \emptyset$ pentru un $\varepsilon \geq 0$, iar dacă $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < \infty$ atunci

$$\partial f(\bar{x}) = \partial_0 f(\bar{x}) \subset \partial_{\varepsilon_1} f(\bar{x}) \subset \partial_{\varepsilon_2} f(\bar{x}).$$

În plus

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \bigcap\nolimits_{\eta > \varepsilon} \partial_\eta f(\bar{x}) \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \infty[.$$

În mod asemănător se introduce ε-subdiferenţiala funcţiei $h : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ în $\bar{x}^* \in X^*$ cu $h(\bar{x}^*) \in \mathbb{R}$.

În teorema următoare colectăm câteva rezultate simple referitoare la subdiferenţiale şi ε–subdiferenţiale. Înainte de a formula această teoremă introducem o altă noţiune: spunem că aplicaţia multivocă $T : X \rightsquigarrow X^*$ este *monotonă* dacă

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X,\ \forall\, x^* \in T(x),\ \forall\, y^* \in T(y),$$

iar T este *strict monotonă* dacă

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0 \quad \forall\, x, y \in X,\ x \neq y,\ \forall\, x^* \in T(x),\ \forall\, y^* \in T(y);$$

T se numeşte *maximal monotonă* dacă T este monotonă, iar dacă $T' : X \rightsquigarrow X^*$ este monotonă şi $\operatorname{gr} T \subset \operatorname{gr} T'$ atunci $T = T'$, adică T este element maximal în clasa aplicaţiilor monotone, pe care relaţia de ordine este dată de incluziune. Desigur, în cazul în care $X = \mathbb{R}$ şi $T(x)$ are cel mult un element, faptul că T este (strict) monotonă revine la faptul că funcţia $T|_{\operatorname{dom} T}$ este (strict) crescătoare.

Teorema 2.4.2 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă şi proprie, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, iar $\varepsilon \in [0, \infty[$.*

(i) *$\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ este convexă şi w^*–închisă; în plus $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \partial f'_\varepsilon(\bar{x}; \cdot)(0)$;*

(ii) *$x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}) \;\Leftrightarrow\; f(\bar{x}) + f^*(x^*) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle + \varepsilon$;*

(iii) *$x^* \in \partial f(\bar{x}) \;\Leftrightarrow\; f(\bar{x}) + f^*(x^*) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle \;\Leftrightarrow\; f(\bar{x}) + f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle$;*

(iv) *$\operatorname{dom}(\partial_\varepsilon f) \subset \operatorname{dom} f$, $\operatorname{Im}(\partial_\varepsilon f) \subset \operatorname{dom} f^*$, şi ∂f este monotonă, iar dacă f este strict convexă atunci ∂f este strict monotonă;*

(v) *$\partial f(\bar{x}) \ne \emptyset \;\Leftrightarrow\; f(\bar{x}) = \max_{x^* \in X^*}(\langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*))$;*

(vi) *f este i.s.c. în $\bar{x}$ dacă şi numai dacă $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \ne \emptyset$ pentru orice $\varepsilon > 0$; $\partial_\varepsilon f^*(\bar{x}^*) \ne \emptyset$ dacă $f^*(\bar{x}^*) \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$;*

(vii) *presupunem că f este i.s.c. în $\bar{x}$. Atunci $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}) \;\Leftrightarrow\; \bar{x} \in \partial_\varepsilon f^*(x^*)$.*

(viii) *$\partial_\varepsilon(f + \bar{x}^*)(\bar{x}) = \bar{x}^* + \partial_\varepsilon f(\bar{x})$ pentru $\bar{x}^* \in X^*$, iar pentru $\lambda > 0$, $\partial_\varepsilon(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda \partial_{\varepsilon/\lambda} f(\bar{x})$ şi $\partial(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda \partial f(\bar{x})$;*

(ix) *presupunem că f este i.s.c, $0 \le \varepsilon_n \to \varepsilon$, $(x_n, x_n^*) \in \partial_{\varepsilon_n} f$, $x_n \to x$ şi $x_n^* \to x^*$. Atunci $(x, x^*) \in \partial_\varepsilon f$. În particular $\partial_\varepsilon f$ este închisă în $X \times X^*$.*

Demonstraţie. (i) Faptul că $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ este mulţime convexă şi w^*–închisă se demonstrează la fel ca prima parte a Teoremei 2.4.1, şi nu-i nevoie ca f să fie convexă. Dacă $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$ atunci luând în (2.20) $\bar{x} + tx$, $t > 0$, în loc de x, apoi împărţind la t obţinem că

$$\langle x, x^* \rangle \le \inf_{t>0} \frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x}) + \varepsilon}{t} = f'_\varepsilon(\bar{x}; x) \quad \forall\, x \in X.$$

Incluziunea inversă rezultă din inegalitatea $f'_\varepsilon(\bar{x}; x) \le f(\bar{x} + x) - f(\bar{x}) + \varepsilon$ pentru orice $x \in X$.

(ii) Avem

$$\begin{aligned} x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x - \bar{x}, x^* \rangle \le f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \;\; \forall\, x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x, x^* \rangle - f(x) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}) + \varepsilon \;\; \forall\, x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad f^*(x^*) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}) + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad f(\bar{x}) + f^*(x^*) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle + \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Cunoaştem deja că $\langle \bar{x}, x^* \rangle \le f(\bar{x}) + f^*(x^*)$ (inegalitatea lui Young-Fenchel !); echivalenţele respective rezultă acum din (ii) luând $\varepsilon = 0$.

(iv) Incluziunea $\operatorname{dom}(\partial_\varepsilon f) \subset \operatorname{dom} f$ este evidentă, iar din (ii) avem că $\operatorname{Im} \partial_\varepsilon f \subset \operatorname{dom} f^*$. Fie $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$ astfel ca $x \ne y$. Din (i) avem că

$$\langle y-x, x^*\rangle \le f'_+(x; y-x) \le f(y)-f(x),\ \langle x-y, y^*\rangle \le f'_+(y; x-y) \le f(x)-f(y),$$

având chiar că $f'_+(x; y-x) < f(y)-f(x)$ în cazul în care f este strict convexă. Sumând cele două relaţii de mai sus, obţinem că $\langle y-x, x^*-y^*\rangle \le 0$, inegalitatea fiind strictă dacă f este strict convexă. De aici obţinem imediat că ∂f este monotonă, chiar strict monotonă dacă f este strict convexă.

(v) Dacă există $\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$ atunci, ţinând seama de (iii) şi inegalitatea lui Young-Fenchel,

$$\langle \bar{x}, \bar{x}^*\rangle - f^*(\bar{x}^*) = f(\bar{x}) \ge \langle \bar{x}, x^*\rangle - f^*(x^*) \quad \forall x^* \in X^*,$$

şi deci implicaţia " $\Rightarrow$ " are loc. Implicaţia inversă este consecinţă imediată a echivalenţelor din (iii).

(vi) Presupunem că f este i.s.c. în $\bar{x}$ şi luăm $\varepsilon > 0$; din Teorema 2.3.3 avem că

$$f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x}) = \sup\{\langle \bar{x}, x^*\rangle - f^*(x^*) \mid x^* \in X^*\} > f(\bar{x}) - \varepsilon.$$

Deci există $x^* \in X^*$ astfel ca $\langle \bar{x}, x^*\rangle - f^*(x^*) > f(\bar{x}) - \varepsilon$, de unde $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$.

Reciproc, presupunem că $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \ne \emptyset$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x^* \in X^* \ :\ f(\bar{x}) - \varepsilon \le \langle \bar{x}, x^*\rangle - f^*(x^*) \le f^{**}(\bar{x}),$$

şi deci $f(\bar{x}) \le f^{**}(\bar{x})$. Cum $f^{**} \le \bar{f} \le f$, rezultă că $\bar{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, adică f este i.s.c. în $\bar{x}$.

Fie $\bar{x}^* \in X^*$ astfel ca $f^*(\bar{x}^*) \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$. Din definiţia lui f^*, există $\bar{x} \in X$ astfel ca $f^*(\bar{x}^*) < \langle \bar{x}, \bar{x}^*\rangle - f(\bar{x}) + \varepsilon$, şi deci

$$\langle \bar{x}, x^* - \bar{x}^*\rangle < \langle \bar{x}, x^*\rangle - f(\bar{x}) - f^*(\bar{x}^*) + \varepsilon \le f^*(x^*) - f^*(\bar{x}^*) + \varepsilon,$$

adică $\bar{x} \in \partial_\varepsilon f^*(\bar{x}^*)$.

(vii) Deoarece f este i.s.c. în $\bar{x}$, avem că $f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x})$; concluzia este imediată prin utilizarea punctului (ii).

(viii) Relaţiile indicate sunt consecinţe imediate ale definiţiilor.

(ix) Fie ε_n şi (x_n, x_n^*) satisfăcând condiţiile din enunţ. Atunci

$$f(x_n) + \langle x - x_n, x_n^*\rangle \le f(y) + \varepsilon_n \quad \forall y \in X,$$

de unde, trecând la limita inferioară, obţinem că $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$. Luând $\varepsilon_n = \varepsilon$ se obţine cealaltă afirmaţie. ∎

În general nu este adevărat că $\partial(\lambda f)(x) = \lambda\partial f(x)$ în cazul $\lambda = 0$; această formulă este adevărată şi în acest caz dacă $x \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f)$.

Dacă $A \subset X$ este o mulţime convexă şi nevidă, iar $a \in A$, atunci

$$\begin{aligned}\partial I_A(a) &= \{x^* \in X^* \mid \langle x - a, x^*\rangle \le 0 \ \ \forall\, x \in A\}\\ &= \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle \le \langle a, x^*\rangle \ \ \forall\, x \in A\}\\ &= \{x^* \mid \langle x, x^*\rangle \le 0 \ \ \forall\, x \in \operatorname{con}(A - a)\}\\ &= -(\operatorname{con}(A-a))^+ = -\ \overline{\operatorname{con}(A-a)}^{\,+}.\end{aligned}$$

În continuare vom nota $\overline{\operatorname{con} A}$ prin $\overline{\operatorname{con}}\, A$; $\overline{\operatorname{con}}\, A$ se numeşte *înfăşurătoarea conică închisă* a mulţimii A. Mulţimea $\partial I_A(a)$ se notează prin $N(A, a)$ şi se numeşte *conul normal* la A în $a \in A$, iar mulţimea $\overline{\operatorname{con}}\,(A - a)$ o notăm prin $C(A, a)$; este evident că $C(A, a)$ este con convex închis. Din relaţia de mai sus, utilizând teorema bipolarei (Teorema 1.5.7), avem că

$$N(A, a) = -(C(A, a))^+ \ \text{ şi } \ C(A, a) = -(N(A, a))^+. \tag{2.21}$$

Este evident că $N(A, a) = \{0\}$ dacă $a \in \operatorname{aint} A$. De asemenea observăm că $x^* \in N(A, a) \setminus \{0\}$ dacă şi numai dacă $H_{x^*,\langle a,x^*\rangle}$ este hiperplan suport la A în a şi $A \subset H^{\le}_{x^*,\langle a,x^*\rangle}$.

Mulţimea $\partial f(\bar{x})$ poate fi vidă chiar dacă f este i.s.c. în $\bar{x}$. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) := -\sqrt{1 - x^2}$ pentru $|x| \le 1$, $f(x) := \infty$ pentru $|x| > 1$ (considerată şi în Secţiunea 2.1) este i.s.c., finită în 1, dar $\partial f(1) = \emptyset$. În plus $\partial(0 \cdot f)(1) =]-\infty, 0]$.

În secţiunea precedentă am văzut câteva situaţii în care se putea calcula cu uşurinţă conjugata unor funcţii. Punem în evidenţă astfel de situaţii şi pentru ε–subdiferenţiale.

Consecinţa 2.4.1 *Fie $f_i : X_i \to \overline{\mathbb{R}}$, $1 \le i \le n$, funcţii convexe proprii şi $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$. Considerăm funcţia*

$$F : \prod\nolimits_{i=1}^n X_i \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x_1, \ldots, x_n) := \sum\nolimits_{i=1}^n f_i(x_i),$$

şi $\varepsilon \in [0, \infty[$. Atunci

$$\partial_\varepsilon F(\bar{x}) = \bigcup \left\{ \prod\nolimits_{i=1}^n \partial_{\varepsilon_i} f_i(\bar{x}_i) \,\middle|\, \varepsilon_i \ge 0,\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon \right\}.$$

În particular

$$\partial F(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \prod\nolimits_{i=1}^n \partial f_i(\bar{x}_i).$$

Demonstraţie. În secţiunea precedentă am obţinut (pentru $n = 2$, dar extinderea este imediată) că $F^*(x_1^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^n f_i^*(x_i^*)$. Prin urmare

$$\begin{aligned} x^* \in \partial_\varepsilon F(\bar{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad F(\bar{x}) + F^*(x^*) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle + \varepsilon = \langle \bar{x}_1, x_1^* \rangle + \cdots \langle \bar{x}_n, x_n^* \rangle + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n [f_i(\bar{x}_i) + f_i^*(x_i^*) - \langle \bar{x}_i, x_i^* \rangle] \le \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \ge 0 \ : \ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon, \\ &\qquad\qquad f_i(\bar{x}_i) + f_i^*(x_i^*) - \langle \bar{x}_i, x_i^* \rangle \le \varepsilon_i, \ 1 \le i \le n \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \ge 0 \ : \ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon, \ x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i} f_i(\bar{x}_i), \\ &\qquad\qquad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Deci concluzia are loc. ▮

Consecinţa 2.4.2 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă proprie şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă $x \in \operatorname{dom} f$ şi $y \in Y$ sunt astfel ca $y = Ax$ şi $(Af)(y) = f(x)$ atunci pentru orice $\varepsilon \in [0, \infty[$ avem*

$$\partial_\varepsilon (Af)(y) = A^{*-1}(\partial_\varepsilon f(x)\,).$$

Demonstraţie. Avem că

$$\begin{aligned} y^* \in \partial_\varepsilon (Af)(y) \quad &\Leftrightarrow \quad (Af)(y) + (Af)^*(y^*) \le \langle y, y^* \rangle + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(A^* y^*) \le \langle Ax, y^* \rangle + \varepsilon = \langle x, A^* y^* \rangle + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad A^* y^* \in \partial_\varepsilon f(x) \ \Leftrightarrow \ y^* \in A^{*-1}(\partial_\varepsilon f(x)\,). \end{aligned}$$

Am utilizat faptul că $(Af)^* = f^* \circ A^*$, demonstrat în secţiunea precedentă. ▮

Consecinţa 2.4.3 *Fie $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) funcţii convexe proprii. Presupunem că există $\bar{x}_i \in \operatorname{dom} f_i$, $1 \le i \le n$, astfel ca*

$$(f_1 \square \cdots \square f_n)(\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n) = f_1(\bar{x}_1) + \cdots + f_n(\bar{x}_n). \tag{2.22}$$

Atunci pentru orice $\varepsilon \in [0, \infty[$ avem

$$\begin{aligned} &\partial_\varepsilon (f_1 \square \cdots \square f_n)(\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n) \\ &\quad = \ \bigcup \{\partial_{\varepsilon_1} f_1(\bar{x}_1) \cap \cdots \cap \partial_{\varepsilon_n} f_n(\bar{x}_n) \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \ge 0, \ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

În particular

$$\partial (f_1 \square \cdots \square f_n)(\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n) = \partial f_1(\bar{x}_1) \cap \cdots \cap \partial f_n(\bar{x}_n)$$

Invers, dacă $\partial f_1(\bar{x}_1) \cap \cdots \cap \partial f_n(\bar{x}_n) \neq \emptyset$ atunci (2.22) are loc.

Demonstraţie. Se aplică Consecinţa 2.4.1 pentru funcţiile $f_1, \dots, f_n$ şi Consecinţa 2.4.2 pentru funcţia $f : X^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$, şi operatorul $A : X^n \to X$, $A(x_1, \dots, x_n) := x_1 + \dots + x_n$.

Dacă $x^* \in \partial f_1(\bar{x}_1) \cap \dots \cap \partial f_n(\bar{x}_n)$, atunci

$$\langle x_i - \bar{x}_i, x^* \rangle \le f_i(x_i) - f_i(\bar{x}_i) \quad \forall\, i,\ 1 \le i \le n,\ \forall\, x_i \in X,$$

de unde obţinem că $f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_n(\bar{x}_n) \le f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$ pentru toate elementele $x_1, \dots, x_n \in X$ astfel ca $x_1 + \dots + x_n = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n$, adică (2.22) are loc. ∎

În Secţiunea 2.6 vom extinde rezultatele din Consecinţele 2.4.2 şi 2.4.3 la cazul în care infimul nu este atins în y, respectiv $\bar{x}$.

Rezultatul următor pune în evidenţă o condiţie suficientă pentru ca subdiferenţiala într-un punct a unei funcţii convexe să fie nevidă; acest rezultat este deosebit de important.

Teorema 2.4.3 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă proprie. Dacă f este continuă în $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ atunci $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ este nevidă şi w^*–compactă pentru orice $\varepsilon \in [0, \infty[$. În plus, pentru orice $\varepsilon \ge 0$, $f'_\varepsilon(\bar{x}; \cdot)$ este continuă şi*

$$f'_\varepsilon(\bar{x}; x) = \max\{\langle x, x^* \rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\} \quad \forall\, x \in X. \tag{2.23}$$

Demonstraţie. Presupunem că funcţia f este continuă în $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ (din teorema precedentă cunoaştem deja că $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \ne \emptyset$ pentru $\varepsilon > 0$!). Fie $A := \operatorname{epi} f \subset X \times \mathbb{R}$ şi $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in X \times \mathbb{R}$. Deoarece f este continuă în $\bar{x}$, există $V_0 \in \mathcal{V}(0)$ astfel ca

$$f(x) \le f(\bar{x}) + 1 \quad \forall\, x \in \bar{x} + V_0. \tag{2.24}$$

Prin urmare $(\bar{x} + V_0) \times [f(\bar{x}) + 1, \infty[\subset A$, şi deci $\operatorname{int} A \ne \emptyset$; mulţimea A fiind convexă, iar $(\bar{x}, f(\bar{x})) \notin \operatorname{int} A$ $[(\bar{x}, f(\bar{x}) - \delta) \notin A \ \ \forall\, \delta > 0]$, aplicând o teoremă de separare, există $(x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ astfel ca

$$\langle x, x^* \rangle + \alpha t \le \langle \bar{x}, x^* \rangle + \alpha f(\bar{x}) \quad \forall\, (x, t) \in A = \operatorname{epi} f. \tag{2.25}$$

Luând $x = \bar{x}$ şi $t = f(\bar{x}) + n,\ n \in \mathbb{N}$, obţinem că $\alpha \le 0$. Dacă $\alpha = 0$ atunci din (2.25) avem că $\langle x - \bar{x}, x^* \rangle \le 0$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$, iar din (2.24) obţinem că $\langle x, x^* \rangle \le 0$ pentru orice $x \in V_0$, ceea ce, evident, antrenează că $x^* = 0$; am obţinut astfel contradicţia $(x^*, \alpha) = (0, 0)$. Deci $\alpha < 0$; ca şi altădată, putem considera că $\alpha = -1$ în (2.25). Această relaţie devine astfel

$$\langle x, x^* \rangle - f(x) \le \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f,$$

adică $x^* \in \partial f(\bar{x})$.

Fie acum $\varepsilon \geq 0$. Pentru orice $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \partial f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)(0)$, din (2.24), avem că

$$\langle u, x^*\rangle \leq f'_\varepsilon(\bar{x};u) \leq f(\bar{x}+u) - f(\bar{x}) + \varepsilon \leq 1+\varepsilon \quad \forall\, u \in V_0, \tag{2.26}$$

şi deci $\langle u, x^*\rangle \geq -1$ pentru $u \in V := -\frac{1}{1+\varepsilon}V_0$, ceea ce arată că $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \subset V^\circ$. Din Teorema Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.6.3), avem că V° este w^*–compactă; cum $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ este w^*–închisă, rezultă că $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ este w^*–compactă.

Deoarece $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, din Teorema 2.1.10, avem că $\operatorname{dom} f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot) = X$, iar din Teorema 2.2.6 şi (2.26) avem că $f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)$ este continuă. În plus, tot din (2.26), obţinem că

$$f'_\varepsilon(\bar{x};x) \geq \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\}.$$

Dorim să arătăm că în relaţia de mai sus are loc egalitate iar supremul este atins. Pentru aceasta fie $x \in X \setminus \{0\}$. Considerăm $X_0 := \mathbb{R}x$, şi $\varphi : X_0 \to \mathbb{R}$, $\varphi(tx) := tf'_\varepsilon(\bar{x};x)$; este evident că $\varphi(u) \leq f'_\varepsilon(\bar{x},u)$ pentru orice $u \in X_0$. Prin urmare, aplicând Teorema lui Hahn-Banach, există $x^* \in X'$ astfel ca $\langle x, x^*\rangle = \varphi(x) = f'_\varepsilon(\bar{x};x)$ şi $\langle u, x^*\rangle \leq f'_\varepsilon(\bar{x};u)$ pentru orice $u \in X$. Cum $f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)$ este continuă, x^* este continuă, şi deci $x^* \in \partial f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)(0) = \partial_\varepsilon f(\bar{x})$. Demonstraţia este completă. ∎

În cazul în care f nu este continuă în $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ este posibil ca relaţia (2.23) să nu aibă loc. Are loc însă următorul rezultat.

Teorema 2.4.4 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi i.s.c., iar $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, $\varepsilon \in]0,\infty[$. Atunci*

$$f'_\varepsilon(\bar{x};x) = \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\} \quad \forall\, x \in X. \tag{2.27}$$

Prin urmare $f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)$ este o funcţională subliniară şi i.s.c. În plus

$$\begin{aligned} f'_+(\bar{x};x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\}\right) \\ &= \inf_{\varepsilon>0}\left(\sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\}\right) \quad \forall\, x \in X. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Demonstraţie. În Teorema 2.4.2 am văzut că $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \partial f'_\varepsilon(\bar{x};\cdot)(0)$, şi deci

$$\langle x, x^*\rangle \leq f'_\varepsilon(\bar{x};x) \quad \forall\, x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x}),\ \forall\, x \in X.$$

Prin urmare are loc inegalitatea '$\geq$' din (2.27). Pentru a dovedi inegalitatea inversă, fie $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < f'_\varepsilon(\bar{x};x)$. Având în vedere definiţia lui $f'_\varepsilon(\bar{x};x)$, avem că

$$\lambda < \frac{f(\bar{x}+tx) - f(\bar{x}) + \varepsilon}{t} \quad \forall\, t > 0 \tag{2.29}$$

şi
$$\lambda < \lim_{t\to\infty} \frac{f(\bar{x}+tx)-f(\bar{x})+\varepsilon}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(\bar{x}+tx)-f(\bar{x})}{t}. \tag{2.30}$$
Considerăm $A := \operatorname{epi} f$ şi $B := \{(\bar{x}+sx, f(\bar{x})+\lambda s-\varepsilon) \mid s \geq 0\}$. Este evident că A şi B sunt mulţimi convexe, nevide, iar din (2.29) avem că $A \cap B = \emptyset$, adică $(0,0) \notin A - B$. Arătăm că $A - B$ este mulţime închisă. Pentru aceasta fie $(\,(x_n,t_n)\,) \subset A$, $(\,(\bar{x}+s_n x, f(\bar{x})+s_n\lambda-\varepsilon)\,) \subset B$ astfel ca
$$x_n - \bar{x} - s_n x \to u, \quad t_n - f(\bar{x}) - s_n\lambda + \varepsilon \to \mu. \tag{2.31}$$
Presupunem că $s_n \to \infty$; din (2.31) avem că $\frac{1}{s_n}x_n \to x$ şi $\frac{1}{s_n}t_n \to \lambda$. Fie $s > 0$; există $n_s \in \mathbb{N}$ astfel că $s_n > s$ pentru orice $n \geq n_s$, şi deci
$$\left(\tfrac{s}{s_n}(x_n,t_n) + (1-\tfrac{s}{s_n})(\bar{x}, f(\bar{x})\right) \in A \ \ \forall\, n \geq n_s,$$
de unde, trecând la limită, obţinem că $s(x,\lambda)+(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \operatorname{epi} f$. Prin urmare $f(\bar{x}+tx) \leq f(\bar{x})+t\lambda$, adică $(f(\bar{x}+tx)-f(\bar{x}))/t \leq \lambda$, pentru orice $t > 0$. Făcând $t \to \infty$, obţinem că $\lim_{t\to\infty}(f(\bar{x}+tx)-f(\bar{x}))/t \leq \lambda$, contrazicând (2.30). Deci (s_n) conţine un subşir mărginit (s_{n_k}); putem presupune că $s_{n_k} \to s \in [0,\infty[$. Din (2.31) obţinem că
$$x_{n_k} \to u + \bar{x} + sx =: x' \in X, \quad t_{n_k} \to f(\bar{x}) + s\lambda + \mu - \varepsilon =: t' \in \mathbb{R}.$$
Întrucât A este închisă, $(x',t') \in A$, adică $f(x') \leq t'$. Rezultă că
$$(u,\mu) = (x',t') - (\bar{x}+sx, f(\bar{x})+s\lambda-\varepsilon) \in A - B.$$
Deoarece $A - B$ este convexă, închisă şi nevidă, iar $(0,0) \notin A - B$, aplicând o teoremă de separare, există $(\bar{x}^*,\alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ astfel ca
$$0 > \langle y - \bar{x} - sx, \bar{x}^*\rangle + \alpha(t - f(\bar{x}) - s\lambda + \varepsilon) \ \ \forall\,(y,t) \in \operatorname{epi} f, \ \forall\, s \geq 0.$$
Luând $y = \bar{x}$ şi făcând $t \to \infty$, obţinem că $\alpha \leq 0$; dacă $\alpha = 0$, pentru $s = 0$ se obţine contradicţia $0 > 0$. Deci $\alpha < 0$, şi putem presupune că $\alpha = -1$. Relaţia de mai sus devine
$$0 > \langle y - \bar{x}, \bar{x}^*\rangle - (f(y) - f(\bar{x}) + \varepsilon) + s(\lambda - \langle x, \bar{x}^*\rangle) \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom} f, \ \forall\, s \geq 0.$$
Luând $s = 0$ în această relaţie, obţinem că $\bar{x}^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$; trecând la limită pentru $s \to \infty$ obţinem că $\langle x, \bar{x}^*\rangle \geq \lambda$. Deci $\lambda \leq \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})\}$. Cum $\lambda < f'_\varepsilon(\bar{x};x)$ este arbitrar, relaţia (2.27) are loc. Egalitatea (2.28) rezultă din (2.27) şi Teorema 2.1.10. ∎

Criteriul de subdiferenţiabilitate din Teorema 2.4.3 poate fi extins.

Teorema 2.4.5 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă şi proprie. Considerăm mulţimea $X_0 := \operatorname{aff}(\operatorname{dom} f)$. Dacă $f|_{X_0}$ este continuă în $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ atunci $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$. În particular, dacă $\dim X < \infty$ atunci $\partial f(x) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $\bar{x} = 0$; atunci $X_0 = \operatorname{lin}(\operatorname{dom} f)$. Funcţia $g := f|_{X_0}$ este convexă, proprie şi continuă în 0. Din teorema precedentă avem că $\partial g(0) \neq \emptyset$. Fie $\varphi \in \partial g(0)$; deci $\varphi \in {X_0}^*$ şi

$$\varphi(x) - \varphi(0) \leq g(x) - g(0) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} g. \tag{2.32}$$

Deoarece φ este continuă şi liniară, există $M \geq 0$ astfel ca $\varphi(x) \leq M \cdot \|x\|$ pentru orice $x \in X_0$. Aplicând Teorema Hahn-Banach, există $x^* \in X'$ astfel ca $x^*|_{X_0} = \varphi$ şi $\langle x, x^* \rangle \leq M \cdot \|x\|$ pentru orice $x \in X$. Prin urmare $x^* \in X^*$. În plus, din (2.32), avem că

$$\langle x - 0, x^* \rangle = \varphi(x) \leq g(x) - g(0) = f(x) - f(0) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g,$$

şi deci $x^* \in \partial f(0)$.

Dacă $\dim X < \infty$ atunci $\dim X_0 < \infty$. Din Teorema 2.2.9 avem că g este continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} g) = \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$. Concluzia rezultă din prima parte. ∎

Să observăm că în condiţiile Teoremei 2.4.5 mulţimea $\partial f(x)$ este, în general, nemărginită, şi deci nu este w^*–compactă. Are loc însă următorul rezultat; R.T. Rockafellar a demonstrat valabilitatea acestui rezultat pentru operatori monotoni.

Teorema 2.4.6 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă proprie şi continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Atunci ∂f este local mărginită pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} \partial f) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.*

Demonstraţie. Din Teorema 2.4.3 avem că $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) \subset \operatorname{dom} \partial f \subset \operatorname{dom} f$, de unde rezultă imediat egalitatea din enunţul teoremei. Fie $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$; cum f este continuă în x_0, din Teorema 2.2.5, rezultă că există $M,\ \rho > 0$ astfel ca

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\| \quad \forall\, x,\, y \in B(x_0, \rho).$$

Fixând $x \in B(x_0, \rho)$ şi luând $y := x + tu,\ t \in]0, (\rho - \|x - x_0\|)/(\|u\| + 1)[$ în inegalitatea de mai sus, apoi făcând $t \to 0$, obţinem că

$$f'_+(x; u) \leq M \cdot \|u\| \quad \forall\, x \in B(x_0, \rho),\ \forall\, u \in X,$$

ceea ce arată că $\partial f(B(x_0, \rho)) \subset D(0, M)$. Deci concluzia are loc. ∎

Consecinţa 2.4.4 *Fie $f : X \to \overline{I\!R}$ convexă şi proprie. Presupunem că f este continuă în $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Atunci f este G-diferenţiabilă în $\bar{x}$ dacă şi numai dacă $\partial f(\bar{x})$ are un singur element (şi anume $\nabla f(\bar{x})$).*

Demonstraţie. Presupunem că f este G-diferenţiabilă în $\bar{x}$. Atunci

$$f'(\bar{x}; x) = \langle x, \nabla f(\bar{x})\rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Prin urmare $\partial f(\bar{x}) = \partial f'_+(\bar{x}; \cdot)(0) = \{\nabla f(\bar{x})\}$, şi deci $\partial f(\bar{x})$ are un singur element (nu s-a folosit continuitatea lui f !).

Presupunem acum că $\partial f(\bar{x}) = \{\bar{x}^*\}$. Atunci, din Teorema 2.4.3, avem că

$$f'_+(\bar{x}; x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})}{t} = \langle x, \bar{x}^*\rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Cum

$$\lim_{t\uparrow 0} \frac{f(\bar{x} + tx) - f(\bar{x})}{t} = -f'_+(\bar{x}; -x) = -\langle -x, \bar{x}^*\rangle = \langle x, \bar{x}^*\rangle,$$

avem că f este G-diferenţiabilă în $\bar{x}$ şi $\nabla f(\bar{x}) = x^*$. ∎

În Teorema 2.4.2 am văzut că determinarea ε–subdiferenţialei unei funcţii convexe într-un punct revine la a calcula subdiferenţiala unei funcţionale subliniare în origine. De altfel şi alte subdiferenţiale (subdiferenţiala Clarke, Penot-Michel, etc.), pentru funcţii neconvexe, se introduc prin intermediul unor funcţionale subliniare. Având în vedere acest aspect ne propunem să punem în evidenţă în continuare câteva rezultate referitoare la funcţionale subliniare.

Teorema 2.4.7 *Fie f, $g : X \to \overline{I\!R}$ două funcţionale subliniare.*

(i) $\partial f(0) \neq \emptyset \iff f$ *este i.s.c. în* 0*;*

(ii) $f^* = I_{\partial f(0)}$*;*

(iii) *pentru orice $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon \in [0, \infty[$ avem*

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in \partial f(0) \mid \langle \bar{x}, x^*\rangle = f(\bar{x})\},$$

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \{x^* \in \partial f(0) \mid \langle \bar{x}, x^*\rangle \geq f(\bar{x}) - \varepsilon\}, \qquad \partial_\varepsilon f(0) = \partial f(0);$$

(iv) *dacă f este i.s.c. în 0 atunci*

$$\bar{f}(x) = \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x^* \in \partial f(0)\} \quad \forall\, x \in X;$$

(v) *Presupunem că f şi g sunt i.s.c. Atunci $f \leq g \iff \partial f(0) \subset \partial g(0)$.*

Demonstraţie. (i) Dacă $\partial f(0) \neq \emptyset$, din Teorema 2.4.1, avem că f este i.s.c. în 0. Presupunem acum că f este i.s.c. în 0. Atunci $\bar{f}(0) = f(0) = 0$, şi deci $(0,-1) \notin \overline{\operatorname{epi} f} = \operatorname{epi} \bar{f}$. Deci există $(x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\langle x, x^* \rangle + \alpha t < \lambda < -\alpha \quad \forall\, (x,t) \in \operatorname{epi} f.$$

Cum $(0,0) \in \operatorname{epi} f$, $0 < -\alpha$, şi deci putem presupune că $\alpha = -1$. Prin urmare $\langle x, x^* \rangle - f(x) \leq \lambda$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$. Deoarece $\operatorname{dom} f$ este con, avem că $\langle x, x^* \rangle \leq f(x)$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$, adică $x^* \in \partial f(0)$ ($\neq \emptyset$).

(ii) Pentru orice $x^* \in X^*$ avem că

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\} \geq \langle 0, x^* \rangle - f(0) = 0.$$

Dacă $x^* \in \partial f(0)$, $\langle x, x^* \rangle \leq f(x)$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$; deci $f^*(x^*) = 0$. Dacă $x^* \notin \partial f(0)$, există $\bar{x} \in X$ astfel ca $\langle \bar{x}, x^* \rangle > f(\bar{x})$. În acest caz

$$f^*(x^*) \geq \sup\{\langle t\bar{x}, x^* \rangle - f(t\bar{x}) \mid t > 0\} = \sup\{t(\langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x})\,) \mid t > 0\} = \infty.$$

(iii) Fie $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $\varepsilon \geq 0$. Dacă $x^* \in \partial f(0)$ şi $\langle \bar{x}, x^* \rangle \geq f(\bar{x}) - \varepsilon$ atunci

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle - \langle \bar{x}, x^* \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + \varepsilon \quad \forall\, x \in X,$$

adică $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$. Invers, luând $x^* \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, are loc inegalitatea de mai sus. Pentru $x = 0$ obţinem că $\langle \bar{x}, x^* \rangle \geq f(\bar{x}) - \varepsilon$, iar pentru $x := \bar{x} + tu$, $t > 0$ şi $u \in X$, obţinem

$$t\langle u, x^* \rangle \leq f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x}) + \varepsilon \leq f(\bar{x}) + tf(u) - f(\bar{x}) + \varepsilon = tf(u) + \varepsilon.$$

Împărţind prin $t > 0$ şi făcând $t \to \infty$ obţinem că $\langle u, x^* \rangle \leq f(u)$ pentru orice $u \in X$, adică $x^* \in \partial f(0)$.

Pentru $\varepsilon = 0$ obţinem

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in \partial f(0) \mid \langle \bar{x}, x^* \rangle \geq f(\bar{x})\} = \{x^* \in \partial f(0) \mid \langle \bar{x}, x^* \rangle = f(\bar{x})\},$$

iar pentru $\bar{x} = 0$ obţinem

$$\partial_\varepsilon f(0) = \{x^* \in \partial f(0) \mid \langle 0, x^* \rangle \geq f(0) - \varepsilon\} = \partial f(0).$$

(iv) Presupunem că f este i.s.c. în 0. Atunci $\bar{f}(0) = f(0) = 0$. Utilizând Teorema 2.3.3 avem că $f^{**} = \bar{f}$. Prin urmare

$$\bar{f}(x) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \mid x^* \in X^*\} = \sup\{\langle x, x^* \rangle \mid x^* \in \partial f(0)\}.$$

(v) Este evident că $\partial f(0) \subset \partial g(0)$ dacă $f \leq g$. Implicaţia inversă rezultă imediat utilizând punctul precedent. ∎

Consecinţa 2.4.5 *Fie* $f : (X, \| \ \|) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$, *şi* $\bar{x} \in X$. *Atunci*

$$f^* = I_{U^*}, \quad \partial f(0) = U^*, \quad \partial f(\bar{x}) = \{x^* \in U^* \mid \langle \bar{x}, x^* \rangle = \|\bar{x}\|\}.$$

Demonstraţie. Formulele de mai sus se obţin imediat utilizând teorema precedentă. ∎

Subdiferenţiala normei are o interpretare geometrică interesantă. Am văzut că un hiperplan este o mulţime de forma $H_{\varphi,\alpha} := \{x \in X \mid \langle x, \varphi \rangle = \alpha\}$, unde $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$; dacă $\dim X \geq 1$, $H_{\varphi,\alpha} \neq \emptyset$. Deoarece pentru orice $\beta \neq 0$, $H_{\beta\varphi,\beta\alpha} = H_{\varphi,\alpha}$, putem presupune întotdeauna că $\varphi \in S^*$ şi $\alpha \geq 0$. Se constată cu uşurinţă (exerciţiu !) că dacă $\varphi, \varphi' \in S^*$, $\alpha, \alpha' > 0$ atunci $H_{\varphi,\alpha} = H_{\varphi',\alpha'}$ dacă şi numai dacă $\varphi = \varphi'$, $\alpha = \alpha'$. Putem da acum interpretarea geometrică a subdiferenţialei normei: fie $\bar{x} \in S$, $x^* \in S^*$ şi $\alpha \geq 0$; atunci

$$H_{x^*,\alpha} \text{ este hiperplan de sprijin la } U \text{ în } \bar{x} \iff \alpha = 1 \text{ şi } x^* \in \partial\| \ \|(\bar{x}).$$

Prin urmare mulţimea hiperplanelor de sprijin la U în $\bar{x} \in S$ este $\{H_{x^*,1} \mid x^* \in \partial\| \ \|(\bar{x})\}$ (exerciţiu !). Dacă în orice punct din S sfera unitate U are un singur hiperplan de sprijin, spunem că $(X, \| \ \|)$ este *neted*; să observăm că aceasta este o proprietate geometrică (a normei) şi nu topologică. Proprietatea duală, după cum vom vedea puţin mai târziu, este cea de spaţiu strict convex. Spunem că $(X, \| \ \|)$ este *strict convex* dacă

$$\forall\, x, y \in X, \ x \neq y, \ \|x\| = \|y\| = 1 \ : \ \|\tfrac{1}{2}(x + y)\| < 1.$$

Desigur, condiţia de mai sus este echivalentă cu faptul că $\frac{1}{2}(x+y) \in B$ pentru orice $x, y \in U$, $x \neq y$.

Un alt exemplu de aplicaţie subliniară este dat în rezultatul următor.

Consecinţa 2.4.6 *Fie* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(x) := \max\{x_1, \ldots, x_k\}$ *şi* $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$, *unde* $k \in \mathbb{N}^*$. *Atunci*

$$\partial f(0) = \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i \geq 0, \ y_1 + \cdots + y_k = 1\}, \qquad f^* = I_{\partial f(0)}$$

şi

$$\begin{aligned} &\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \\ &\quad = \ \left\{ y \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, y_i \geq 0, \ y_1 + \cdots + y_k = 1, \ \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_k y_k \geq f(\bar{x}) - \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Este evident că f este subliniară şi continuă. În plus

$$y \in \partial f(0) \;\Leftrightarrow\; x_1y_1 + \cdots + x_ky_k \le \max\{x_1, \ldots, x_k\} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^k.$$

Luând $x_j = 0$ pentru $j \ne i$ şi $x_i = -1$, obţinem că $-y_i \le 0$, adică $y_i \ge 0$ pentru orice i. Luând acum $x_i = x \in \mathbb{R}$ pentru orice i, obţinem că $x(y_1+\cdots+y_k) \le x$ pentru orice x , şi deci $y_1 + \cdots + y_k = 1$. Prin urmare

$$\partial f(0) \subset \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i \ge 0,\ y_1 + \cdots + y_k = 1\}.$$

Incluziunea inversă este imediată. Celelalte relaţii rezultă direct din teorema precedentă. ∎

În rezultatul următor punem în evidenţă câteva proprietăţi ale funcţiei $\frac{1}{p}\| \, \|^p$; de asemenea punem în evidenţă şi legătura acesteia cu unele proprietăţi geometrice ale spaţiului normat X.

Teorema 2.4.8 *Fie $(X, \| \, \|)$ spaţiu normat, p, $q \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, şi funcţia $f_p : X \to \mathbb{R}$, $f_p(x) := \frac{1}{p}\|x\|^p$. Atunci*

(i) *f_p este funcţie convexă şi continuă;*

(ii) *${f_p}^*(x^*) = \frac{1}{q}\|x^*\|^q \quad \forall\, x^* \in X^*$;*

(iii) *$\partial f_p(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle = \|x\|^p = \|x^*\|^q\} = \|x\|^{p-1} \cdot \partial\| \, \|(x)$, $\partial f_p(-x) = -\partial f_p(x)$, $\partial f_p(tx) = t^{p-1}\partial f_p(x)$ pentru orice $x \in X$ şi $t \in [0, \infty[$.*

(iv) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:* **a)** *X este neted,* **b)** *f_p este G-diferenţiabilă pe X,* **c)** *$\| \, \|$ este G-diferenţiabilă pe $X \setminus \{0\}$.*

(v) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:* **a)** *X este strict convex,* **b)** *f_p este strict convexă,* **c)** *∂f_p este strict monotonă,* **d)** *$\partial f_p(x) \cap \partial f_p(y) = \emptyset$ pentru orice x, $y \in X$, $x \ne y$.*

(vi) *X este reflexiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} \partial f_p = X^*$.*

Demonstraţie. (i) Observăm că $f_p = \varphi_p \circ \| \, \|$, unde $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $\varphi_p(t) := \frac{1}{p}|t|^p$. Deoarece φ_p este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata sa este strict crescătoare, din Teorema 2.1.5, φ_p este strict convexă; în plus φ_p este strict crescătoare pe $[0, \infty[$. Fie x, $y \in X$ şi $\lambda \in]0, 1[$. Atunci

$$\begin{aligned} f_p(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \tfrac{1}{p}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \le \tfrac{1}{p}\left(\lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|\right)^p \\ &\le \tfrac{1}{p}\left(\lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p\right) \le \lambda f_p(x) + (1-\lambda) f_p(y), \end{aligned}$$

penultima inegalitate fiind strictă dacă $\|x\| \ne \|y\|$. Deci f_p este convexă. Este evident că f_p este continuă.

(ii) Avem că

$$\begin{aligned}
f_p^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\left(\langle x,x^*\rangle - \frac{1}{p}\|x\|^p\right) = \sup_{x\in X}\left(|\langle x,x^*\rangle| - \frac{1}{p}\|x\|^p\right)\\
&= \sup_{x\in S}\sup_{t\geq 0}\left(t|\langle x,x^*\rangle| - \frac{1}{p}t^p\right)\\
&= \sup_{x\in S}\left(|\langle x,x^*\rangle|\cdot|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{p}{p-1}}\right)\\
&= \frac{1}{q}\sup_{x\in S}|\langle x,x^*\rangle|^q = \frac{1}{q}\|x^*\|^q.
\end{aligned}$$

(iii) Este ştiut, şi uşor de dovedit, că dacă $a,\, b\geq 0,\ ab\leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a^p=b^q$. Fie $x\in X,\ x^*\in X^*$; atunci

$$\langle x,x^*\rangle \leq |\langle x,x^*\rangle| \leq \|x\|\cdot\|x^*\| \leq \tfrac{1}{p}\|x\|^p+\tfrac{1}{q}\|x^*\|^q,$$

având peste tot egalitate dacă şi numai dacă $\langle x,x^*\rangle=\|x\|^p=\|x^*\|^q$. Relaţia $\partial f_p(x)=\{x^*\in X^* \mid \langle x,x^*\rangle=\|x\|^p=\|x^*\|^q\}$ se obţine acum imediat, utilizând (ii) şi punctul (iii) al Teoremei 2.4.2. Celelalte relaţii sunt evidente.

(iv) Deoarece funcţiile f_p şi $\|\ \|$ sunt continue, utilizând Consecinţa 2.4.4, ele sunt G-diferenţiabile în $x\in X$ dacă şi numai dacă au un singur subgradient în x. Ţinând seama de faptul că $\partial f_p(0)=\{0\}$ şi $\partial f_p(x)=\|x\|^{p-1}\partial\|\ \|(x)$ pentru $x\neq 0$, avem că b) $\Leftrightarrow$ c), iar din expresia mulţimii hiperplanelor de sprijin la U într-un punct din S, dată după Consecinţa 2.4.5, c) $\Rightarrow$ a). Invers, dacă X este neted atunci, utilizând aceeaşi formulă pentru mulţimea hiperplanelor de sprijin menţionată mai sus, $\partial\|\ \|(x)$ are un singur element pentru orice $x\in S$; utilizând formulele de la punctul (ii) obţinem că $\partial f_p(x)$ are un singur element pentru orice $x\in X$, şi deci a) $\Rightarrow$ b).

(v) a) $\Rightarrow$ b) Presupunem că X este strict convex, şi fie $x,\, y\in X,\ x\neq y$, $\lambda\in\,]0,1[$. Am văzut la punctul (i) că

$$f_p(\lambda x+(1-\lambda)y)\ <\ \lambda f_p(x)+(1-\lambda)f_p(y),$$

dacă $\|x\|\neq\|y\|$. Fie deci $\|x\|=\|y\|=:\rho$; desigur $\rho>0$ (altfel $x=y=0$!). Vrem să arătăm că $\|\theta(\lambda)\|<\rho$, unde $\theta(\mu):=\mu x+(1-\mu)y$. Considerăm $\varepsilon:=\min\{\lambda,1-\lambda\}>0$. Este evident că $\|\theta(\lambda-\varepsilon)\|\leq\rho,\ \|\theta(\lambda+\varepsilon)\|\leq\rho$ şi $\theta(\lambda)=\frac{1}{2}\theta(\lambda-\varepsilon)+\frac{1}{2}\theta(\lambda+\varepsilon)$; în plus $\theta(\lambda-\varepsilon)\neq\theta(\lambda+\varepsilon)$. Obţinem astfel că $\|\theta(\lambda)\|<\rho$. Deci

$$\begin{aligned}
f_p(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \tfrac{1}{p}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p < \tfrac{1}{p}(\lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|)^p\\
&= \tfrac{1}{p}\|x\|^p=\lambda f_p(x)+(1-\lambda)f_p(y).
\end{aligned}$$

Implicaţia b) $\Rightarrow$ c) rezultă din punctul (iv) al Teoremei 2.4.2, iar implicaţia c) $\Rightarrow$ d) este evidentă.

d) $\Rightarrow$ a) Fie $x,\ y \in S,\ x \neq y$. Presupunem că $\frac{1}{2}(x+y) \in S$; considerăm $x^* \in \partial f_p(\frac{x+y}{2})$ (există deoarece f_p este continuă). Atunci

$$1 = \|\tfrac{1}{2}(x+y)\|^p = \|x^*\|^q = \left\langle \tfrac{1}{2}(x+y), x^* \right\rangle \leq \tfrac{1}{2}\|x\| \cdot \|x^*\| + \tfrac{1}{2}\|y\| \cdot \|x^*\| = 1.$$

Prin urmare

$$1 = \|x\|^p = \|x^*\|^q = \langle x, x^* \rangle, \quad 1 = \|y\|^p = \|x^*\|^q = \langle y, x^* \rangle,$$

şi deci $x^* \in \partial f_p(x) \cap \partial f_p(y)$, contradicţie. Deci $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$, ceea ce arată că X este strict convex.

(vi) Presupunem că X este reflexiv şi fie $x^* \in X^*$. Considerăm funcţia $g : X \to \mathbb{R},\ g(x) := f_p(x) - \langle x, x^* \rangle$. Este evident că g este convexă, continuă şi $g(x) \geq \frac{1}{p}\|x\|^p - \|x\| \cdot \|x^*\|$; prin urmare $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \infty$. Rezultă că mulţimea $K := \{x \in X \mid g(x) \leq 1\}$ este mărginită, convexă şi închisă. Deoarece X este reflexiv K este w–compactă. Deoarece g este w-i.s.c., din Teorema lui Weierstrass (Teorema 1.1.17), există $\bar{x} \in K$ astfel ca $g(\bar{x}) \leq g(x) \leq 1$ pentru orice $x \in K$. Cum $g(x) > 1$ pentru $x \in X \setminus K$, avem că $g(\bar{x}) \leq g(x)$ pentru orice $x \in X$, adică $\langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq f_p(x) - f_p(\bar{x})$. Această relaţie arată că $x^* \in \partial f_p(\bar{x})$. Am obţinut astfel că $\operatorname{Im} \partial f_p = X^*$.

Invers, presupunem că $\operatorname{Im} \partial f_p = X^*$. Fie $x^* \in X^*$; ţinând seama de Teorema lui James (Teorema 1.8.4), trebuie să arătăm că x^* îşi atinge supremul pe U. Desigur, putem presupune că $\|x^*\| = 1$. Din ipoteză există $\bar{x} \in X$ astfel ca $x^* \in \partial f_p(\bar{x})$. Deci

$$\langle \bar{x}, x^* \rangle = \|\bar{x}\|^p = \|x^*\|^q = 1 \geq \langle x, x^* \rangle \quad \forall\, x \in U.$$

Prin urmare $\bar{x} \in U$, şi deci x^* îşi atinge supremul pe U în $\bar{x}$. ∎

Aplicaţia multivocă $F_X := \partial f_2 : X \to \mathcal{P}(X^*)$ se numeşte *aplicaţia de dualitate* a lui X. Prin urmare

$$F_X(x) = \left\{ x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Dacă $(X, \langle\, ,\, \rangle)$ este spaţiu Hilbert, aplicaţia de dualitate a lui X este funcţia $\boldsymbol{F}_X$ pusă în evidenţă în Teorema lui Riesz (Teorema 1.9.3); dacă X^* este identificat cu X atunci aplicaţia de dualitate a lui X este aplicaţia identică.

Referitor la stricta convexitate, respectiv netezimea, spaţiilor normate are loc următorul rezultat.

Teorema 2.4.9 *Fie* $(X, \| \ \|)$ *un spaţiu normat şi* X^* *înzestrat cu norma duală. Dacă* X^* *este neted (strict convex) atunci* X *este strict convex (neted). Dacă* X *este spaţiu Banach reflexiv atunci* X^* *este neted (strict convex) dacă şi numai dacă* X *este strict convex (neted).*

Demonstraţie. Fie pentru început X^* spaţiu neted şi $x, y \in S$, $x \neq y$; presupunem că $\frac{1}{2}(x+y) \in S$. Luând $\bar{x}^* \in F_X(\frac{x+y}{2})$, ca în demonstraţia punctului (v) din teorema precedentă, obţinem că

$$1 = \|x\|^2 = \|y\|^2 = \|\bar{x}^*\|^2 = \langle x, \bar{x}^* \rangle = \langle y, \bar{x}^* \rangle.$$

Prin urmare $\{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = 1\}$ şi $\{x^* \in X^* \mid \langle y, x^* \rangle = 1\}$ sunt hiperplane de sprijin, distincte, la U^* în $\bar{x}^* \in S^*$, ceea ce contrazice faptul că X^* este neted. Deci X este strict convex.

Presupunem acum că X^* este strict convex, dar X nu este neted. Atunci există x^*, $y^* \in S^*$ astfel că $\{x \in X \mid \langle x, x^* \rangle = 1\}$ şi $\{x \in X \mid \langle x, y^* \rangle = 1\}$ sunt hiperplane de sprijin, distincte, la U în $\bar{x}$. Deci $x^* \neq y^*$ şi

$$1 = \langle \bar{x}, x^* \rangle = \langle \bar{x}, y^* \rangle = \left\langle \bar{x}, \tfrac{1}{2}(x^* + y^*) \right\rangle \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\tfrac{1}{2}(x^* + y^*)\| = \|\tfrac{1}{2}(x^* + y^*)\| \leq 1.$$

Prin urmare $\|\frac{1}{2}(x^* + y^*)\| = 1$, ceea ce contrazice faptul că X^* este strict convex. Deci X este neted.

Dacă X este reflexiv şi X este strict convex (neted) atunci X^{**} este strict convex (neted) şi deci, din prima parte, obţinem că X^* este neted (strict convex). ∎

Desigur, atât pentru conjugate cât şi pentru ε–subdiferenţiale este de dorit să avem cât mai multe formule de calcul. Există un puternic set de astfel de formule pe care le vom pune în evidenţă în paragrafele următoare.

2.5 Problema generală a programării convexe

Prin *problemă de programare convexă* înţelegem problema minimizării unei funcţii convexe $f : X \to \overline{I\!R}$, numită *funcţie obiectiv*, pe o mulţime convexă $C \subset X$, numită *mulţimea soluţiilor admisibile* sau a *restricţiilor.* Vom nota această problemă prin

$$(P) \qquad \min\ f(x),\ x \in C.$$

Desigur, pentru formularea acestei probleme X trebuie să fie un spaţiu liniar, însă pentru a obţine rezultate consistente presupunem în continuare că X este spaţiu liniar normat, deşi multe rezultate se pot stabili în spaţii local convexe separate.

Problemei (P) i se poate asocia o problemă (aparent) fără restricţii:

$$(\widetilde{P}) \qquad \min\ \tilde{f}(x),\ x \in X,$$

unde $\tilde{f} := f + I_C$.

Pentru ca problema (P) să nu fie trivială este firească ipoteza $C \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ ($\Leftrightarrow$ $\operatorname{dom} \tilde{f} \neq \emptyset$) şi f nu ia valoarea $-\infty$ pe C (adică $\tilde{f}$ nu ia valoarea $-\infty$).

Se numeşte *valoarea* problemei (P) elementul

$$v(P) = v(f, C) := \inf\{f(x) \mid x \in C\} \in \overline{\mathbb{R}};$$

se numeşte *soluţie (optimă)* a problemei (P) un element $\bar{x} \in C$ cu proprietatea că $f(\bar{x}) = v(P)$, ceea ce revine la faptul că $\bar{x}$ este un punct de minim (global) pentru funcţia $\tilde{f}$. Notăm prin $S(P)$ sau $S(f, C)$ mulţimea soluţiilor optime ale problemei (P). Prin urmare

$$\begin{aligned} S(P) &= \{\bar{x} \in C \mid f(\bar{x}) \leq f(x)\ \ \forall x \in C\} = \{\bar{x} \in X \mid \tilde{f}(\bar{x}) \leq \tilde{f}(x)\ \ \forall x \in X\} \\ &= S(\widetilde{P}) \end{aligned}$$

dacă $C \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Desigur, o problemă importantă este aceea a existenţei soluţiilor pentru (P), respectiv $(\widetilde{P})$. Sursa cea mai importantă pentru obţinerea existenţei unei soluţii pentru (P) este Teorema lui Weierstrass (Teorema 1.1.17). În acest sens are loc următorul rezultat.

Teorema 2.5.1 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi i.s.c.*

(i) *Dacă există $\lambda > v(f, X)$ astfel ca $\operatorname{niv}_\lambda f$ să fie w–compactă atunci $S(f, X) \neq \emptyset$.*

(ii) *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv şi $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ atunci $S(f, X) \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. (i) Dacă $\lambda > v(f, X)$, este evident că $v(f, X) = v(f, \operatorname{niv}_\lambda f)$ şi $S(f, X) = S(f, \operatorname{niv}_\lambda f)$. Deoarece f este i.s.c., f este w–i.s.c. Concluzia urmează din Teorema 1.1.17 aplicată funcţiei $f|_{\operatorname{niv}_\lambda f}$.

(ii) Condiţia de *coercivitate* $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ implică (de fapt este echivalentă cu) faptul că $\operatorname{niv}_\lambda f$ este mărginită pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Cum $\operatorname{niv}_\lambda f$ este w–închisă, iar X este spaţiu reflexiv, din Teorema 1.8.4, avem că $\operatorname{niv}_\lambda f$ este w–compactă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluzia rezultă din (i). ∎

Rezultatele stabilite în Teorema 2.5.1 se pot reformula imediat pentru problema (P). Există condiţii suficiente, formulate direct pentru (P), prin intermediul funcţiei de recesie a lui f şi a conului de recesie (sau asimptotic) al mulţimii C, care de fapt antrenează coercivitatea funcţiei $\tilde{f}$; nu studiem aceste noţiuni şi rezultate în cele ce urmează.

O altă problemă importantă în teoria optimizării este cea a unicităţii soluţiei atunci când există. Următorul rezultat dă informaţii în acest sens.

Teorema 2.5.2 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă şi proprie. Atunci $S(f,X)$ este mulţime convexă. În plus, dacă f este strict convexă atunci $S(f,X)$ are cel mult un element.*

Demonstraţie. Fie $\bar{x} \in S(f,X)$. Atunci $S(f,X) = \mathrm{niv}_{f(\bar{x})} f$, şi deci $S(f,X)$ este convexă.

Fie acum f strict convexă, şi presupunem că $S(f,X)$ conţine elementele distincte x_1, x_2; deoarece f este proprie, $S(f,X) \subset \mathrm{dom}\, f$. Obţinem astfel că

$$v(f,X) \le f\left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right) < \tfrac{1}{2}f(x_1) + \tfrac{1}{2}f(x_2) = v(f,X),$$

absurd. Prin urmare $S(f,X)$ are cel mult un element. ∎

După cum se ştie, procedeul practic de determinare a punctelor de extrem ale unei funcţii constă în determinarea punctelor care verifică condiţiile necesare de extrem şi apoi de a reţine pe acelea care verifică condiţiile suficiente de extrem. În programarea convexă, sub forma ei generală, condiţia necesară de minim este foarte simplă.

Teorema 2.5.3 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă şi proprie. Atunci $\bar{x} \in X$ este punct de minim (global) pentru f dacă şi numai dacă $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) \le f(x) \ \ \forall x \in X \quad &\Leftrightarrow \quad [\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f \text{ şi } 0 \le f(x) - f(\bar{x}) \ \ \forall x \in X] \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(\bar{x}), \end{aligned}$$

adică are loc concluzia. ∎

Prin urmare, în programarea convexă condiţia necesară de minim este şi condiţie suficientă.

De multe ori interesează şi soluţii de optim local; dacă $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, spunem că $\bar{x} \in X$ este un *punct de minim (maxim) local* dacă există $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$ astfel ca $f(\bar{x}) \le f(x)$ pentru orice $x \in V$ ($f(\bar{x}) \ge f(x)$ pentru orice $x \in V$). Problemele convexe de programare mai au însă o particularitate.

Teorema 2.5.4 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă.*

(i) *Dacă $\bar{x} \in \mathrm{dom}\, f$ este punct de minim local pentru f atunci $\bar{x}$ este punct de minim global;*

(ii) *dacă* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ *este punct de maxim local pentru* f *atunci* $\bar{x}$ *este punct de minim global pentru* f*.*

Demonstraţie. (i) Prin ipoteză există $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$ astfel ca $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V$. Presupunem că există $x \in X$ astfel ca $f(x) < f(\bar{x})$; deci $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Deoarece $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$, există $\lambda \in]0,1[$ astfel ca $y := (1-\lambda)\bar{x}+\lambda x \in V$. Atunci

$$f(\bar{x}) \leq f(y) = f((1-\lambda)\bar{x} + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(x),$$

şi deci $\lambda f(\bar{x}) \leq \lambda f(x)$, absurd. Prin urmare $\bar{x}$ este punct de minim global pentru f.

(ii) Din ipoteză, există o vecinătate convexă şi simetrică a originii, notată U, astfel ca $f(\bar{x}+u) \leq f(\bar{x})$ pentru orice $u \in U$. Dacă $f(\bar{x}) = -\infty$ este clar că $\bar{x}$ este punct de minim global al lui f. Presupunem că $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ (şi deci f este proprie deoarece $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$). Avem că

$$f(\bar{x}) = f\left(\tfrac{1}{2}(\bar{x}+u) + \tfrac{1}{2}(\bar{x}-u)\right) \leq \tfrac{1}{2}f(\bar{x}+u) + \tfrac{1}{2}f(\bar{x}-u) \leq f(\bar{x}) \quad \forall\, u \in U.$$

Prin urmare $f(x) = f(\bar{x}) \geq f(\bar{x})$ pentru orice $x \in \bar{x} + U \in \mathcal{V}(\bar{x})$. Deci $\bar{x}$ este punct de minim global pentru f. ∎

Acest rezultat explică de ce în probleme de programare convexă se caută numai punctele de minim global.

În probleme practice, rezolvate numeric pe calculator, de cele mai multe ori nu se pot determina chiar soluţiile optime (deoarece se lucrează cu valori rotunjite). Un exemplu simplu în acest sens este problema minimizării funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := (x-\pi)^2$; nici un calculator nu va da soluţia exactă, π, a acestei probleme. Având în vedere acest fapt, este utilă noţiunea de soluţie aproximativă. Mai exact, dacă $\varepsilon \in [0,\infty[$, spunem că $\bar{x} \in C$ este *ε–soluţie (optimă)* a problemei (P) dacă $f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon$ pentru orice $x \in C$; notăm prin $S_\varepsilon(P)$ sau $S_\varepsilon(f,C)$ mulţimea ε–soluţiilor problemei (P). Este evident că dacă $C \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ atunci $S_\varepsilon(f,C) = S_\varepsilon(\tilde{f},X)$; în plus, dacă f este proprie şi $S_\varepsilon(f,C) \neq \emptyset$ atunci $v(f,C) \in \mathbb{R}$, iar $S_\varepsilon(f,C) = \{x \in C \mid f(x) \leq v(f,C) + \varepsilon\}$. Referitor la ε–soluţii are loc următorul rezultat.

Teorema 2.5.5 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie convexă şi proprie,* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ *şi* $\varepsilon \in]0,\infty[$*. Atunci* $S_\varepsilon(f,X)$ *este convexă, iar dacă* f *este mărginită inferior,* $S_\varepsilon(f,X)$ *este nevidă. În plus,* $\bar{x} \in S_\varepsilon(f,X)$ *dacă şi numai dacă* $0 \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$*.* ∎

2.6 Probleme perturbate

S-a dovedit deosebit de utilă, ceea ce vom vedea şi în paragrafele următoare, înglobarea problemei

$(P)\qquad \min\ f(x),\ x \in X$

într-o familie de probleme.

În cele ce urmează X, Y sunt spaţii normate (deşi, din nou, cele mai multe rezultate sunt valabile în spaţii local convexe separate), iar $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Considerăm o funcţie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că $f(x) = F(x, 0)$ pentru orice $x \in X$, numită *funcţie de perturbare.* Pentru fiecare $y \in Y$ considerăm problema

$(P_y)\qquad \min\ F(x, y),\ x \in X.$

Este evident că problema (P) coincide cu (P_0).

Pentru a nu ieşi din cadrul convex, presupunem că F este funcţie convexă şi proprie. Desigur, dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este convexă şi proprie, întotdeauna putem găsi o funcţie F cu proprietăţile cerute: $F(x, y) := f(x)$ pentru orice $(x, y) \in X \times Y$. Pentru a obţine rezultate utile vom alege funcţii de perturbare adecvate, ceea ce se va vedea în continuare.

Fie deci $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi

$$h : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h(y) := \inf_{x \in X} F(x, y) = v(P_y).$$

Funcţia h se numeşte *funcţia valoare* sau *marginală* asociată problemelor (P_y).

Are loc următorul rezultat.

Teorema 2.6.1 *Fie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă, proprie şi h funcţia marginală asociată lui F. Atunci h este convexă,* $\operatorname{dom} h = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F)$ *şi*

$$\begin{aligned} h(y) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X \ :\ F(x, y) \le t\} \\ &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (y, t) \in \operatorname{Pr}_{Y \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} F)\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $A := \operatorname{Pr}_{Y \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} F)$; deoarece $\operatorname{epi} F$ este mulţime convexă, iar $\operatorname{Pr}_{Y \times \mathbb{R}}$ este operator liniar, mulţimea A este convexă. Dorim să arătăm că $h = \varphi_A$; dacă reuşim acest lucru obţinem că

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} h &= \operatorname{Pr}_Y(A) = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{Pr}_{Y \times \mathbb{R}}(\operatorname{epi} F)) \\ &= \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{epi} F) = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{Pr}_{X \times Y}(\operatorname{epi} F)) \\ &= \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F), \end{aligned}$$

şi că h este convexă.

Fie deci $y \in Y$ şi $\tau \in I\!R$ astfel ca $\varphi_A(y) < \tau$; există $t \in I\!R$ astfel ca $(y,t) \in A$ şi $t < \tau$. Din definiţia lui A, există $x \in X$ astfel ca $(x,y,t) \in \operatorname{epi} F$. Prin urmare $h(y) \leq F(x,y) \leq t < \tau$. Cum $\tau > \varphi_A(y)$ este arbitrar, obţinem că $h(y) \leq \varphi_A(y)$. Fie acum $h(y) < \tau$. Din definiţia lui h, există $x \in X$ astfel ca $F(x,y) < \tau$. Atunci $(x,y,\tau) \in \operatorname{epi} F$, de unde obţinem că $(y,\tau) \in A$, şi deci $\varphi_A(y) \leq \tau$. Prin urmare avem şi $\varphi_A(y) \leq h(y)$. Am obţinut astfel că $h = \varphi_A$. Demonstraţia este completă. ∎

Din cele arătate mai sus avem că (a se vedea şi Secţiunea 1.1)

$$\mathrm{Pr}_{Y\times I\!R}(\operatorname{epi} F) \subset \operatorname{epi} h \subset \overline{\mathrm{Pr}_{Y\times I\!R}(\operatorname{epi} F)},$$

relaţie care se poate dovedi utilă în multe situaţii.

Problemei

$$(P) \qquad \min F(x,0),\ x \in X,$$

numită şi *problemă primală*, i se asociază în mod firesc (după ce avem un pic de experienţă) următoarea *problemă duală*

$$(D) \qquad \max\ (-F^*(0,y^*)),\ y^* \in Y^*.$$

Este evident că (D) este echivalentă cu problema de programare convexă

$$(D') \qquad \min F^*(0,y^*),\ y^* \in Y^*.$$

Echivalenţa este înţeleasă în sensul că problemele (D) şi (D') au aceleaşi $(\varepsilon-)$soluţii; în plus $v(D') = -v(D)$ (desigur, pentru o problemă de maximizare noţiunile de $(\varepsilon-)$soluţie, soluţie locală şi valoare se definesc în mod dual celor pentru probleme de minimizare). Este bine să observăm că (D') este de acelaşi tip cu (P). În rezultatul următor punem în evidenţă câteva proprietăţi ce leagă problemele (P), (D) şi funcţia h.

Teorema 2.6.2 *Fie $F : X \times Y \to \overline{I\!R}$ funcţie convexă şi proprie, iar h funcţia marginală asociată lui F. Atunci:*

(i) $h^*(y^*) = F^*(0,y^*)\ \ \forall\, y^* \in Y^*$;

(ii) $v(P) = h(0)$ *şi* $v(D) = h^{**}(0)$. *Prin urmare* $v(P) \geq v(D)$, *adică are loc* dualitate slabă;

(iii) *fie* $\bar{x} \in X$ *şi* $\bar{y}^* \in Y^*$. *Atunci* $(0,\bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x},0)$ *dacă şi numai dacă* $\bar{x}$ *este soluţie pentru* (P), $\bar{y}^*$ *este soluţie pentru* (D) *şi* $v(P) = v(D) \in I\!R$;

(iv) $h(0) \in I\!R$ *şi* h *este i.s.c. în* $0 \ \Leftrightarrow\ v(P) = v(D) \in I\!R$, *adică are loc* dualitate tare;

(v) *$h(0) \in \mathbb{R}$ şi $\partial h(0) \neq \emptyset$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$ şi (D) are soluţii optime. În această situaţie $S(D) = \partial h(0)$.*

(vi) *[$\bar{h}$ este proprie] $\Leftrightarrow$ [h^* este proprie] $\Leftrightarrow$ [h este minorată de o funcţională afină continuă] $\Leftrightarrow$*

$$\exists\, \bar{y}^* \in Y^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, (x,y) \in X \times Y\ :\ F(x,y) \geq \langle y, \bar{y}^* \rangle + \alpha. \tag{2.33}$$

Demonstraţie. (i) Avem că

$$\begin{aligned} h^*(y^*) &= \sup_{y\in Y}(\langle y, y^*\rangle - h(y)\,) = \sup_{y\in Y}\left(\langle y, y^*\rangle - \inf_{x\in X} F(x,y)\right) \\ &= \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X}(\langle y, y^*\rangle - F(x,y)\,) = \sup_{(x,y)\in X\times Y}(\langle x, 0\rangle + \langle y, y^*\rangle - F(x,y)\,) \\ &= F^*(0, y^*). \end{aligned}$$

(ii) Este evident că $v(P) = h(0)$, iar

$$v(D) = \sup_{y^*\in Y^*}(-F^*(0,y^*)\,) = \sup_{y^*\in Y^*}(\langle 0, y^*\rangle - h^*(y^*) = h^{**}(0).$$

Deci $v(P) \geq v(D)$.

(iii) Dacă $(0, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, 0)$ atunci

$$v(P) = h(0) \leq F(\bar{x}, 0) = -F^*(0, \bar{y}^*) \leq v(D) = h^{**}(0) \leq h(0);$$

deci $\bar{x}$ este soluţie pentru (P), $\bar{y}^*$ este soluţie pentru (D) şi $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$. Invers, dacă această ultimă afirmaţie are loc atunci

$$-F^*(0, \bar{y}^*) = h^{**}(0) = h(0) = F(\bar{x}, 0) \in \mathbb{R},$$

şi deci

$$(\bar{x}, 0) \in \operatorname{dom} F \text{ şi } F(\bar{x}, 0) + F^*(0, \bar{y}^*) = \langle \bar{x}, 0\rangle + \langle 0, \bar{y}^*\rangle,$$

ceea ce arată că $(0, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, 0)$.

(iv) Dacă h este i.s.c. în 0 şi $h(0) \in \mathbb{R}$ atunci $\bar{h}(0) \in \mathbb{R}$, şi deci $h^{**} = \bar{h}$. Prin urmare $v(D) = h^{**}(0) = h(0) = v(P) \in \mathbb{R}$. Invers, dacă această ultimă relaţie are loc atunci avem că $\bar{h}(0) = h(0)$, adică h este i.s.c. în 0. Concluzia are loc.

(v) Presupunem că $h(0) \in \mathbb{R}$ şi $\partial h(0) \neq \emptyset$; atunci h este i.s.c. în 0, iar din (iv) avem că $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$. Fie $\bar{y}^* \in \partial h(0)$. Atunci $h(0) + h^*(\bar{y}^*) = 0$, şi deci

$$v(D) = v(P) = h(0) = -h^*(\bar{y}^*) = -F^*(0, \bar{y}^*) \geq -F^*(0, y^*) \quad \forall\, y^* \in Y^*.$$

Prin urmare $\emptyset \neq \partial h(0) \subset S(D)$. Invers, presupunem că $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$ şi (D) are soluţii. Fie $\bar{y}^* \in S(D)$. Atunci $h(0) = h^{**}(0) = -h^*(\bar{y}^*) \in \mathbb{R}$, şi deci $\bar{y}^* \in \partial h(0)$. Am obţinut astfel că $\emptyset \neq S(D) \subset \partial h(0)$.

(vi) Echivalenţele menţionate sunt evidente deoarece $\bar{h}$ este convexă, iar $\operatorname{dom} \bar{h} \neq \emptyset$. ∎

Spunem că problema (P) este *normală* dacă $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$, iar (P) este *stabilă* dacă $v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$ şi (D) are soluţii optime. Teorema 2.6.2 furnizează caracterizări ale acestor noţiuni.

În rezultatul următor punem în evidenţă formule pentru $\partial_\varepsilon h(y)$ şi $\partial_\varepsilon h^*(y^*)$ în cazul în care h este proprie.

Teorema 2.6.3 *Fie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă proprie satisfăcând condiţia (2.33) şi $\varepsilon \in [0, \infty[$. Atunci*

(i) *pentru orice $y \in \operatorname{dom} h$,*

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon h(y) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} \bigcup\nolimits_{x\in X} \{y^* \mid (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\} \\ &= \bigcap_{\eta>0} \bigcap_{F(x,y)\le h(y)+\eta} \{y^* \mid (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\},\end{aligned}$$

(ii) *iar pentru orice $y^* \in \operatorname{dom} h^*$,*

$$\partial_\varepsilon h^*(y^*) = \bigcap\nolimits_{\eta>0} \operatorname{cl} \{y \in Y \mid \exists\, x \in X \ : \ (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\}.$$

Demonstraţie. Este evident că

$$\begin{aligned}&\bigcap_{\eta>0} \bigcap_{F(x,y)\le h(y)+\eta} \{y^* \mid (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\} \\ &\qquad \subset \bigcap\nolimits_{\eta>0} \bigcup\nolimits_{x\in X} \{y^* \mid (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\} \\ &\qquad \subset \partial_\varepsilon h(y).\end{aligned}$$

Fie $y^* \in \partial_\varepsilon h(y)$, adică $h(y) + h^*(y^*) \le \langle y, y^*\rangle + \varepsilon$, $\eta > 0$, şi $x \in X$ astfel ca $F(x, y) \le h(y) + \eta$. Atunci

$$F(x, y) + F^*(0, y^*) \le h(y) + \eta + h^*(y^*) \le \langle y, y^*\rangle + \varepsilon + \eta,$$

adică $(0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)$. Obţinem astfel că

$$\partial_\varepsilon h(y) \subset \bigcap_{\eta>0} \bigcap_{F(x,y)\le h(y)+\eta} \{y^* \mid (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\},$$

şi deci au loc egalităţile dorite.

(ii) Fie $y \in \partial_\varepsilon h^*(y^*)$ şi $\eta > 0$. Atunci

$$h^{**}(y) + h^*(y^*) = \bar{h}(y) + h^*(y^*) \leq \langle y, y^* \rangle + \varepsilon.$$

Utilizând Teorema 1.1.16, pentru orice $V \in \mathcal{V}(y)$ există $y_V \in Y$ astfel ca

$$h(y_V) + h^*(y^*) < \langle y_V, y^* \rangle + \varepsilon + \eta.$$

Definiţia lui h ne furnizează $x_V \in X$ astfel ca

$$F(x_V, y_V) + h^*(y^*) = F(x_V, y_V) + F^*(0, y^*) < \langle y_V, y^* \rangle + \varepsilon + \eta,$$

adică $(0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x_V, y_V)$. Prin urmare

$$y \in \operatorname{cl} \{v \in Y \mid \exists\, x \in X \ : \ (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, v)\}.$$

Deoarece $\eta > 0$ est arbitrar, obţinem că

$$\partial_\varepsilon h^*(y^*) \subset \bigcap\nolimits_{\eta>0} \operatorname{cl} \{y \mid \ \exists\, x \ : \ (0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, y)\}.$$

Fie y în ultima mulţime şi $\eta > 0$. Atunci, din continuitatea lui y^*, există $V_0 \in \mathcal{V}(y)$ astfel ca $\langle v, y^* \rangle < \langle y, y^* \rangle + \eta/2$ pentru orice $v \in V_0$. Pe de altă parte, pentru orice $V \in \mathcal{V}(y)$ există $(x_V, y_V) \in X \times Y$ astfel ca $y_V \in V \cap V_0$ şi $(0, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta/2} F(x_V, y_V)$, de unde

$$h(y_V) + h^*(y^*) \leq F(x_V, y_V) + F^*(0, y^*) \leq \langle y_V, y^* \rangle + \varepsilon + \eta/2 < \langle y, y^* \rangle + \varepsilon + \eta.$$

Prin urmare

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(y) \ : \ \inf_{v \in V} h(v) + h^*(y^*) \leq \langle y, y^* \rangle + \varepsilon + \eta,$$

adică $\bar{h}(y) + h^*(y^*) \leq \langle y, y^* \rangle + \varepsilon + \eta$. Deoarece $\eta > 0$ este arbitrar, obţinem că

$$h^{**}(y) + h^*(y^*) = \bar{h}(y) + h^*(y^*) \leq \langle y, y^* \rangle + \varepsilon,$$

adică $y \in \partial_\varepsilon h^*(y^*)$. ∎

După cum se vede din demonstraţie, n-am folosit faptul că X, Y sunt spaţii normate; această observaţie este utilă în stabilirea rezultatului următor.

Teorema 2.6.4 *Fie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie, inferior semicontinuă şi $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi(x) := F(x, 0)$. Atunci pentru $\varepsilon \in [0, \infty[$ şi $x \in \operatorname{dom} \varphi$ avem*

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \varphi(x) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–}\operatorname{cl} \{x^* \in X^* \mid \exists\, y^* \in Y^* \ : \ (x^*, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, 0)\} \\ &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–}\operatorname{cl} \{x^* \in X^* \mid \exists\, y^* \in Y^* \ : \ (x, 0) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F^*(x^*, y^*)\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Considerăm spaţiile X^* şi Y^* înzestrate cu topologiile slab-stelate. Fie

$$k : X^* \to \overline{\mathbb{R}}, \quad k(x^*) := \inf_{y^* \in Y^*} F^*(x^*, y^*)$$

Atunci $k^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$, şi $k^*(x) = F^{**}(x, 0) = F(x, 0) = \varphi(x)$. Utilizând Teorema 2.6.3, avem că

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \varphi(x) = \partial_\varepsilon k^*(x) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–cl}\,\{x^* \mid \exists\, y^* \,:\, (x, 0) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F^*(x^*, y^*)\} \\ &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–cl}\,\{x^* \mid \exists\, y^* \,:\, (x^*, y^*) \in \partial_{\varepsilon+\eta} F(x, 0)\}\,. \end{aligned}$$ ▮

Aplicăm rezultatele din Teoremele 2.6.3 şi 2.6.4 în câteva situaţii uzuale. Concluzii mai puternice, dar în condiţii mai restrictive, vom obţine în secţiunea următoare.

Consecinţa 2.6.1 *Fie $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă astfel că*

$$\exists\, \bar{y}^* \in Y^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X \ :\ f(x) \geq \langle x, A^* \bar{y}^* \rangle + \alpha.$$

Dacă $(Af)(y) \in \mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow$ $y \in A(\operatorname{dom} f) = \operatorname{dom} Af$), $y^* \in \operatorname{dom}(f^* \circ A^*)$ *şi* $\varepsilon \geq 0$, *atunci*

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon (Af)(y) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} \bigcup\nolimits_{Ax=y} A^{*-1}(\partial_{\varepsilon+\eta} f(x)) \\ &= \bigcap_{\eta>0} \ \bigcap_{Ax=y, f(x)\leq (Af)(y)+\eta} A^{*-1}(\partial_{\varepsilon+\eta} f(x)), \\ \partial_\varepsilon (f^* \circ A^*)(y^*) &= \bigcap_{\eta>0} \operatorname{cl}\{y \in Y \mid \ \exists\, x \in X \ :\ Ax = y,\ A^* y^* \in \partial_{\varepsilon+\eta} f(x)\}\,. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Considerăm

$$F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x, y) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \ \ Ax = y, \\ \infty & \text{dacă} \ \ Ax \neq y. \end{cases}$$

Atunci

$$F^*(x^*, y^*) = f^*(x^* + A^* y^*) \text{ şi } [(0, y^*) \in \partial_\eta F(x, y) \ \Leftrightarrow\ Ax = y,\ A^* y^* \in \partial_\eta f(x)].$$

Rezultatul se obţine imediat din Teorema 2.6.3. ▮

Consecinţa 2.6.2 *Fie $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi inferior semicontinuă. Atunci pentru orice $x \in A^{-1}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{dom}(f \circ A)$ şi $\varepsilon \geq 0$,*

$$\partial_\varepsilon (f \circ A)(x) = \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–cl}\, A^* \left(\partial_{\varepsilon+\eta} f(Ax)\right).$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x,y) := f(Ax+y)$, şi $\varphi(x) := F(x,0) = f(Ax)$. Avem că $F^*(x^*,y^*) = f^*(y^*)$ dacă $A^*y^* = x^*$ şi $F^*(x^*,y^*) = \infty$ în caz contrar. În plus

$$\begin{aligned}(x^*,y^*) \in \partial_\eta F(x,0) \quad &\Leftrightarrow \quad A^*y^* = x^* \text{ şi } f(Ax) + f^*(y^*) \le \langle Ax, y^*\rangle + \eta \\ &\Leftrightarrow \quad A^*y^* = x^* \text{ şi } y^* \in \partial_\eta f(Ax).\end{aligned}$$

Concluzia rezultă din Teorema 2.6.4. ▮

Consecinţa 2.6.3 *Fie f_1, $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe, proprii, astfel că*

$$\exists\, x^* \in X^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X,\ \forall\, i \in \{1,2\} \ :\ f_i(x) \ge \langle x, x^*\rangle + \alpha.$$

Dacă $(f_1 \square f_2)(x) \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon \ge 0$ atunci

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon(f_1\square f_2)(x) &= \bigcap_{\eta>0} \ \bigcup_{y\in X,\varepsilon_i\ge 0,\varepsilon+\eta=\varepsilon_1+\varepsilon_2} [\partial_{\varepsilon_1} f_1(x-y) \cap \partial_{\varepsilon_2} f_2(y)] \\ &= \bigcap_{\eta>0} \ \bigcap_{y\in S_\eta(x)} \ \bigcup_{\varepsilon_i\ge 0,\varepsilon+\eta=\varepsilon_1+\varepsilon_2} [\partial_{\varepsilon_1} f_1(x-y) \cap \partial_{\varepsilon_2} f_2(y)], \\ \partial(f_1\square f_2)(x) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} \bigcup\nolimits_{y\in X} [\partial_\eta f_1(x-y) \cap \partial_\eta f_2(y)],\end{aligned}$$

unde $S_\eta(x) := \{y \in X \mid f_1(x-y) + f_2(y) \le (f_1\square f_2)(x) + \eta\}$.

Demonstraţie. Considerăm $f : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x_1,x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$, şi $A \in \mathcal{L}(X\times X, X)$, $A(x_1,x_2) := x_1 + x_2$. Concluzia rezultă din Consecinţa 2.6.1. ▮

Consecinţa 2.6.4 *Fie f_1, $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe, proprii şi inferior semicontinue. Dacă $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$ şi $\varepsilon \ge 0$ atunci*

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon(f_1+f_2)(x) &= \bigcap_{\eta>0} w^*\text{–cl}\left(\bigcup_{\varepsilon_i\ge 0,\varepsilon+\eta=\varepsilon_1+\varepsilon_2} [\partial_{\varepsilon_1} f_1(x) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x)]\right), \\ \partial(f_1+f_2)(x) &= \bigcap\nolimits_{\eta>0} w^*\text{–cl}\,[\partial_\eta f_1(x) + \partial_\eta f_2(y)].\end{aligned}$$

Demonstraţie. Considerăm $f : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x_1,x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$, şi $A \in \mathcal{L}(X, X\times X)$, $Ax := (x,x)$. Concluzia rezultă din Consecinţa 2.6.2. ▮

Rezultatul următor este deosebit de util pentru obţinerea unor rezultate importante în programarea convexă.

Teorema 2.6.5 *Fie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ convexă şi proprie. Considerăm mulţimea $Y_0 := \operatorname{lin}(\operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F))$. Presupunem că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{Y_0}(0),\ \exists\, \theta : V_0 \to X,\ \exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in V_0\ :\ F(\theta(y), y) \le M$*;*

(i') $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{Y_0}(0),\ \exists\, \theta : V_0 \to X$ *mărginită,* $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in V_0\ :\ F(\theta(y), y) \le M$*;*

(ii) *există $(x_0, 0) \in \operatorname{dom} F$ astfel că $F(x_0, \cdot)$ este continuă în 0;*

(iii) *X, Y sunt spaţii Banach, F este inferior semicontinuă, Y_0 este mulţime închisă şi $0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F))$;*

(iv) $\dim Y < \infty$ *şi* $0 \in \operatorname{raint}(\operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F))$.

Atunci fie $h(0) = -\infty$, fie $h(0) \in \mathbb{R}$ şi $h|_{Y_0}$ este continuă în 0; prin urmare

$$\inf_{x \in X} F(x, 0) = \max_{y^* \in Y^*} (-F^*(0, y^*)). \tag{2.34}$$

În plus, $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă există $\bar{y}^* \in Y^*$ astfel că $(0, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, 0)$.

Demonstraţie. Cu notaţiile de mai înainte, să observăm că fiecare din cele patru condiţii asigură faptul că $h(0) < \infty$, adică $0 \in \operatorname{dom} h = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F)$. Dacă $h(0) = -\infty$ atunci $h^*(y^*) = \infty$ pentru orice $y^* \in Y^*$; deci pentru orice $y^* \in Y^*$, $-F^*(0, y^*) = -\infty = h(0)$. Prin urmare concluzia are loc în acest caz; desigur, în această situaţie (P) nu are soluţii. Considerăm acum cazul $h(0) \in \mathbb{R}$.

Presupunem că este îndeplinită condiţia (i). Atunci

$$h(y) \le F(\theta(y), y) \le M \quad \forall\, y \in V_0,$$

şi deci $h|_{Y_0}$ este majorată de M pe V_0. Cum h este convexă, $h|_{Y_0}$ este continuă în 0. Din Teorema 2.4.5, $\partial h(0) \ne \emptyset$. Relaţia (2.34) rezultă din punctul (v) al Teoremei 2.6.2.

Este evident că implicaţia (i') $\Rightarrow$ (i) are loc.

Presupunem că (ii) are loc. Pentru $M := F(x_0, 0) + 1$, există $V_0 \in \mathcal{V}_Y(0)$ astfel ca $F(x_0, y) \le M$ pentru orice $y \in V_0$. Luând $\theta : V_0 \to X,\ \theta(y) := x_0$, are loc (i'). Deci concluzia are loc.

Presupunem acum că (iii) este îndeplinită. Considerăm relaţia

$$\mathcal{R} := \{(x, t, y) \mid (x, y, t) \in \operatorname{epi} F\} \subset (X \times \mathbb{R}) \times Y_0.$$

Este evident că în ipoteza noastră $\mathcal{R}$ este relaţie convexă şi închisă. Cum $\operatorname{Im} \mathcal{R} = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F) \cap Y_0 = \operatorname{Pr}_Y(\operatorname{dom} F)$, avem că $0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{Im} \mathcal{R})$. Deoarece

Y_0 este un subspaţiu închis al unui spaţiu Banach, este la rândul său un spaţiu Banach. Prin urmare sunt îndeplinite condiţiile din Teorema Robinson-Ursescu. Fie $(x_0, t_0) \in X \times \mathbb{R}$ astfel ca $(x_0, t_0, 0) \in \mathcal{R}$. Atunci

$$V_0 := \mathcal{R}(B(x_0, 1) \times]-\infty, t_0 + 1[) \in \mathcal{V}_{Y_0}(0).$$

Deci

$$\forall\, y \in V_0,\ \exists\, x \in B(x_0, 1),\ \exists\, t < t_0 + 1\ :\ F(x, y) \leq t < M := t_0 + 1,$$

adică există $\theta : V_0 \to B(x_0, 1) \subset X$ astfel ca $F(\theta(y), y) \leq M$ pentru orice $y \in V_0$. Deci din nou (i') are loc.

Dacă (iv) are loc, concluzia rezultă din Teorema 2.2.9 şi Teorema 2.4.5.

Dacă $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) atunci $F(\bar{x}, 0) = v(P) = v(D) \in \mathbb{R}$. Fie $\bar{y}^*$ o soluţie a problemei (D) (în condiţiile noastre o astfel de soluţie există). Atunci, conform punctului (iii) al Teoremei 2.6.2, $(0, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, 0)$. Implicaţia inversă rezultă din acelaşi rezultat. ∎

Să observăm că dacă F satisface (i') atunci pentru orice $x^* \in X^*$, funcţia $\widetilde{F} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\widetilde{F}(x, y) := F(x, y) - \langle x, x^* \rangle$, satisface (i), ceea ce nu este adevărat dacă F satisface numai (i).

Consecinţa 2.6.5 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă proprie şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Considerăm $Y_0 := \operatorname{aff}(A(\operatorname{dom} f))$. Presupunem că una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

(i) *f este continuă pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, presupus nevid, şi A este aplicaţie deschisă;*

(ii) *X şi Y sunt spaţii Banach, f este funcţie i.s.c., Y_0 este mulţime închisă, iar $\operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f)) \neq \emptyset$;*

(iii) $\dim Y < \infty$.

Atunci fie Af este $-\infty$ pe $\operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f))$, fie Af este proprie şi $(Af)|_{Y_0}$ este continuă pe $\operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f))$. În plus

$$(Af)(y) = \max\{\langle y, y^* \rangle - f^*(A^*(y^*)) \mid y^* \in Y^*\} \quad \forall\, y \in \operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f)).$$

Demonstraţie. Considerăm $y_0 \in \operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f))$ şi

$$F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x, y) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad Ax = y_0 + y, \\ \infty & \text{dacă} \quad Ax \neq y_0 + y. \end{cases}$$

Dacă condiţia (ii) sau (iii) este îndeplinită atunci F satisface condiţia (iii), respectiv (iv) din Teorema 2.6.5. Presupunem că este îndeplinită condiţia (i).

Este clar că este imposibil să fie satisfăcută condiţia (ii) din teorema precedentă în acest caz ($F(x_0,\cdot) = I_{\{Ax_0\}}$!). Deoarece A este deschisă, avem că $\operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f)) = \operatorname{int}(A(\operatorname{dom} f)) = A(\operatorname{int}(\operatorname{dom} f))$ (exerciţiu !), şi deci $y_0 = Ax_0$ pentru un $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Rezultă că f este majorată pe o vecinătate V_0 a lui x_0, şi deci h este majorată de aceeaşi constantă pe $A(V_0)-y_0$ care este vecinătate a lui 0. Deci este satisfăcută condiţia (i) din teorema precedentă. Prin urmare în fiecare din cele trei situaţii avem că

$$(Af)(y_0) = \inf_{x\in X} F(x,0) = \max_{y^*\in Y^*}(-F^*(0,y^*)) = \max_{y^*\in Y^*}(\langle y_0,y^*\rangle - f^*(A^*y^*)),$$

făcând un calcul similar celui de la punctul (viii) al Teoremei 2.3.1. ∎

Să observăm că în condiţia (i) din consecinţa precedentă se poate înlocui ipoteza că A este deschisă prin ipoteza că A este relativ deschisă, adică $A(D)$ este deschisă în $\operatorname{Im} A$ pentru orice mulţime deschisă $D \subset X$.

Consecinţa 2.6.6 *Fie $f_1,\ldots,f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe şi proprii, iar $f := f_1\Box\cdots\Box f_n$. Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *f_1 este continuă într-un punct $x_1 \in \operatorname{dom} f_1$,*

(ii) *X este spaţiu Banach, funcţiile $f_1,\ldots,f_n$ sunt i.s.c., $X_0 := \operatorname{aff}(\operatorname{dom} f)$ este mulţime închisă şi $\operatorname{raint}(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$,*

(iii) $\dim X < \infty$.

Atunci, fie f este $-\infty$ pe $\operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$, fie $f|_{X_0}$ este continuă pe $\operatorname{raint}(\operatorname{dom} f)$, şi deci subdiferenţiabilă pe această mulţime. În plus

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{x^*\in X^*}(\langle x,x^*\rangle - f_1^*(x^*) - \cdots - f_n^*(x^*)) \\ &= (f_1^* + \cdots + f_n^*)^*(x) \quad \forall\, x \in \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f). \end{aligned}$$

Demonstraţie. Reamintim că $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f_1 + \cdots + \operatorname{dom} f_n$. În cazurile (ii) şi (iii) rezultatul este consecinţă imediată a Consecinţei 2.6.5, luând F şi A ca în Consecinţa 2.4.3, iar în cazul (i) se face inducţie după n. ∎

Pentru a uşura formularea unor rezultate prezentate în continuare, introducem urmă-toarea notaţie:

$$\operatorname{ric} A := \begin{cases} \operatorname{raint} A & \text{dacă } \operatorname{aff} A \text{ este mulţime închisă,} \\ \emptyset & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

unde $A \subset X$ este mulţime nevidă.

2.7 Formule de calcul pentru conjugate, ε–subdiferenţiale, formule de dualitate şi condiţii de optimalitate

În secţiunile precedente am întâlnit unele situaţii în care este uşor de calculat conjugate şi ε–subdiferenţiale: sume de funcţii cu variabile separate, convoluţia unei familii de funcţii convexe şi funcţii de tipul Af. Pentru alte tipuri de funcţii, în general, este mai dificil de calculat funcţiile conjugate şi ε–subdiferenţialele. În acest paragraf dorim să punem în evidenţă condiţii suficiente, cât mai generale, care să asigure valabilitatea unor astfel de formule. Şi în acest paragraf spaţiile considerate vor fi spaţii normate, deşi, din nou, foarte multe rezultate se pot obţine în spaţii local convexe separate.

Un prim rezultat în sensul indicat mai înainte este dat de următoarea teoremă.

Teorema 2.7.1 *Fie $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $\varepsilon \in [0,\infty[$. Considerăm funcţia $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi(x) := F(x,Ax)$. Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există $\lambda,\ \rho,\ r \in]0,\infty[$ astfel ca*

$$\{0\} \times \rho B_Y \subset \{(x,Ax) \mid x \in rB_X\} - \operatorname{niv}_\lambda F,$$

(ii) *există $x_0 \in X$ astfel ca $(x_0, Ax_0) \in \operatorname{dom} F$ şi $F(x_0,\cdot)$ este continuă în Ax_0,*

(iii) *X, Y sunt spaţii Banach, $0 \in \operatorname{ric}\{Ax - y \mid (x,y) \in \operatorname{dom} F\}$ şi F este inferior semicontinuă,*

(iv) *$\dim Y < \infty$ şi $0 \in \operatorname{raint}\{Ax - y \mid (x,y) \in \operatorname{dom} F\}$.*

Atunci

$$\varphi^*(x^*) = \min\{F^*(x^* - A^*y^*, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad \forall\, x^* \in X^*, \tag{2.35}$$
$$\partial_\varepsilon\varphi(x) = \{A^*y^* + x^* \mid (x^*,y^*) \in \partial_\varepsilon F(x,Ax)\} \quad \forall\, x \in \operatorname{dom}\varphi. \tag{2.36}$$

Demonstraţie. Este uşor de verificat că

$$\varphi^*(x^*) \le \inf\{F^*(x^* - A^*y^*, y^*) \mid y^* \in Y^*\} \quad \forall\, x^* \in X^*$$

pentru orice funcţie F şi $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Fie $x^* \in X^*$ fixat. Avem că

$$-\varphi^*(x^*) = \inf\{F(x,Ax) - \langle x, x^*\rangle \mid x \in X\} = \inf\left\{\tilde{F}(x,0) \;\middle|\; x \in X\right\},$$

unde $\tilde{F}(x,y) := F(x, Ax - y) - \langle x, x^* \rangle$. Presupunem că una din condiţiile (i), (ii), (iii) sau (iv) este îndeplinită; atunci funcţia $\tilde{F}$ satisface, în mod evident, condiţia (i), (ii), (iii) respectiv (iv) a Teoremei 2.6.5. Utilizând acea teoremă, obţinem că

$$-\varphi^*(x^*) = \inf\left\{ \tilde{F}(x,0) \;\Big|\; x \in X \right\} = \max\left\{ -\tilde{F}^*(0,-y^*) \;\Big|\; y^* \in Y^* \right\}. \qquad (2.37)$$

Dar

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^*(0,-y^*) &= \sup\{\langle x, x^*\rangle + \langle y, -y^*\rangle - F(x, Ax - y) \mid (x,y) \in X \times Y\} \\
&= \sup\{\langle x, x^*\rangle + \langle v - Ax, y^*\rangle - F(x, v) \mid (x,v) \in X \times Y\} \\
&= \sup\{\langle x, x^* - A^*y^*\rangle + \langle v, y^*\rangle - F(x, v) \mid (x,v) \in X \times Y\} \\
&= F^*(x^* - A^*y^*, y^*).
\end{aligned}$$

Din (2.37) se obţine imediat (2.35).

Să observăm că incluziunea "$\supset$" din (2.36) are loc pentru orice funcţie F şi $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Fie deci $x \in \operatorname{dom}\varphi$ şi $x^* \in \partial_\varepsilon \varphi(x)$. Atunci

$$\varphi(x) + \varphi^*(x^*) \le \langle x, x^* \rangle + \varepsilon.$$

Din (2.35) există $y^* \in Y^*$ astfel ca $\varphi^*(x^*) = F^*(x^* - A^*y^*, y^*)$, şi deci

$$F(x, Ax) + F^*(x^* - A^*y^*, y^*) \le \langle x, x^* - A^*y^* \rangle + \langle Ax, y^* \rangle + \varepsilon,$$

adică $(x^* - A^*y^*, y^*) =: (\bar{x}^*, \bar{y}^*) \in \partial_\varepsilon F(x, Ax)$. Prin urmare $x^* = \bar{x}^* + A^*\bar{y}^*$, ceea ce arată că are loc şi incluziunea "$\subset$" din (2.36). ▮

Consecinţa 2.7.1 *În condiţiile Teoremei 2.7.1 are loc relaţia*

$$\inf_{x \in X} F(x, Ax) = \max_{y^* \in Y^*} (-F^*(-A^*y^*, y^*)). \qquad (2.38)$$

În plus, $\bar{x}$ este punct de minim pentru φ dacă şi numai dacă există $\bar{y}^* \in Y^*$ astfel ca $(-A^*\bar{y}^*, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, A\bar{x})$.

Demonstraţie. Relaţia (2.38) se obţine din (2.35) pentru $x^* = 0$. În plus, avem că $\bar{x}$ este punct de minim pentru φ dacă şi numai dacă $0 \in \partial\varphi(\bar{x})$, adică, din (2.36), există $(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \in \partial F(\bar{x}, A\bar{x})$ astfel ca $0 = \bar{x}^* + A^*\bar{y}^*$. Deci concluzia are loc. ▮

Să observăm că rezultatul din Consecinţa 2.7.1 poate fi folosit pentru a obţine relaţia (2.35), şi deci Teorema 2.7.1.

O consecinţă imediată a Teoremei 2.7.1 este

Teorema 2.7.2 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *două funcţii convexe şi proprii,* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *şi* $\varepsilon \in [0,\infty[$. *Considerăm funcţia*

$$\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi(x) := f(x) + g(Ax);$$

este evident că $\operatorname{dom}\varphi = \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$. *Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există* $\lambda,\ \rho,\ r \in]0,\infty[$ *astfel ca*

$$\rho B_Y \subset A(rB_X \cap \operatorname{niv}_\lambda f) - \operatorname{niv}_\lambda g,$$

(ii) *există* $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap A^{-1}(\operatorname{dom} g)$ *astfel că* g *este continuă în* Ax_0,

(iii) X, Y *sunt spaţii Banach,* f, g *sunt i.s.c. şi* $0 \in \operatorname{ric}(A(\operatorname{dom} f) - \operatorname{dom} g)$,

(iv) $\dim Y < \infty$ *şi* $0 \in \operatorname{raint}(A(\operatorname{dom} f) - \operatorname{dom} g)$.

Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ *şi* $x \in \operatorname{dom}\varphi$,

$$\begin{aligned} \varphi^*(x^*) &= \min\{f^*(x^* - A^*y^*) + g^*(y^*) \mid y^* \in Y^*\}, \\ \partial_\varepsilon\varphi(x) &= \bigcup\{\partial_{\varepsilon_1} f(x) + \partial_{\varepsilon_2} g(Ax) \mid \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ge 0,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon\}, \\ \partial\varphi(x) &= \partial f(x) + A^*(\partial g(Ax)). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Demonstraţie. Aplicăm Teorema 2.7.1 pentru operatorul A şi funcţia $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x,y) = f(x) + g(y)$. ▮

Utilizând acest rezultat obţinem o formulă utilă pentru calculul conurilor normale.

Consecinţa 2.7.2 *Fie* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *şi mulţimile convexe* $L \subset X$, $M \subset Y$. *Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există* $x_0 \in L$ *astfel că* $Ax_0 \in \operatorname{int} M$,

(ii) X, Y *sunt spaţii Banach,* L, M *sunt închise şi* $0 \in \operatorname{ric}(A(L) - M)$,

(iii) $\dim Y < \infty$ *şi* $0 \in \operatorname{raint}(A(L) - M)$.

Atunci

$$N\left(L \cap A^{-1}(M), x\right) = N(L,x) + A^*(N(M,Ax)) \quad \forall\, x \in L \cap A^{-1}(M). \tag{2.40}$$

Demonstraţie. Utilizând teorema precedentă pentru $f := I_L$, $g := I_M$ şi A, formula (2.40) rezultă din (2.39). ▮

Formula (2.41) pusă în evidenţă în consecinţa următoare se întâlneşte în literatură sub numele de *formula de dualitate Fenchel-Rockafellar.*

Consecinţa 2.7.3 *În condiţiile Teoremei 2.7.2 are loc relaţia*

$$\inf_{x\in X}(f(x)+g(Ax)) = \max_{y^*\in Y^*}(-f^*(-A^*y^*)-g^*(y^*)). \tag{2.41}$$

În plus, $\bar{x}$ *este punct de minim pentru* $f+g\circ A$ *dacă şi numai dacă există* $\bar{y}^*\in Y^*$ *astfel ca* $-A^*\bar{y}^*\in\partial f(\bar{x})$ *şi* $\bar{y}^*\in\partial g(A\bar{x})$.

Demonstraţie. Se procedează ca în demonstraţia Consecinţei 2.7.1, sau se aplică această Consecinţă. ∎

Două cazuri particulare ale Teoremei 2.7.2 sunt importante în aplicaţii.

Teorema 2.7.3 *Fie funcţiile convexe proprii* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $\varepsilon \in [0,\infty[$. *Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există* $\lambda,\ \rho,\ r \in]0,\infty[$ *astfel ca*

$$\rho B_X \subset \mathrm{niv}_\lambda f \cap rB_X - \mathrm{niv}_\lambda g,$$

(ii) *există* $x_0 \in \mathrm{dom}\, f\cap \mathrm{dom}\, g$ *astfel că* f *este continuă în* x_0,

(iii) X *este spaţiu Banach,* $f,\ g$ *sunt i.s.c. şi* $0\in \mathrm{ric}\,(\mathrm{dom}\, f-\mathrm{dom}\, g)$,

(iv) $\dim X<\infty$ *şi* $0\in \mathrm{raint}\,(\mathrm{dom}\, f-\mathrm{dom}\, g)$.

Atunci, pentru orice $x^*\in X^*$ *şi* $x\in \mathrm{dom}\, f\cap\mathrm{dom}\, g$,

$$(f+g)^*(x^*) = \min\{f^*(x^*-y^*)+g^*(y^*) \mid y^*\in X^*\} = (f^*\Box g^*)(x^*), \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon(f+g)(x) &= \bigcup\{\partial_{\varepsilon_1}f(x)+\partial_{\varepsilon_2}g(x) \mid \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ge 0,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon\},\\
\partial(f+g)(x) &= \partial f(x)+\partial g(x).
\end{aligned}$$ ∎

Teorema 2.7.4 *Fie* $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţie convexe proprie,* $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ *şi* $\varepsilon\in[0,\infty[$. *Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există* $\lambda,\ \rho,\ r \in]0,\infty[$ *astfel ca*

$$\rho B_Y \subset A(rB_X) - \mathrm{niv}_\lambda g,$$

(ii) *există* $x_0\in A^{-1}(\mathrm{dom}\, g)$ *astfel că* g *este continuă în* Ax_0,

(iii) X, Y *sunt spaţii Banach,* g *este i.s.c. şi* $0\in\mathrm{ric}\,(\mathrm{Im}\, A-\mathrm{dom}\, g)$,

(iv) $\dim Y<\infty$ *şi* $0\in\mathrm{raint}\,(\mathrm{Im}\, A-\mathrm{dom}\, g)$.

Atunci

$$\begin{aligned}
(g\circ A)^*(x^*) &= \min\{g^*(y^*) \mid A^*y^*=x^*\} \quad \forall\, x^*\in X^*,\\
\partial_\varepsilon(g\circ A)(x) &= A^*(\partial_\varepsilon g(Ax)) \quad \forall\, x\in A^{-1}(\mathrm{dom}\, g).
\end{aligned}$$ ∎

Un alt rezultat important, care cuprinde rezultatul precedent, este

Teorema 2.7.5 *Fie $Q \subset Y$ un con convex, $H : X \to (Y^\bullet, Q)$ un operator Q–convex, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi Q–crescătoare, iar $\varepsilon \in [0, \infty[$. Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există $x_0 \in H^{-1}(\operatorname{dom} g)$ astfel că g este continuă în $H(x_0)$,*

(ii) *X, Y sunt spaţii Banach, g este i.s.c., $\operatorname{dom} H$ este mulţime închisă, $H|_{\operatorname{dom} H}$ este continuă şi $0 \in \operatorname{ric}(H(\operatorname{dom} H) - \operatorname{dom} g)$,*

(iii) *$\dim Y < \infty$ şi $0 \in \operatorname{raint}(H(\operatorname{dom} H) - \operatorname{dom} g)$.*

Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ şi $x \in H^{-1}(\operatorname{dom} g)$,

$$(g \circ H)^*(x^*) = \min\{g^*(y^*) + (y^* \circ H)^*(x^*) \mid y^* \in Q^+\}, \tag{2.43}$$

$$\partial_\varepsilon (g \circ H)(x) = \bigcup \{\partial_{\varepsilon_1}(y^* \circ H)(x) \mid y^* \in \partial_{\varepsilon_2} g(H(x)),\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \geq 0,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon\}. \tag{2.44}$$

Demonstraţie. Fie $x^* \in X^*$ şi

$$F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x, y) := g(H(x) + y) - \langle x, x^* \rangle.$$

Se verifică cu uşurinţă că funcţia F satisface condiţia (ii), (iii) sau (iv) din Teorema 2.7.1 dacă condiţia (i), (ii) respectiv (iii) din enunţul teoremei este îndeplinită. Prin urmare

$$-(g \circ H)^*(x^*) = \inf_{x \in X} F(x, 0) = \max_{y^* \in Y^*} (-F^*(0, y^*)),$$

adică

$$(g \circ H)^*(x^*) = \min_{y^* \in Y^*} F^*(0, y^*).$$

Însă

$$\begin{aligned} F^*(0, y^*) &= \sup\{\langle x, x^* \rangle + \langle y, y^* \rangle - g(H(x) + y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \\ &= \sup\{\langle x, x^* \rangle + \langle v - H(x), y^* \rangle - g(v) \mid x \in \operatorname{dom} H,\ v \in \operatorname{dom} g\} \\ &= \sup\{\langle v, y^* \rangle - g(v) \mid v \in \operatorname{dom} g\} + \\ &\qquad + \sup\{\langle x, x^* \rangle - (y^* \circ H)(x) \mid x \in \operatorname{dom} H\} \\ &= g^*(y^*) + (y^* \circ H)^*(x^*). \end{aligned}$$

Presupunem că $y^* \notin Q^+$. Atunci există $y_0 \in Q$ astfel ca $\langle y_0, y^* \rangle < 0$. Fixăm $\bar{y} \in \operatorname{dom} g$; avem că $\bar{y} - t y_0 \leq \bar{y}$ pentru orice $t \geq 0$. Deoarece g este Q–crescătoare,

$$g^*(y^*) = \sup\{\langle v, y^* \rangle - g(v) \mid v \in \operatorname{dom} g\}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sup\{\langle \bar{y} - ty_0, y^*\rangle - g(\bar{y} - ty_0) \mid t \geq 0\} \\ &\geq \sup\{\langle \bar{y}, y^*\rangle - t\langle y_0, y^*\rangle - g(\bar{y}) \mid t \geq 0\} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Deci $F^*(0, y^*) = \infty$ dacă $y^* \notin Q^+$. Prin urmare (2.43) are loc.

Incluziunea "$\supset$" din egalitatea (2.44) se verifică uşor, şi are loc întotdeauna. Fie deci $x \in \operatorname{dom}(g \circ H) = H^{-1}(\operatorname{dom} g)$ şi $x^* \in \partial_\varepsilon(g \circ H)(x)$; atunci

$$(g \circ H)(x) + (g \circ H)^*(x^*) \leq \langle x, x^*\rangle + \varepsilon.$$

Din (2.43) există $y^* \in Q^+$ astfel ca $(g \circ H)(x^*) = g^*(y^*) + (y^* \circ H)(x^*)$. Prin urmare

$$\begin{aligned} &g(H(x)) + g^*(y^*) + (y^* \circ H)^*(x^*) - \langle x, x^*\rangle = \\ &\quad [g(H(x)) + g^*(y^*) - \langle H(x), y^*\rangle] + [(y^* \circ H)(x) + (y^* \circ H)^*(x^*) - \langle x, x^*\rangle] \\ &\quad \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Luând $\varepsilon_1 := (y^* \circ H)(x) + (y^* \circ H)^*(x^*) - \langle x, x^*\rangle \geq 0$ şi $\varepsilon_2 := \varepsilon - \varepsilon_1 \geq 0$, avem că $y^* \in \partial_{\varepsilon_2} g(H(x))$ şi $x^* \in \partial_{\varepsilon_1}(y^* \circ H)(x)$. Formula (2.44) este astfel dovedită. ∎

Utilizăm teorema precedentă pentru a obţine formule pentru funcţii de tipul $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Consecinţa 2.7.4 *Fie $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe proprii şi*

$$\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi(x) := \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}.$$

Presupunem că $\operatorname{dom} \varphi = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i \neq \emptyset$ şi $\varepsilon \in [0, \infty[$. Pentru $x \in \operatorname{dom} \varphi$ notăm prin $I(x)$ mulţimea $\{i \mid 1 \leq i \leq n,\ f_i(x) = \varphi(x)\}$. Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$,

$$\varphi^*(x^*) = \min\{(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)^*(x^*) \mid \lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\},$$

iar pentru orice $x \in \operatorname{dom} \varphi$,

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \varphi(x) \ = \ \bigcup \Big\{ &\partial_{\varepsilon_1}(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(x) \ \Big|\ \lambda_i \geq 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \\ &\varepsilon_0,\ \varepsilon_1 \geq 0,\ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon,\ \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \geq \varphi(x) - \varepsilon_0 \Big\}, \end{aligned}$$

$$\partial \varphi(x) = \bigcup \Big\{ \partial \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \Big)(x) \ \Big|\ \lambda_i \geq 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ \lambda_i = 0 \ \ \forall\, i \notin I(x) \Big\}.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţiile

$$H : X \to (\mathbb{R}^{n\bullet}, \mathbb{R}^n_+),\ H(x) := \begin{cases} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) & \text{dacă} x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i, \\ \infty & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(y) := \max\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Este clar că este îndeplinită condiţia (i) din teorema precedentă. Ţinând seama de expresiile lui g^* şi $\partial_\varepsilon g(y)$ obţinute în Consecinţa 2.4.6, obţinem imediat relaţiile din enunţ. ∎

Un caz particular, dar util, în care φ^* şi $\partial_\varepsilon \varphi$ din consecinţa precedentă se pot explicita este dat în rezultatul următor.

Consecinţa 2.7.5 *Fie $X_1, \ldots, X_n$ spaţii normate şi $f_i : X_i \to \overline{\mathbb{R}}$, $1 \le i \le n$, funcţii convexe proprii, iar*

$$\varphi : X := \prod\nolimits_{i=1}^n X_i \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) := \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i).$$

Pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom} \varphi = \prod_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$ considerăm $I(x) := \{i \mid f_i(x_i) = \varphi(x)\}$. Atunci, pentru $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \prod_{i=1}^n X_i^* = X^*$,

$$\varphi^*(x^*) \;=\; \min\left\{\sum\nolimits_{i=1}^n (\lambda_i f_i)^*(x_i^*) \;\middle|\; \lambda_i \ge 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\}, \tag{2.45}$$

iar pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{dom} \varphi$ şi $\varepsilon \in]0, \infty[$,

$$\begin{aligned} \partial_\varepsilon \varphi(x) \;=\; \bigcup \Big\{ \prod\nolimits_{i=1}^n \partial_{\varepsilon_i}(\lambda_i f_i)(x_i) \;\Big|\; & \lambda_i \ge 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ \ \varepsilon_i \ge 0, \\ & \sum\nolimits_{i=0}^n \varepsilon_i = \varepsilon,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_i) \ge \varphi(x) - \varepsilon_0 \Big\}, \end{aligned}$$

$$\partial \varphi(x) = \bigcup \left\{ \prod\nolimits_{i=1}^n \partial(\lambda_i f_i)(x_i) \;\middle|\; \lambda_i \ge 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ \lambda_i = 0 \ \ \forall\, i \notin I(x) \right\}.$$

Demonstraţie. Aplicăm consecinţa precedentă pentru funcţiile $\tilde{f}_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\tilde{f}_i(x) := f_i(x_i)$, iar apoi utilizăm Teorema 2.3.1 (vii) pentru n arbitrar şi Consecinţa 2.4.1. ∎

Utilizând rezultatul precedent obţinem şi

Consecinţa 2.7.6 *Fie $f_1,\ f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe proprii şi $\varepsilon \in [0, \infty[$. Atunci pentru orice $x^* \in X^*$*

$$\begin{aligned} (f_1 \nabla f_2)^*(x^*) \;=\; \min\{(\lambda_1 f_1)^*(x^*) + (\lambda_2 f_2)^*(x^*) \mid \lambda_1,\ \lambda_2 \ge 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Presupunem că $(f_1\nabla f_2)(\bar{x}) = \max\{f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{x}_2)\}$, *unde* $\bar{x}_1 \in \operatorname{dom} f_1$, $\bar{x}_2 \in \operatorname{dom} f_2$ *şi* $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. *Atunci*

$$\partial_\varepsilon(f_1\nabla f_2)(\bar{x}) = \bigcup \{\partial_{\varepsilon_1}(\lambda_1 f_1)(\bar{x}_1) \cap \partial_{\varepsilon_2}(\lambda_2 f_2)(\bar{x}_2) \mid \lambda_1,\, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$$\varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \geq 0,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon + \lambda_1 f_1(\bar{x}_1) + \lambda_2 f_2(\bar{x}_2) - (f_1\nabla f_2)(\bar{x})\}\,. \quad (2.47)$$

În plus, dacă $f_1(\bar{x}_1) = f_2(\bar{x}_2)$ *atunci are loc (2.48), iar dacă* $f_1(\bar{x}_1) > f_2(\bar{x}_2)$ *atunci are loc (2.49), unde*

$$\begin{aligned} \partial(f_1\nabla f_2)(\bar{x}) &= \bigcup \{\partial(\lambda_1 f_1)(\bar{x}_1) \cap \partial(\lambda_2 f_2)(\bar{x}_2) \mid \lambda_1,\, \lambda_2 \geq 0, \\ &\qquad\qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}\,, \quad (2.48) \\ \partial(f_1\nabla f_2)(\bar{x}) &= \partial f_1(\bar{x}_1) \cap N(\operatorname{dom} f_2, \bar{x}_2). \quad (2.49) \end{aligned}$$

Demonstraţie. Fie $x^* \in X^*$; avem că

$$\begin{aligned} (f_1\nabla f_2)(x^*) &= \sup_{x\in X}\left(\langle x, x^*\rangle - \inf_{x_1+x_2=x} \max\{f_1(x_1), f_2(x_2)\}\right) \\ &= \sup\{\langle x_1, x^*\rangle + \langle x_2, x^*\rangle - \max\{f_1(x_1), f_2(x_2)\} \mid x_1,\, x_2 \in X\} \\ &= \min\{(\lambda_1 f_1)^*(x^*) + (\lambda_2 f_2)^*(x^*) \mid \lambda_1,\, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}. \end{aligned}$$

Pentru ultima egalitate am utilizat (2.45). Prin urmare are loc (2.46).

Incluziunea "$\supset$" din (2.47) se verifică direct, cu uşurinţă. Considerăm $x^* \in \partial_\varepsilon(f_1\nabla f_2)(\bar{x})$. Din (2.46) există $\lambda_1,\, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, astfel ca

$$(f_1\nabla f_2)^*(x^*) = (\lambda_1 f_1)^*(x^*) + (\lambda_2 f_2)^*(x^*). \quad (2.50)$$

Prin urmare, utilizând relaţia precedentă, avem că

$$\begin{aligned} 0 &\leq [(\lambda_1 f_1)(\bar{x}_1) + (\lambda_1 f_1)^*(x^*) - \langle \bar{x}_1, x^*\rangle] \\ &\qquad + [(\lambda_2 f_2)(\bar{x}_2) + (\lambda_2 f_2)^*(x^*) - \langle \bar{x}_2, x^*\rangle] \\ &\leq (f_1\nabla f_2)(\bar{x}) + (f_1\nabla f_2)^*(x^*) - \langle \bar{x}, x^*\rangle \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Luând $\varepsilon_i := (\lambda_i f_i)(\bar{x}_i) + (\lambda_i f_i)^*(x^*) - \langle \bar{x}_i, x^*\rangle \geq 0,\ i \in \{1, 2\}$, din relaţia precedentă şi (2.50) obţinem că

$$(f_1\nabla f_2)(\bar{x}) + \varepsilon_1 - \lambda_1 f_1(\bar{x}_1) + \varepsilon_2 - \lambda_2 f_2(\bar{x}_2) \leq \varepsilon,$$

şi deci x^* aparţine mulţimii din membrul drept al relaţiei (2.47).

Să arătăm acum că au loc (2.48) şi (2.49). Cum incluziunile "$\supset$" se obţin direct din (2.47), să verificăm incluziunile inverse în cele două cazuri. Fie deci

$x^* \in \partial(f_1 \nabla f_2)(\bar{x}) = \partial_0(f_1 \nabla f_2)(\bar{x})$. Din (2.47) rezultă existenţa numerelor $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \geq 0$ astfel ca $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ şi

$$x^* \in \partial_{\varepsilon_1}(\lambda_1 f_1)(\bar{x}_1) \cap \partial_{\varepsilon_2}(\lambda_2 f_2)(\bar{x}_2),$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \lambda_1 f_1(\bar{x}_1) + \lambda_2 f_2(\bar{x}_2) - (f_1 \nabla f_2)(\bar{x}) \leq 0.$$

Prin urmare $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ şi $\lambda_1 f_1(\bar{x}_1) + \lambda_2 f_2(\bar{x}_2) = (f_1 \nabla f_2)(\bar{x})$; deci x^* aparţine mulţimii din membrul drept al relaţiei (2.48) în cazul în care $f_1(\bar{x}_1) = f_2(\bar{x}_2)$. Dacă $f_1(\bar{x}_1) > f_2(\bar{x}_2)$, din relaţia de mai sus obţinem că $\lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = 1$ şi deci

$$x^* \in \partial f_1(\bar{x}_1), \qquad x^* \in \partial(0 \cdot f_2)(\bar{x}_2) = \partial I_{\operatorname{dom} f_2}(\bar{x}_2) = N(\operatorname{dom} f_2, \bar{x}_2),$$

ceea ce arată că x^* este în mulţimea din membrul drept al relaţiei (2.49) în acest caz. ∎

Să observăm că în (2.47) se poate lua $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \cdots$, iar în (2.49), dacă f_1 şi f_2 sunt continue în $\bar{x}_1$ respectiv $\bar{x}_2$, $\partial(f_1 \nabla f_2)(\bar{x}) = \{0\}$. Într-adevăr, în această situaţie, $N(\operatorname{dom} f_2, \bar{x}_2) = \{0\}$ ($\bar{x}_2 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f_2)$), şi cum $f_1 \nabla f_2$ este continuă în $\bar{x}$, $\partial(f_1 \nabla f_2)(\bar{x}) \neq \emptyset$. În particular rezultă că $\bar{x}_1$ este punct de minim pentru f_1, ceea ce se poate obţine şi direct. În această situaţie $f_1 \nabla f_2$ este chiar G-diferenţiabilă.

În general pentru explicitarea formulelor din Consecinţa 2.7.4 este nevoie de condiţii suplimentare. Dăm astfel de condiţii şi formulele corespunzătoare în două situaţii.

Consecinţa 2.7.7 *Fie $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţii convexe proprii, $\varepsilon \in [0, \infty[$ şi $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi(x) := \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$. Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$ astfel că funcţiile $f_2, \ldots, f_n$ sunt continue în x_0,*

(ii) $\dim X < \infty$ *şi* $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{raint}(\operatorname{dom} f_i) \neq \emptyset$.

Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ şi $x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$,

$$\begin{aligned}\varphi^*(x^*) &= \min\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^n (\lambda_i f_i)^*(x_i^*) \;\Big|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ x_i^* \in X^*, \\ &\qquad\qquad \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^* = x^*\Big\},\\ \partial_\varepsilon \varphi(x) &= \bigcup\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^n \partial_{\varepsilon_i}(\lambda_i f_i)(x) \;\Big|\; \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ \varepsilon_i \geq 0, \\ &\qquad\qquad \textstyle\sum_{i=0}^n \varepsilon_i = \varepsilon,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \geq \varphi(x) - \varepsilon_0\Big\},\end{aligned}$$

$$\partial\varphi(x) \;=\; \bigcup\Big\{\sum\nolimits_{i=1}^{n}\partial(\lambda_i f_i)(x)\;\Big|\;\lambda_i\geq 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i=0\ \ \forall\, i\notin I(x)\Big\}.$$

În plus

$$\begin{aligned}\partial\varphi(x) \;&=\; \bigcup\Big\{\sum\nolimits_{i\in I(x)}\lambda_i\partial f_i(x)\;\Big|\;\lambda_i\geq 0,\ \sum\nolimits_{i\in I(x)}\lambda_i=1\Big\}\\ &=\; \operatorname{conv}\Big(\bigcup\nolimits_{i\in I(x)}\partial f_i(x)\Big),\end{aligned}$$

dacă $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{int}(\operatorname{dom} f_i)$. ∎

Fie $x^*,\ x_1^*,\ldots,x_n^*\in X^*$ şi funcţiile $f_1,\ f_2 : X\to I\!R$ definite prin

$$f_1(x) := \max\{\langle x, x_1^*\rangle,\ldots,\langle x, x_n\rangle\},\quad f_2(x) := |\langle x, x^*\rangle|.$$

Ca aplicaţii ale consecinţei precedente, au loc următoarele formule pentru orice $x\in X$:

$$\partial f_1(x)=\Big\{\sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^*\;\Big|\;\lambda_i\geq 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i=0 \text{ dacă} \langle x, x_i^*\rangle < f_1(x)\Big\},$$

$$\partial f_2(x)=\begin{cases}\{x^*\} & \text{dacă}\quad \langle x,x^*\rangle>0,\\ \{\lambda x^*\mid \lambda\in[-1,1]\} & \text{dacă}\quad \langle x,x^*\rangle=0,\\ \{-x^*\} & \text{dacă}\quad \langle x,x^*\rangle<0.\end{cases}$$

2.8 Optimizare convexă cu restricţii

Revenim la problema generală a programării convexe din Secţiunea 2.5,

$(P)\qquad \min f(x),\ x\in C,$

unde $f : X\to\overline{I\!R}$ este funcţie convexă proprie, $C\subset X$ este mulţime convexă şi $C\cap\operatorname{dom} f\neq\emptyset$; X şi celelalte spaţii considerate în acest paragraf sunt spaţii normate, deşi cele mai multe rezultate se pot stabili în spaţii local convexe. Cum $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $\bar{x}$ minimizează $\tilde{f} := f + I_C$, avem că $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $0\in\partial(f+I_C)(\bar{x})$. Ţinând seama de Teorema 2.7.3 are loc

Teorema 2.8.1 (Pshenichnyi-Rockafellar). *Fie $f : X\to\overline{I\!R}$ funcţie convexă proprie şi $C\subset X$ o mulţime convexă. Presupunem că* $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{int} C\neq\emptyset$ *sau există $x_0\in\operatorname{dom} f\cap C$ în care f este continuă. Atunci $\bar{x}\in C$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $\partial f(\bar{x})\cap -N(C,\bar{x})\neq\emptyset$.*

Demonstraţie. În condiţiile din enunţ, avem că

$$\partial(f + I_C)(x) = \partial f(x) + \partial I_C(x) = \partial f(x) + N(C, x) \quad \forall\, x \in C \cap \operatorname{dom} f,$$

de unde concluzia este evidentă. ∎

De multe ori mulţimea C din problema (P) apare ca mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii şi inecuaţii.

Fie $(Y, \leq)$ un spaţiu normat ordonat de conul convex şi închis $Q \subset Y$, iar $G : X \to Y$ un operator Q-convex; mulţimea $C := \{x \in X \mid G(x) \leq 0\}$ este o mulţime convexă. Problema (P) se scrie în acest caz sub forma

(P_0) $\qquad \min f(x),\ G(x) \leq 0.$

Un element $x \in X$ pentru care $G(x) \leq 0$ se va numi *soluţie admisibilă* pentru problema (P_0). Desigur, se pot considera şi operatori Q-convecşi G cu valori în $Y^\bullet$; în acest caz trebuie mai multă atenţie la scrierea condiţiilor de optimalitate.

Problema (P_0) se înglobează în mod firesc în familia de probleme de minimizare $(P_y),\ y \in Y$:

(P_y) $\qquad \min f(x),\ G(x) \leq y.$

Considerăm funcţia

$$F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F(x, y) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă } G(x) \leq y, \\ \infty & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.51}$$

Problema (P_y) se scrie acum sub forma

(P_y) $\qquad \min F(x, y),\ x \in X.$

Se constată cu uşurinţă că F este convexă. În plus

$$\begin{aligned} F^*(x^*, -y^*) &= \sup\{\langle x, x^*\rangle + \langle y, -y^*\rangle - F(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \\ &= \sup\{\langle x, x^*\rangle - \langle y, y^*\rangle - f(x) \mid x \in X,\ y \in Y,\ G(x) \leq y\} \\ &= \sup\{\langle x, x^*\rangle - \langle G(x) + q, y^*\rangle - f(x) \mid x \in X,\ q \in Q\} \\ &= \sup\{\langle x, x^*\rangle - \langle G(x), y^*\rangle - f(x) \mid x \in X\} + \\ &\qquad\qquad + \sup\{-\langle q, y^*\rangle \mid q \in Q\} \\ &= \begin{cases} \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x) - \langle G(x), y^*\rangle \mid x \in X\} & \text{dacă} y^* \in Q^+ \\ \infty & \text{dacă} y^* \notin Q^+. \end{cases} \end{aligned}$$

Funcţia

$$L : X \times Q^+ \to \overline{\mathbb{R}}, \quad L(x, y^*) := f(x) + \langle G(x), y^*\rangle,$$

se numeşte *funcţia Lagrange* asociată problemei (P_0). Din cele arătate mai sus avem că

$$F^*(0,-y^*) = \sup_{x\in X}(-L(x,y^*)) = -\inf_{x\in X} L(x,y^*) \ \ \forall\, y^* \in Q^+.$$

Problema duală problemei (P_0) (a se vedea Secţiunea 2.6) este

(D_0) $\qquad \max\,(-F^*(0,-y^*)\,),\ y^* \in Y^*,$

sau, echivalent,

(D_0) $\qquad \max\ \inf_{x\in X} L(x,y^*),\ y^* \in Q^+.$

Are loc următorul rezultat.

Teorema 2.8.2 *Fie* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funcţie convexă proprie,* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ *şi* $G : X \to (Y,Q)$ *operator* Q*-convex, unde* $Q \subset Y$ *este un con convex şi închis. Presupunem că este îndeplinită* condiţia Slater

(S) $\qquad \exists\, x_0 \in \operatorname{dom} f \ : \ -G(x_0) \in \operatorname{int} Q.$

Atunci problema (D_0) *are soluţii optime şi* $v(P_0) = v(D_0)$*, adică există* $\bar{y}^* \in Q^+$ *astfel ca*

$$\inf\{f(x) \mid G(x) \le 0\} = \inf\{L(x,\bar{y}^*) \mid x \in X\}.$$

În plus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\bar{x}$ *este soluţie pentru* (P_0)*;*

(ii) $G(\bar{x}) \le 0$ *şi există* $\bar{y}^* \in Q^+$ *astfel ca*

$$0 \in \partial(f + \bar{y}^* \circ G)(\bar{x}) \quad \text{şi} \quad \langle G(\bar{x}), \bar{y}^*\rangle = 0;$$

(iii) *există* $\bar{y}^* \in Q^+$ *astfel că* $(\bar{x}, \bar{y}^*)$ *este* punct şa *pentru* L*, adică*

$$L(\bar{x},y^*) \le L(\bar{x},\bar{y}^*) \le L(x,\bar{y}^*) \ \ \forall\, x \in X,\ \forall\, y^* \in Q^+. \tag{2.52}$$

Demonstraţie. Condiţia Slater (S) asigură faptul că $(x_0, 0) \in \operatorname{dom} F$ şi funcţia $F(x_0,\cdot)$ este continuă în 0. Aplicând Teorema 2.6.5, avem că există $\bar{y}^*$ astfel ca $v(P_0) = -F^*(0,-\bar{y}^*)$, unde F este funcţia definită de (2.51). Dacă $v(P_0) = -\infty$ atunci $F^*(0,y^*) = \infty$ pentru orice $y^* \in Y^*$ şi deci putem lua $\bar{y}^* = 0 \in Q^+$. Dacă $v(P_0) > -\infty$, din expresia lui F^* rezultă că $\bar{y}^* \in Q^+$. Prin urmare

$$\begin{aligned} v(P_0) &= \inf\{f(x) \mid G(x) \le 0\} = -F^*(0,-\bar{y}^*) = \inf\{L(x,\bar{y}^*) \mid x \in X\} \\ &= v(D_0). \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Desigur, $\bar{x}$ fiind soluţie pentru (P_0), avem că $G(\bar{x}) \leq 0$. Din cele arătate mai sus avem că există $\bar{y}^* \in Q^+$ astfel ca

$$f(\bar{x}) = v(P_0) = \inf\{L(x, \bar{y}^*) \mid x \in X\},$$

şi deci

$$f(\bar{x}) + \langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle \leq f(\bar{x}) \leq f(x) + \langle G(x), \bar{y}^* \rangle \quad \forall\, x \in X. \tag{2.53}$$

Făcând abstracţie de termenul din mijloc, din (2.53) avem că $\bar{x}$ este punct de minim pentru $f + \bar{y}^* \circ G$ şi deci $0 \in \partial(f + \bar{y}^* \circ G)(\bar{x})$; luând $x = \bar{x}$ în (2.53) obţinem că $\langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Din relaţia $0 \in \partial(f + \bar{y}^* \circ G)(\bar{x})$ obţinem

$$L(\bar{x}, \bar{y}^*) = f(\bar{x}) + \langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle \leq f(x) + \langle G(x), \bar{y}^* \rangle = L(x, \bar{y}^*) \quad \forall\, x \in X.$$

În plus, pentru $y^* \in Q^+$ avem că

$$L(\bar{x}, y^*) = f(\bar{x}) + \langle G(\bar{x}), y^* \rangle \leq f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle = L(\bar{x}, \bar{y}^*).$$

Prin urmare (2.52) are loc, adică $(\bar{x}, \bar{y}^*)$ este punct şa pentru L.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Luând $y^* = 0$, apoi $y^* = 2\bar{y}^*$, în partea stângă a relaţiei (2.52), obţinem că $\langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle = 0$. Tot din partea stângă a relaţiei (2.52) obţinem acum că $\langle G(\bar{x}), y^* \rangle \leq 0$ pentru orice $y^* \in Q^+$, de unde, utilizând Teorema bipolarei (Teorema 1.5.7), avem că $-G(\bar{x}) \in Q^{++} = Q$, adică $\bar{x}$ este soluţie admisibilă pentru (P_0). Din partea dreaptă a relaţiei (2.52) obţinem că

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \langle G(\bar{x}), \bar{y}^* \rangle \leq f(x) + \langle G(x), \bar{y}^* \rangle \leq f(x) \quad \forall\, x \in X,\ G(x) \leq 0.$$

Prin urmare $\bar{x}$ este soluţie a problemei (P_0). ∎

Elementul $\bar{y}^* \in Q^+$ obţinut în Teorema 2.8.2 se numeşte *multiplicator Lagrange* pentru problema (P).

Să observăm că dacă G este operator continuu atunci

$$\partial(f + \bar{y}^* \circ G)(x) = \partial f(x) + \partial(\bar{y}^* \circ G)(x) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f;$$

faptul că Q este închis s-a utilizat numai la implicaţia (iii) $\Rightarrow$ (i) din teorema precedentă, pentru a obţine că $\bar{x}$ este soluţie admisibilă.

Un caz particular important este cel în care avem un număr finit de restricţii. Fie funcţia f ca mai sus şi $g_1, \ldots, g_n : X \to \mathbb{R}$ funcţii convexe. Considerăm problema

$$(P_1) \qquad \min f(x),\ g_i(x) \leq 0,\ 1 \leq i \leq n.$$

Problema duală problemei (P_1) este

(D_1) $\qquad \max\ \inf_{x\in X}\left(f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\cdots+\lambda_n g_n(x)\right),\ \lambda_1\geq 0,\ldots,\lambda_n\geq 0.$

Are loc următorul rezultat.

Teorema 2.8.3 *Fie $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$, $g_1,\ldots,g_n: X\to\mathbb{R}$ funcţii convexe. Presupunem că are loc condiţia Slater*

$$\exists\, x_0\in \operatorname{dom} f\ :\ g_i(x_0)<0\ \ \forall\, i,\ 1\leq i\leq n.$$

Atunci

(i) *problema (D_1) are soluţii optime şi $v(P_1)=v(D_1)$, adică există (multiplicatorii Lagrange) $\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_n\in[0,\infty[$ astfel ca*

$$\inf\{f(x)\mid g_1(x)\leq 0,\ldots,g_n(x)\leq 0\}=\inf_{x\in X}\left(f(x)+\bar\lambda_1 g_1(x)+\cdots+\bar\lambda_n g_n(x)\right).$$

(ii) *Fie $\bar x\in\operatorname{dom} f$; $\bar x$ este soluţie a problemei (P_1) dacă şi numai dacă $g_i(\bar x)\leq 0$ pentru $1\leq i\leq n$ şi există $\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_n\in[0,\infty[$ astfel ca $\bar\lambda_i g_i(\bar x)=0$ pentru orice $i,\ 1\leq i\leq n$, şi*

$$0\in\partial\left(f+\bar\lambda_1 g_1+\cdots+\bar\lambda_n g_n\right)(\bar x).$$

Dacă funcţiile $g_1,\ldots,g_n$ sunt continue ultima condiţie este echivalentă cu

$$0\in\partial f(\bar x)+\bar\lambda_1\partial g_1(\bar x)+\cdots+\bar\lambda_n\partial g_n(\bar x).$$

Demonstraţie. Considerând $G: X\to\mathbb{R}^n$, $G(x):=(g_1(x),\ldots,g_n(x))$, G este $\mathbb{R}^n_+$-convex. Rezultatul enunţat în teoremă este consecinţă imediată a teoremei precedente. Să observăm că în cazul nostru $\partial(\lambda g_i)(x)=\lambda\partial g(x)$ pentru orice $x\in X$ şi $\lambda\geq 0$. ∎

Consecinţa 2.8.1 *Fie $f,\ g_1,\ldots,g_n: X\to\mathbb{R}$ funcţii convexe, continue şi G-diferenţiabile. Presupunem că există $x_0\in X$ astfel ca $g_i(x_0)<0$ pentru orice $i,\ 1\leq i\leq n$. Atunci $\bar x\in X$ este soluţie a problemei (P_1) dacă şi numai dacă $g_i(\bar x)\leq 0$ pentru $1\leq i\leq n$ şi există $\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_n\in[0,\infty[$ astfel ca*

$$-\nabla f(\bar x)=\bar\lambda_1\nabla g_1(\bar x)+\cdots+\bar\lambda_n\nabla g_n(\bar x)\quad \textit{şi}\quad \bar\lambda_i g_i(\bar x)=0\ \ \forall\, i,\ 1\leq i\leq n.$$ ∎

Consecinţa 2.8.2 *Fie $g: X\to\mathbb{R}$ funcţie convexă şi*

$$C\ :=\ \{x\in X\mid g(x)\leq 0\}.$$

Presupunem că există $x_0\in X$ astfel ca $g(x_0)<0$. Atunci

$$N(C,\bar x)=\begin{cases}[0,\infty[\cdot\partial g(\bar x) & \textit{dacă}\ \ g(\bar x)=0\ \ \textit{şi}\ \ \partial g(\bar x)\neq\emptyset,\\ \{0\} & \textit{dacă}\ \ g(\bar x)<0\ \ \textit{sau}\ \ \partial g(\bar x)=\emptyset.\end{cases}\tag{2.54}$$

Demonstraţie. Este evident că $0 \in N(C, \bar{x})$. Dacă în plus $g(\bar{x}) = 0$ şi $x^* \in \partial g(\bar{x})$,

$$\langle x - \bar{x}, x^* \rangle \leq g(x) - g(\bar{x}) = g(x) \leq 0 \quad \forall x \in C,$$

adică $x^* \in N(C, \bar{x})$. Deoarece $N(C, \bar{x})$ este con, $[0, \infty[\cdot \partial g(\bar{x}) \subset N(C, \bar{x})$. Prin urmare are loc incluziunea "$\supset$" din (2.54).

Dovedim acum incluziunea inversă. Dacă $g(\bar{x}) < 0$ atunci $\bar{x} \in \operatorname{aint} C$, şi deci, după cum am observat la pagina 105, $N(C, \bar{x}) = \{0\}$. Într-adevăr, fie $x \in X$. Deoarece C este mulţime convexă, este suficient să arătăm că $\bar{x} + \lambda x \in C$ pentru un $\lambda > 0$. Dacă $g(\bar{x} + x) \leq 0$, $\bar{x} + 1 \cdot x \in C$. Fie deci $g(\bar{x} + x) > 0$. Luând $\lambda_0 := -g(\bar{x})/[g(\bar{x} + x) - g(\bar{x})] \in]0, 1[$, avem că

$$g(\bar{x} + \lambda_0 x) = g((1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0(\bar{x} + x)) \leq (1 - \lambda_0)g(\bar{x}) + \lambda_0 g(\bar{x} + x) = 0,$$

ceea ce arată că $\bar{x} + \lambda_0 x \in C$.

Fie acum $g(\bar{x}) = 0$ şi $x^* \in N(C, \bar{x})$. Atunci $\bar{x}$ este soluţie a problemei

$$(P_1') \qquad \min \langle x, -x^* \rangle, \ g(x) \leq 0,$$

şi deci, din Teorema 2.8.3, există $\lambda \geq 0$ astfel ca $0 \in \partial(-x^* + \lambda g)(\bar{x})$, adică $x^* \in \partial(\lambda g)(\bar{x})$. Dacă $\partial g(\bar{x}) = \emptyset$ atunci $\lambda = 0$, şi deci $x^* = 0$. Dacă $\partial g(\bar{x}) \neq \emptyset$, atunci $x^* \in \lambda \partial g(\bar{x}) \subset [0, \infty[\cdot \partial g(\bar{x})$. Prin urmare are loc şi incluziunea "$\subset$" din (2.54). ∎

Să observăm că putem obţine caracterizarea soluţiei optime din Teorema 2.8.3, în cazul în care funcţiile g_i sunt continue, din Consecinţa 2.8.2 şi formula pentru subdiferenţiala sumei. Într-adevăr, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ este soluţie pentru (P_1) dacă şi numai dacă $\bar{x}$ este punct de minim pentru funcţia $f + I_{C_1} + \cdots + I_{C_n}$, unde $C_i := \{x \mid g_i(x) \leq 0\}$. Din ipoteză avem că $\operatorname{dom} f \cap \bigcap_{i=1}^n \operatorname{int} C_i \neq \emptyset$ şi deci

$$\begin{aligned} &\partial(f + I_{C_1} + \cdots + I_{C_n})(x) \\ &\quad = \ \partial f(x) + N(C_1, x) + \cdots + N(C_n, x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \cap \textstyle\bigcap_{i=1}^n C_i. \end{aligned}$$

Utilizând formula (2.54) obţinem caracterizarea dorită.

Teorema 2.8.2 poate fi încă extinsă la cazul unei probleme la care se adaugă restricţii liniare. Fie problema

$$(P_2) \qquad \min f(x), \ G(x) \leq 0, \ Tx = 0.$$

Considerând funcţia Lagrange asociată problemei (P_2), definită prin

$$L_2 : X \times (Q^+ \times Z^*) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad L_2(x, y^*, z^*) := f(x) + \langle G(x), y^* \rangle + \langle Tx, z^* \rangle,$$

problema duală problemei (P_2) este

(D_2) $\qquad \max\ \inf_{x\in X} L_2(x,y^*,z^*),\ y^*\in Q^+,\ z^*\in Z^*.$

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 2.8.4 *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţie convexă proprie, $G : X \to (Y,Q)$ operator Q-convex, unde $Q \subset Y$ este un con convex închis, $T \in \mathcal{L}(X,Z)$ un operator surjectiv şi $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Presupunem că X, Z sunt spaţii Banach şi există $x_0 \in \operatorname{dom} f$ astfel că f, G sunt continui în x_0, $-G(x_0) \in \operatorname{int} Q$ şi $Tx_0 = 0$. Atunci problema (D_2) are soluţii optime şi $v(P_2) = v(D_2)$, adică există $\bar{y}^* \in Q^+$, $\bar{z}^* \in Z^*$ astfel ca*

$$\inf\{f(x) \mid G(x) \le 0,\ Tx = 0\} = \inf\{L_2(x,\bar{y}^*,\bar{z}^*) \mid x \in X\}.$$

În plus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *$\bar{x}$ este soluţie pentru (P_2);*

(ii) *$G(\bar{x}) \le 0$, $T\bar{x} = 0$ şi există $\bar{y}^* \in Q^+$, $\bar{z}^* \in Z^*$ astfel ca*

$$T^*\bar{z}^* \in \partial f(\bar{x}) + \partial(\bar{y}^* \circ G)(\bar{x}) \quad \text{şi} \quad \langle G(\bar{x}), \bar{y}^*\rangle = 0;$$

(iii) *există $(\bar{y}^*,\bar{z}^*) \in Q^+ \times Z^*$ astfel că $(\bar{x},(\bar{y}^*,\bar{z}^*))$ este punct şa pentru L_2, adică*

$$L_2(\bar{x},y^*,z^*) \le L_2(\bar{x},\bar{y}^*,\bar{z}^*) \le L_2(x,\bar{y}^*,\bar{z}^*) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y^* \in Q^+,\ \forall\, z^* \in Z^*.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia de perturbare

$$F : X \times (Y \times Z) \to \overline{\mathbb{R}},\ F(x,y,z) := \begin{cases} f(x) & \text{dacă} G(x) \le y,\ T(x) = z, \\ \infty & \text{în rest.} \end{cases}$$

Dorim să arătăm că este îndeplinită condiţia de la punctul (i) al Teoremei 2.6.5. Deoarece f este continuă în $x_0 \in \operatorname{dom} f$, există $\rho_1 > 0$ astfel ca

$$\forall\, x \in B(x_0,\rho_1)\ :\ f(x) \le M := f(x_0) + 1.$$

Deoarece $-G(x_0) \in \operatorname{int} Q$, există $\rho_2 > 0$ astfel ca $B(-G(x_0), 2\rho_2) \subset Q$. Din cauză că G este continuu în x_0, există $\rho_3 \in]0,\rho_1]$ astfel ca $G(x) \in B(G(x_0),\rho_2)$ pentru orice $x \in B(x_0,\rho_3)$. Cum T este operator surjectiv şi X, Z sunt spaţii Banach, din principiul aplicaţiilor deschise, avem că există $\rho_4 > 0$ astfel ca $B(0,\rho_4) \subset T(B(x_0,\rho_3))$. Fie $V_0 := B(0,\rho_2) \times B(0,\rho_4) \in \mathcal{V}_{Y\times Z}(0,0)$ şi

$(y,z) \in V_0$. Există atunci $x \in B(x_0, \rho_3)$ astfel ca $Tx = z$. Cum $x \in B(x_0, \rho_3)$, $G(x) \in B(G(x_0), \rho_2)$, adică $G(x) = G(x_0) - y_1$ cu $\|y_1\| < \rho_2$. Atunci

$$y - G(x) = y + y_1 - G(x_0) \in B(-G(x_0), 2\rho_2) \subset Q;$$

prin urmare $G(x) \leq y$. Luând pentru fiecare $(y,z) \in V_0$, $\theta(y,z) := x$ obţinut mai înainte, avem că

$$F(\theta(y,z), y, z) \leq M \quad \forall\, (y,z) \in V_0,$$

adică este îndeplinită condiţia menţionată mai sus. Prin urmare există un element $(\bar{y}^*, \bar{z}^*) \in Y^* \times Z^*$ astfel ca $v(P_2) = -F^*(0, -\bar{y}^*, -\bar{z}^*)$. Însă

$$\begin{aligned}
F^*(0,-y^*,-z^*) &= \sup\nolimits_{(x,y,z)\in X\times Y\times Z} (\langle y, -y^*\rangle + \langle z, -z^*\rangle - F(x,y,z)) \\
&= \sup\{-\langle y, y^*\rangle - \langle z, z^*\rangle - f(x) \mid G(x) \leq y,\ Tx = z\} \\
&= \sup\{-\langle G(x) + q, y^*\rangle - \langle Tx, z^*\rangle - f(x) \mid x \in X,\ q \in Q\} \\
&= -\inf\{f(x) + \langle G(x), y^*\rangle + \langle Tx, z^*\rangle \mid x \in X\} + \\
&\qquad\qquad + \sup\{-\langle q, y^*\rangle \mid q \in Q\}.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$F^*(0,-y^*,-z^*) = \begin{cases} -\inf_{x\in X} L_2(x, y^*, z^*) & \text{dacă} \quad y^* \in Q^+, \\ \infty & \text{dacă} \quad y^* \notin Q^+. \end{cases}$$

Deci $\bar{y}^* \in Q^+$ dacă $v(P_2) \in \mathbb{R}$, şi se poate lua $\bar{y}^* = 0 \in Q^+$ dacă $v(P_2) = -\infty$.

Demonstraţia celei de a doua părţi se face complet analog cu cea din Teorema 2.8.2. Să observăm numai că f şi G fiind continui în x_0, are loc formula $\partial(f + \bar{y}^* \circ G)(x) = \partial f(x) + \partial(\bar{y}^* \circ G)(x)$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$. ∎

Condiţia că T este surjectiv, iar spaţiile X, Z sunt spaţii Banach poate fi înlocuită prin condiţia că $T(U_X) \in \mathcal{V}_{\operatorname{Im} T}(0)$, adică T este operator deschis relativ la $\operatorname{Im} T$.

2.9 Câteva rezultate fundamentale în analiza convexă

Ca aplicaţii ale Teoremei lui Ekeland şi ale rezultatelor referitoare la funcţii convexe stabilite până acum punem în evidenţă alte rezultate importante referitoare la funcţii convexe. Un prim rezultat, util pentru stabilirea altora, este următoarea generalizare a Teoremei Brøndsted-Rockafellar.

Teorema 2.9.1 (Borwein). *Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie. Considerăm $\varepsilon \in]0,\infty[$, $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ şi $\beta \in [0,\infty[$. Atunci există $x_\varepsilon \in X$, $u_\varepsilon^* \in U^*$ şi $\lambda_\varepsilon \in [-1,1]$ astfel ca*

$$\|x_\varepsilon - x_0\| + \beta|\langle x_\varepsilon - x_0, x_0^*\rangle| \le \sqrt{\varepsilon}, \tag{2.55}$$

$$x_\varepsilon^* := x_0^* + \sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon^* + \beta\lambda_\varepsilon x_0^*) \in \partial f(x_\varepsilon). \tag{2.56}$$

În plus

$$\|x_\varepsilon - x_0\| \le \sqrt{\varepsilon}, \qquad \|x_\varepsilon^* - x_0^*\| \le \sqrt{\varepsilon}(1 + \beta\|x_0^*\|), \tag{2.57}$$

$$x_\varepsilon^* \in \partial_{2\varepsilon} f(x_0), \qquad |f(x_\varepsilon) - f(x_0)| \le \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} + 1/\beta). \tag{2.58}$$

(Convenim ca $1/0 = \infty$.)

Demonstraţie. Aplicaţia

$$\|\ \|_0 : X \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_0 := \|x\| + \beta|\langle x, x_0^*\rangle|,$$

este, evident, o normă pe X, echivalentă cu norma iniţială. Deci $(X, \|\ \|_0)$ este spaţiu Banach. Considerăm funcţia

$$g : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad g(x) := f(x) - \langle x, x_0^*\rangle.$$

Este evident că $x_0 \in \operatorname{dom} g = \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} \partial_\varepsilon f$, iar g este i.s.c. şi mărginită inferior:

$$g(x) \ge g(x_0) - \varepsilon \quad \forall\, x \in X \ (\Leftrightarrow\ x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)).$$

Prin urmare putem aplica Teorema lui Ekeland (Teorema 1.2.6) pentru g, $\sqrt{\varepsilon}$ şi distanţa d, unde $d(x,y) := \|x - y\|_0$. Deci există $x_\varepsilon \in \operatorname{dom} g$ astfel ca

$$g(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x_\varepsilon - x_0\|_0 \le g(x_0), \tag{2.59}$$

$$g(x_\varepsilon) < g(x) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\|_0 \quad \forall\, x \in X,\ x \ne x_\varepsilon. \tag{2.60}$$

Din (2.59) obţinem că

$$g(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}(\|x_\varepsilon - x_0\| + \beta|\langle x_\varepsilon - x_0, x_0^*\rangle|) \le g(x_0) \le g(x_\varepsilon) + \varepsilon,$$

de unde (2.55) se obţine imediat.

Considerând funcţia $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$h(x) := g(x) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\|_0 = f(x) - \langle x, x_0^*\rangle + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\| + \beta\sqrt{\varepsilon} \cdot |\langle x - x_\varepsilon, x_0^*\rangle|,$$

din (2.60) avem că x_ε este punct de minim pentru h. Prin urmare $0 \in \partial h(x_\varepsilon)$. Cum h apare ca suma a patru funcţii convexe, cel mult una nefiind continuă, ţinând seama şi de expresia subdiferenţialei normei (Consecinţa 2.4.5) şi a modulului unei funcţionale liniare (la sfârşitul Secţiunii 2.7), avem că

$$0 \in \partial h(x_\varepsilon) = \partial f(x_\varepsilon) - x_0^* + \sqrt{\varepsilon} \cdot U^* + \beta\sqrt{\varepsilon} \cdot [-1,1] \cdot x_0^*.$$

Deci există $x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$, $u_\varepsilon^* \in U^*$ şi $\lambda_\varepsilon \in [-1,1]$ astfel ca (2.56) să aibă loc.

Estimările din (2.57) rezultă imediat din (2.55) şi (2.56). Tot din (2.55) şi (2.56) obţinem că

$$\begin{aligned}
|\langle x_\varepsilon - x_0, x_\varepsilon^* - x_0^*\rangle| &= \sqrt{\varepsilon} \cdot |\langle x_\varepsilon - x_0, u_\varepsilon^* + \beta\lambda_\varepsilon x_0^*\rangle| \\
&\le \sqrt{\varepsilon}(\|x_\varepsilon - x_0\| \cdot \|u_\varepsilon^*\| + \beta|\lambda_\varepsilon| \cdot |\langle x_\varepsilon - x_0, x_0^*\rangle|) \\
&\le \sqrt{\varepsilon}(\|x_\varepsilon - x_0\| + \beta|\langle x_\varepsilon - x_0, x_0^*\rangle|) \\
&\le \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

Deoarece $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ şi $x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$, avem că

$$\langle x_0 - x_\varepsilon, x_\varepsilon^* - x_0^*\rangle + \langle x_0 - x_\varepsilon, x_0^*\rangle = \langle x_0 - x_\varepsilon, x_\varepsilon^*\rangle \le f(x_0) - f(x_\varepsilon) \le \langle x_0 - x_\varepsilon, x_0^*\rangle + \varepsilon,$$

de unde, prin utilizarea relaţiilor (2.55) şi (2.61), obţinem că

$$|f(x_0) - f(x_\varepsilon)| \le |\langle x_0 - x_\varepsilon, x_0^*\rangle| + \varepsilon \le \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}/\beta,$$

adică a doua relaţie din (2.58) este satisfăcută. Utilizând din nou faptul că $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$, $x_\varepsilon^* \in \partial f(x_\varepsilon)$, şi (2.61), avem că

$$\begin{aligned}
\langle x - x_0, x_\varepsilon^*\rangle &= \langle x - x_\varepsilon, x_\varepsilon^*\rangle + \langle x_\varepsilon - x_0, x_\varepsilon^* - x_0^*\rangle + \langle x_\varepsilon - x_0, x_0^*\rangle \\
&\le f(x) - f(x_\varepsilon) + \varepsilon + f(x_\varepsilon) - f(x_0) + \varepsilon \\
&= f(x) - f(x_0) + 2\varepsilon \quad \forall\, x \in X,
\end{aligned}$$

adică $x_\varepsilon^* \in \partial_{2\varepsilon} f(x_0)$, ceea ce arată că şi prima relaţie din (2.58) are loc. ∎

Următorul rezultat este o consecinţă imediată a teoremei precedente.

Teorema 2.9.2 (Brøndsted-Rockafellar). *Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie, iar $\varepsilon \in]0,\infty[$. Atunci*

$$\forall\, (x_0, x_0^*) \in \partial_\varepsilon f,\ \exists\, (x_\varepsilon, x_\varepsilon^*) \in \partial f \ :\ \|x_\varepsilon - x_0\| \le \sqrt{\varepsilon},\ \|x_\varepsilon^* - x_0^*\| \le \sqrt{\varepsilon}.$$

În particular $\operatorname{dom} f \subset \overline{\operatorname{dom} \partial f}$ *şi* $\operatorname{dom} f^* \subset \overline{\operatorname{dom} \partial f^*}$.

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din Teorema lui Borwein pentru $\beta = 0$. Pentru a două parte, fie $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi $0 < \varepsilon_n \to 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există $x_{0n}^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_0)$, şi deci, din prima parte,

$$\exists\, (x_n, x_n^*) \in \partial f \ : \|x_n - x_0\| \le \sqrt{\varepsilon_n},\ \|x_n^* - x_{0n}^*\| \le \sqrt{\varepsilon_n}.$$

Deci $\operatorname{dom}\partial f \ni x_n \to x_0$.

În mod analog, fie $x_0^* \in \operatorname{dom} f^*$ şi $0 < \varepsilon_n \to 0$. Pentru fiecare n există $x_{0n} \in \partial_{\varepsilon_n} f^*(x_0^*)$ ($\Leftrightarrow$ $x_0^* \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_{0n})$). Tot din prima parte

$$\exists\, (x_n, x_n^*) \in \partial f \ : \|x_n - x_{0n}\| \le \sqrt{\varepsilon_n},\ \|x_n^* - x_0^*\| \le \sqrt{\varepsilon_n}.$$

Prin urmare $\operatorname{dom}\partial f^* = \operatorname{Im}\partial f \ni x_n^* \to x_0^*$. ∎

Din Teorema Brøndsted-Rockafellar se poate obţine şi următorul rezultat.

Teorema 2.9.3 (Bishop-Phelps). *Fie X spaţiu Banach şi $C \subset X$, $C \neq X$, o mulţime nevidă, convexă şi închisă. Atunci*

(i) *Mulţimea punctelor suport ale lui C este densă în* $\operatorname{Fr} C$.

(ii) *Mulţimea funcţionalelor suport ale lui C este densă în mulţimea funcţionalelor mărginite superior pe C. Dacă în plus C este mărginită, atunci mulţimea funcţionalelor suport ale lui C este densă în X^*.*

Demonstraţie. (i) Fie $x_0 \in \operatorname{Fr} C$ şi $\varepsilon \in]0,1[$. Deoarece $C \neq X$, există $x_1 \in X \setminus C$ astfel ca $\|x_1 - x_0\| \le \varepsilon^2$. Aplicând o teoremă de separare, există $x_0^* \in S^*$ astfel ca $\sup_{x\in C}\langle x, x_0^*\rangle < \langle x_1, x_0^*\rangle$. Prin urmare, pentru orice $x \in C$,

$$\langle x - x_0, x_0^*\rangle = \langle x - x_1, x_0^*\rangle + \langle x_1 - x_0, x_0^*\rangle \le \langle x - x_1, x_0^*\rangle + \|x_1 - x_0\| \le \varepsilon^2,$$

şi deci $x_0^* \in \partial_{\varepsilon^2} I_C(x_0)$. Aplicând Teorema lui Brøndsted-Rockafellar avem că

$$\exists\, x_\varepsilon \in C,\ \exists\, x_\varepsilon^* \in \partial I_C(x_\varepsilon)\ :\ \|x_\varepsilon - x_0\| \le \varepsilon,\ \|x_\varepsilon^* - x_0^*\| \le \varepsilon < 1.$$

Cum $\|x_0^*\| = 1$, avem că $x_\varepsilon^* \neq 0$, şi deci x_ε este punct suport (de sprijin) al lui C cu $\|x_\varepsilon - x_0\| \le \varepsilon$. Deci concluzia are loc.

(ii) Din a doua parte a teoremei precedente avem că

$$\operatorname{dom}(I_C)^* \subset \overline{\operatorname{dom}\partial(I_C)^*} = \overline{\operatorname{dom}\partial(I_C)^* \setminus \{0\}},$$

şi deci are loc concluzia teoremei. ∎

Următoarea teoremă va fi folosită pentru obţinerea unei demonstraţii foarte simple pentru Teorema lui Rockafellar. Pentru o funcţie $g : X \to \mathbb{R}$ vom nota prin $\inf g$ numărul $\inf_{x\in X} g(x)$.

Teorema 2.9.4 (Simons). *Fie X spaţiu Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c., proprie şi $u \in X$, $\eta \in \mathbb{R}$ astfel ca $\inf f < \eta < f(u)$. Definim*

$$L := \sup_{x\in X\setminus\{u\}} \frac{\eta - f(x)}{\|u - x\|},$$

şi $D_u : X \to \mathbb{R},\ D_u(x) := \|x-u\|$. *Atunci*

(i) $0 < L < \infty$ *şi* $\inf(f + LD_u) \geq \eta$*;*

(ii) $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists\, y \in X\ :\ (f+LD_u)(y) < \inf(f+LD_u) + \varepsilon L\|u-y\|$*;*

(iii) $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists\,(z,z^*) \in \partial f\ :\ \langle u-z, z^*\rangle \geq (1-\varepsilon)L\|u-z\| > 0$ *şi* $\|z^*\| \leq (1+\varepsilon)L$*;*

(iv) $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists\,(z,z^*) \in \partial f\ :\ \langle u-z, z^*\rangle + f(z) > \eta,\ L \leq \|z^*\| \leq (1+\varepsilon)L.$

Demonstraţie. (i) Deoarece $\eta > \inf f$, este clar că $L > 0$. Din faptul că $\eta < f(u)$ şi f este i.s.c. în u, există $\rho > 0$ astfel ca $f(x) > \eta$ pentru $x \in B(u,\rho)$. În plus, deoarece f este convexă, proprie şi i.s.c., există $x^* \in X^*$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \geq \langle x, x^*\rangle - \alpha$ pentru orice $x \in X$. Prin urmare, pentru $x \in X$, $\|x-u\| \geq \rho$,

$$\eta - f(x) \leq \eta - \langle x, x^*\rangle + \alpha \leq \eta + \|x-u\| \cdot \|x^*\| - \langle u, x^*\rangle + \alpha.$$

Notând $\gamma := \max\{0, \eta + \alpha - \langle u, x^*\rangle\}$, obţinem că

$$\frac{\eta - f(x)}{\|u-x\|} \leq \|x^*\| + \frac{\gamma}{\|u-x\|} \leq \|x^*\| + \frac{\gamma}{\rho} \quad \forall\, x \in X,\ \|x-u\| \geq \rho.$$

Din modul de alegere a lui ρ şi această relaţie obţinem că $L < \infty$. Din expresia lui L, inegalitatea $\inf(f+LD_u) \geq \eta$ este evidentă.

(ii) Fie $\varepsilon \in]0,1[$. Deoarece $(1-\varepsilon)L < L$, din definiţia lui L, există $y \in X$, $y \neq u$, astfel ca $(\eta - f(y))/\|u-y\| > (1-\varepsilon)L$, de unde obţinem că

$$(f+LD_u)(y) < \eta + \varepsilon L D_u(y) \leq \inf(f+LD_u) + \varepsilon L\|y-u\|.$$

(iii) Fie $\varepsilon \in]0,1[$ fixat. Funcţia $f+LD_u$ este proprie, i.s.c. şi mărginită inferior, iar elementul y găsit la (ii) este din $\operatorname{dom}(f+LD_u) = \operatorname{dom} f$. Considerând metrica d pe X definită prin $d(x_1,x_2) := L\|x_1 - x_2\|$, spaţiul (X,d) este spaţiu metric complet. Prin urmare, aplicând Teorema lui Ekeland obţinem existenţa unui element $z \in X$ astfel ca

$$(f+LD_u)(z) + \varepsilon L\|z-y\| \leq (f+LD_u)(y),$$

şi

$$(f+LD_u)(z) \leq (f+LD_u)(x) + \varepsilon L\|x-z\| \quad \forall\, x \in X.$$

Din prima relaţie, ţinând seama şi de (ii), obţinem că $\|z-y\| < \|u-y\|$, şi deci $z \neq u$. Din a doua relaţie de mai sus avem că z este punct de minim pentru funcţia $f + LD_u + \varepsilon LD_z$; întrucât D_u şi D_z sunt funcţii convexe şi continue, rezultă că

$$0 \in \partial(f + LD_u + \varepsilon LD_z)(z) = \partial f(z) + L\partial D_u(z) + \varepsilon L\partial D_z(z).$$

Însă $\partial D_z(z) = \partial\| \ \|(0) = U^*$ şi $\partial D_u(z) = \{x^* \in U^* \mid \langle z - u, x^*\rangle = \|z - u\|\}$. Prin urmare există $z^* \in \partial f(z)$ şi u^*, $v^* \in U^*$ astfel ca $z^* = Lu^* + \varepsilon Lv^*$, $\langle u - z, u^*\rangle = \|u - z\|$. Rezultă că $\|z^*\| \leq (1 + \varepsilon)L$ şi

$$\begin{aligned}\langle u - z, z^*\rangle &= \langle u - z, Lu^* + \varepsilon Lv^*\rangle = L\|u - z\| + \varepsilon L\langle u - z, v^*\rangle \\ &\geq L\|u - z\| - \varepsilon L\|u - z\| = L(1 - \varepsilon)\|u - z\| > 0.\end{aligned}$$

(iv) Fie $\varepsilon \in]0, 1[$ fixat şi $\varepsilon' := \varepsilon/3$. Considerăm $M := (1 + 2\varepsilon')L$. Deoarece $f + MD_u \geq f + LD_u \geq \eta$, putem aplica Teorema lui Ekeland pentru $f + MD_u$, un element x_0 din $\operatorname{dom} f$, $\varepsilon' > 0$ şi distanţa definită la (iii). Rezultă că există $z \in X$ astfel ca

$$(f + MD_u)(z) \leq (f + MD_u)(x) + \varepsilon' L\|x - z\| \quad \forall\, x \in X.$$

Ca la punctul (iii), există $z^* \in \partial f(z)$, u^*, $v^* \in U^*$ astfel ca $z^* = Mu^* + \varepsilon' Lv^*$ şi $\langle u - z, u^*\rangle = \|u - z\|$. Deci $\|z^*\| \leq (1 + \varepsilon)L$ şi

$$\langle u - z, z^*\rangle \geq (M - \varepsilon' L)\|u - z\| = (1 + \varepsilon' L)\|u - z\|.$$

Prin urmare, dacă $u = z$, $\langle u - z, z^*\rangle + f(z) = f(u) > \eta$, iar dacă $u \neq z$,

$$\langle u - z, z^*\rangle + f(z) \geq (1 + \varepsilon')L\|u - z\| + f(z) = (f + LD_u)(z) + \varepsilon' L\|u - z\| > \eta.$$

Deci $\langle u - z, z^*\rangle + f(z) > \eta$. În plus, pentru orice $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|u - x\| \cdot \|z^*\| &\geq \langle u - x, z^*\rangle = [\langle u - z, z^*\rangle + f(z)] - [\langle x - z, z^*\rangle + f(z)] \\ &> \eta - f(x),\end{aligned}$$

ultima inegalitate având loc deoarece $z^* \in \partial f(z)$. Prin împărţire la $\|u - x\|$, pentru $x \neq u$, obţinem că $\|z^*\| \geq L$. ∎

O consecinţă imediată a acestui rezultat este următoarea teoremă.

Teorema 2.9.5 *Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie. Atunci pentru orice $x \in X$ avem că*

$$\begin{aligned}f(x) &= \sup\{\langle x - z, z^*\rangle + f(z) \mid (z, z^*) \in \partial f\} \\ &= \sup\{\langle x, z^*\rangle - f^*(z^*) \mid z^* \in \operatorname{Im}(\partial f)\}.\end{aligned}$$

Demonstraţie. Dacă $(z, z^*) \in \partial f$, atunci $\langle x - z, z^* \rangle + f(z) \le f(x)$ pentru orice $x \in X$, şi deci inegalitatea "$\ge$" din relaţia de dovedit are loc. Fie $x \in X$ fixat. Dacă $f(x) = \inf f$ atunci $0 \in \partial f(x)$ şi deci luând $(z, z^*) = (x, 0)$, avem că $f(x) \le \langle x - z, z^* \rangle + f(z)$. Presupunem deci că $f(x) > \inf f$, şi fie $\eta \in \mathbb{R}$ arbitrar astfel ca $\inf f < \eta < f(x)$. Din Teorema 2.9.4 (iv) avem că există $(z, z^*) \in \partial f$ astfel ca $\langle x - z, z^* \rangle + f(z) > \eta$. Rezultă că

$$\sup\{\langle x - z, z^* \rangle + f(z) \mid (z, z^*) \in \partial f\} \ge f(x).$$

Demonstraţia este completă. ∎

Operatorii maximal monotoni sunt deosebit de importanţi în teoria ecuaţiilor de evoluţie. Un exemplu semnificativ de astfel de operatori este dat de teorema următoare.

Teorema 2.9.6 (Rockafellar). *Fie X spaţiu Banach şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie. Atunci ∂f este operator maximal monoton.*

Demonstraţie. Fie $(u, u^*) \in X \times X^* \setminus \partial f$. Atunci $u^* \notin \partial f(u)$, şi deci $0 \notin \partial \tilde{f}(u)$, unde $\tilde{f} := f - u^*$. Rezultă că $\inf \tilde{f} < \tilde{f}(u)$. Aplicând punctul (iii) al Teoremei lui Simons, există $(z, \tilde{z}^*) \in \partial \tilde{f}$ astfel ca $\langle u - z, \tilde{z}^* \rangle > 0$. Considerând $z^* := \tilde{z}^* + u^*$, avem că $(z, z^*) \in \partial f$ şi $\langle z - u, z^* - u^* \rangle < 0$, ceea ce arată că mulţimea $\partial f \cup \{(u, u^*)\}$ nu este monotonă. Deci ∂f este operator maximal monoton. ∎

2.10 Aplicaţii la problema celei mai bune aproximări

Fie $(X, \|\ \|)$ spaţiu normat şi $C \subset X$ o mulţime nevidă, iar $x_0 \in X$. *Distanţa* de la x_0 la C este numărul

$$d(x_0, C) := \inf\{\|x - x_0\| \mid x \in C\}.$$

Este cunoscut, şi uşor de dovedit, că $d(x_0, C) = d(x_0, \overline{C})$. O problemă importantă este aceea de a determina mulţimea

$$P_C(x_0) := \{\bar{x} \in C \mid \|\bar{x} - x_0\| = d(x_0, C)\};$$

$\bar{x} \in P_C(x_0)$ se numeşte o *cea mai bună aproximare* a lui x_0 prin elemente din C. Să observăm $P_C(x_0)$ este mulţimea soluţiilor optime pentru fiecare din următoarele probleme de minimizare:

(P_1) $\qquad \min\ \|x - x_0\|,\ x \in C,$

(P_2) $\qquad \min \ \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2, \ x \in C.$

În plus $v(P_1) = d(x_0, C), \ v(P_2) = \frac{1}{2}d^2(x_0, C)$.

În teoria celei mai bune aproximări problemele de bază sunt: existenţa, unicitatea şi caracterizarea elementelor de cea mai bună aproximare. Să observăm mai întâi că $P_C(x_0) = \{x_0\}$ dacă $x_0 \in C$, $P_C(x_0) = \emptyset$ dacă $x_0 \in \overline{C} \setminus C$, iar dacă C este mulţime deschisă atunci $P_C(x_0) = \emptyset$ pentru orice $x_0 \in X \setminus C$ (exerciţiu !). Având în vedere cele de mai sus, în mod obişnuit se consideră $x_0 \in X \setminus C$ şi se presupune că C este mulţime închisă. Deoarece dorim să aplicăm rezultatele stabilite anterior (dar nu este singurul motiv), vom presupune mai departe că C este convexă.

Primul rezultat oferă condiţii suficiente pentru existenţa, respectiv unicitatea elementelor de cea mai bună aproximare.

Teorema 2.10.1 *Fie $C \subset X$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă, iar $x_0 \in X$.*

- **(i)** *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv atunci $P_C(x_0) \neq \emptyset$.*
- **(ii)** *Dacă $X_0 := \operatorname{lin} C$ este spaţiu de dimensiune finită atunci $P_C(x_0) \neq \emptyset$.*
- **(iii)** *Dacă X este spaţiu strict convex atunci $P_C(x_0)$ are cel mult un element.*

Demonstraţie. (i) Considerăm funcţia $f := \|\cdot - x_0\| + I_C$. Din ipoteză avem că f este convexă şi i.s.c.; în plus $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$. Din punctul (ii) al Teoremei 2.5.1, există $\bar{x} \in X$ astfel ca $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in X$, adică $\bar{x} \in P_C(x_0)$.

(ii) Există $(x_n)_{n\geq 1} \subset C \subset X_0$ astfel ca $\|x_n - x_0\| \to d(x_0, C)$. Rezultă că (x_n) este mărginit. Spaţiul X_0 fiind finit dimensional, X_0 este izomorf cu $\mathbb{R}^k$ ($k = \dim X_0$) şi deci (x_n) conţine un subşir (x_{n_k}) convergent la $\bar{x} \in X_0 \subset X$. Deoarece mulţimea C este închisă, $\bar{x} \in C$, iar din modul în care (x_n) a fost ales avem că $\|\bar{x} - x_0\| = d(x_0, C)$. Prin urmare $\bar{x} \in P_C(x_0)$.

(iii) Am văzut că pentru $x_0 \in C$, $P_C(x_0) = \{x_0\}$. Fie deci $x_0 \notin C$. Presupunem că există două elemente distincte x_1, x_2 în $P_C(x_0)$. Atunci

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \in C, \text{ şi } \|x_1 - x_0\| = \|x_2 - x_0\| = d(x_0, C) > 0.$$

Deoarece X este strict convex, obţinem că

$$\begin{aligned} \|\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_0\| &= \|\tfrac{1}{2}(x_1 - x_0) + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_0)\| \\ &< \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_0\| + \tfrac{1}{2}\|x_2 - x_0\| = d(x_0, C). \end{aligned}$$

Această contradicţie arată că $P_C(x_0)$ are cel mult un element. ∎

Să observăm că pentru $(X, \langle\, , \rangle)$ spaţiu Hilbert, rezultatele stabilite la punctele (i) şi (iii) din teorema precedentă sunt date şi de Teorema 1.9.1.

Următorul rezultat de dualitate se dovedeşte util uneori.

Teorema 2.10.2 *Fie* $\emptyset \neq C \subset X$ *o mulţime convexă şi închisă, iar* $x_0 \in X \setminus C$. *Atunci*

$$\begin{aligned} d(x_0, C) &= \max_{x^* \in U^*} \inf_{x \in C} \langle x_0 - x, x^* \rangle, \\ \tfrac{1}{2} d^2(x_0, C) &= \max_{x^* \in X^*} \inf_{x \in C} (\langle x_0 - x, x^* \rangle - \tfrac{1}{2}\|x^*\|^2). \end{aligned}$$

Dacă C *este con atunci*

$$d(x_0, C) = \max_{x^* \in U^* \cap -C^+} \langle x_0, x^* \rangle \quad \text{şi} \quad \tfrac{1}{2} d^2(x_0, C) = \max_{x^* \in -C^+} \left(\langle x_0, x^* \rangle - \tfrac{1}{2}\|x^*\|^2 \right).$$

Demonstraţie. Fie

$$f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R},\ f_1(x) := \|x - x_0\|,\ f_2(x) := \tfrac{1}{2}\|x - x_0\|^2.$$

Utilizând formula de dualitate Fenchel-Rockafellar (Consecinţa 2.7.3) şi formulele pentru conjugata normei şi a pătratului normei, avem că

$$\begin{aligned} d(x_0, C) &= \inf_{x \in X} (f_1(x) + I_C(x)) = \max_{x^* \in X^*} (-{f_1}^*(-x^*) - {I_C}^*(x^*)) \\ &= \max_{x^* \in U^*} \left(\langle x_0, x^* \rangle - \sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle \right) = \max_{x^* \in U^*} \inf_{x \in C} \langle x_0 - x, x^* \rangle, \\ \tfrac{1}{2} d^2(x_0, C) &= \inf_{x \in X} (f_2(x) + I_C(x)) = \max_{x^* \in X^*} (-{f_2}^*(-x^*) - {I_C}^*(x^*)) \\ &= \max_{x^* \in X^*} \left(\langle x_0, x^* \rangle - \tfrac{1}{2}\|x^*\|^2 - \sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle \right) \\ &= \max_{x^* \in X^*} \inf_{x \in C} \left(\langle x_0 - x, x^* \rangle - \tfrac{1}{2}\|x^*\|^2 \right). \end{aligned}$$

În cazul în care C este con, ${I_C}^*(x^*) = 0$ dacă $x^* \in -C^+$, $= \infty$ în rest, şi deci se obţin şi celelalte formule. ∎

Încheiem acest paragraf cu caracterizarea elementelor de cea mai bună aproximare.

Teorema 2.10.3 *Fie* $C \subset X$ *o mulţime nevidă şi convexă,* $x_0 \in X \setminus C$, *iar* $\bar{x} \in C$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\bar{x} \in P_C(x_0)$;

(ii) $\exists\, x^* \in S^* \; : \; \langle \bar{x} - x_0, x^* \rangle = \|\bar{x} - x_0\|, \; \langle x - \bar{x}, x^* \rangle \geq 0 \;\; \forall\, x \in C;$

(iii) $\exists\, x^* \in S^* \; : \; \langle x - x_0, x^* \rangle \geq \|\bar{x} - x_0\| \;\; \forall\, x \in C;$

(iv) $\exists\, x^* \in X^* \; : \; \langle \bar{x} - x_0, x^* \rangle = \|x^*\|^2 = \|\bar{x} - x_0\|^2, \; \langle x - \bar{x}, x^* \rangle \geq 0 \;\; \forall\, x \in C;$

(v) $\exists\, x^* \in X^* \; : \; \|x^*\| = \|\bar{x} - x_0\|, \; \langle x - x_0, x^* \rangle \geq \|\bar{x} - x_0\|^2 \;\; \forall\, x \in C;$

(vi) *(dacă X este neted)* $\langle x - \bar{x}, F_X(\bar{x} - x_0) \rangle \geq 0 \;\; \forall\, x \in C;$

(vii) *(dacă C este con)* $\exists\, x^* \in S^* \cap -C^+ \; : \; \langle x_0, x^* \rangle = \|\bar{x} - x_0\|.$

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii) Dacă $\bar{x} \in P_C(x_0)$ atunci $0 \in \partial f_1(\bar{x}) + \partial I_C(\bar{x})$, unde f_1 este funcţia definită în demonstraţia teoremei precedente. Concluzia este imediată, ţinând cont de expresia subdiferenţialei normei.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Cu x^* din (ii) avem că pentru orice $x \in C$

$$\langle x - x_0, -x^* \rangle = \langle x - \bar{x}, -x^* \rangle - \langle \bar{x} - x_0, x^* \rangle = \langle x - \bar{x}, -x^* \rangle - \|\bar{x} - x_0\| \geq 0.$$

Elementul $-x^*$ satisface condiţiile cerute.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Cu x^* din (iii) avem

$$\|x - x_0\| \geq \langle x - x_0, x^* \rangle \geq \|\bar{x} - x_0\| \;\; \forall\, x \in C,$$

adică $\bar{x} \in P_C(x_0)$.

Implicaţiile (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) urmează exact la fel ca mai sus, utilizând de această dată funcţia f_2.

Condiţia (vi) este aceeaşi cu condiţia (iv) în cazul în care X este neted ($\partial f_2(x) = F_X(x - x_0)$, iar dacă X este neted $F_X(x)$ conţine un singur element, notat tot prin $F_X(x)$).

Presupunem acum că C este con.

(iii) $\Rightarrow$ (vii) Cu x^* din (iii) avem

$$\langle tx, x^* \rangle \geq \langle x_0, x^* \rangle + \|\bar{x} - x_0\| \;\; \forall\, t \geq 0, \; \forall\, x \in C.$$

Prin urmare $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ pentru orice $x \in C$, adică $x^* \in C^+$, şi

$$\langle x_0, -x^* \rangle \geq \|\bar{x} - x_0\| \geq \langle x_0 - \bar{x}, -x^* \rangle \geq \langle x_0, -x^* \rangle,$$

şi deci $-x^*$ este elementul căutat.

(vii) $\Rightarrow$ (iii) Cu x^* din (vii), avem că

$$\langle x - x_0, -x^* \rangle \geq \langle x_0, x^* \rangle = \|\bar{x} - x_0\| \;\; \forall\, x \in C,$$

ceea ce arată că $-x^*$ satisface condiţia din (iii). ∎

Capitolul 3

Programare neconvexă

3.1 Conuri tangente

Pentru a obţine condiţii de optimalitate în cazul programării matematice neconvexe s-au pus în evidenţă mai multe tipuri de conuri asociate unei submulţimi a unui spaţiu normat într-un punct. Cel mai vechi dintre acestea este conul tangent în sensul lui Bouligand. Mai recent au fost introduse şi alte tipuri de conuri tangente, printre care amintim pe cele în sensul lui Clarke şi respectiv în sensul lui Ursescu. În cele ce urmează ultimele două conuri vor avea un caracter ajutător.

Înainte de a defini aceste conuri reamintim că pentru o submulţime nevidă A a unui spaţiu metric (X, d) şi $x \in X$, distanţa de la x la A este numărul real $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$; este uşor de verificat că $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.

Fie $(X, \| \|)$ spaţiu normat, $M \subset X$ şi $\bar{x} \in \overline{M}$. Se numeşte *conul tangent în sensul lui Bouligand* la mulţimea M în $\bar{x}$ mulţimea

$$T_B(M, \bar{x}) := \left\{ u \in X \;\middle|\; \liminf_{t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - \bar{x})\right) = 0 \right\}.$$

În mod asemănător, *conul tangent în sensul lui Ursescu* la mulţimea M în $\bar{x}$ este mulţimea

$$T_U(M, \bar{x}) := \left\{ u \in X \;\middle|\; \lim_{t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - \bar{x})\right) = 0 \right\},$$

iar *conul tangent în sensul lui Clarke* la mulţimea M în $\bar{x}$ este mulţimea

$$T_C(M, \bar{x}) := \left\{ u \in X \;\middle|\; \lim_{M \ni x \to \bar{x},\, t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - x)\right) = 0 \right\}.$$

Vom vedea mai jos că aceste mulţimi sunt, într-adevăr, conuri închise.

Având în vedere aceste definiţii, este utilă considerarea noţiunilor de limită inferioară şi superioară pentru o aplicaţie multivocă. Fie (X,d) şi (Y,ρ) spaţii metrice, iar $\mathcal{R} : X \rightsquigarrow Y$ o aplicaţie multivocă. Se numesc *limita inferioară*, respectiv *limita superioară, a aplicaţiei multivoce* $\mathcal{R}$ în $\bar{x} \in \overline{\operatorname{dom} \mathcal{R}}$ mulţimile

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x) := \left\{ v \in Y \;\middle|\; \lim_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) = 0 \right\}$$

şi

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x) := \left\{ v \in Y \;\middle|\; \liminf_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) = 0 \right\}.$$

Să observăm că dacă $\overline{\mathcal{R}} : X \rightsquigarrow Y$, $\overline{\mathcal{R}}(x) := \overline{\mathcal{R}(x)}$, atunci

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \overline{\mathcal{R}}(x) = \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x), \qquad \limsup_{x\to\bar{x}} \overline{\mathcal{R}}(x) = \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x). \tag{3.1}$$

În plus are loc următorul rezultat.

Teorema 3.1.1 *Fie* $\mathcal{R} : (X,d) \rightsquigarrow (Y,\rho)$ *o aplicaţie multivocă şi* $\bar{x} \in \overline{\operatorname{dom}\mathcal{R}}$. *Atunci mulţimile* $\liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ *şi* $\limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ *sunt închise. În plus* $v \in \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ *dacă şi numai dacă*

$$\forall\, (x_n) \subset \operatorname{dom}\mathcal{R},\ x_n \to \bar{x},\ \exists\, (y_n) \subset Y \ :\ y_n \to v \ \ \text{şi} \ \ y_n \in \mathcal{R}(x_n) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

iar $v \in \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ *dacă şi numai dacă*

$$\exists\, (x_n) \subset \operatorname{dom}\mathcal{R},\ x_n \to \bar{x},\ \exists\, (y_n) \subset Y \ :\ y_n \to v \ \ \text{şi} \ \ y_n \in \mathcal{R}(x_n) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

De asemenea,

$$\limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x) = \bigcap_{U\in\mathcal{V}(\bar{x})} \overline{\bigcup_{x\in U} \mathcal{R}(x)}. \tag{3.4}$$

Demonstraţie. Fie $v \notin \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$; utilizând definiţia limitei inferioare avem că $\limsup_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) > 0$. Deci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca

$$\forall\, U \in \mathcal{V}(\bar{x}),\ \exists\, x_U \in U \cap \operatorname{dom}\mathcal{R} \ :\ d\left(v, \mathcal{R}(x_U)\right) > 2\varepsilon_0. \tag{3.5}$$

Pentru $v' \in B(v,\varepsilon_0)$, $d\left(v', \mathcal{R}(x_U)\right) \geq \varepsilon_0$. În caz contrar există $y_U \in \mathcal{R}(x_U)$ astfel ca $\rho(v', y_U) < \varepsilon_0$. Prin urmare

$$\rho(v, y_U) \leq \rho(v, v') + \rho(v', y_U) < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0,$$

contrazicând faptul că $d\left(v, \mathcal{R}(x_U)\right) > 2\varepsilon_0$. Deci $B(v, \varepsilon_0) \cap \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x) = \emptyset$, ceea ce arată că $v \notin \overline{\liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)}$. Prin urmare $\liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ este mulţime închisă. Demonstraţia pentru limita superioară este analoagă; faptul că $\limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ este mulţime închisă rezultă şi din formula (3.4) demonstrată mai jos.

Fie acum $v \in \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ şi $(x_n) \subset \operatorname{dom} \mathcal{R}$ astfel ca $x_n \to \bar{x}$. Deoarece $\lim_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) = 0$, avem că $d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) \to 0$. Însă

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, y_n \in \mathcal{R}(x_n)\ :\ \rho(v, y_n) < d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) + 1/n,$$

şi deci $y_n \to v$.

Dovedim implicaţia inversă prin reducere la absurd. Presupunem că $v \in Y$ satisface condiţia din partea dreaptă a relaţiei (3.2), dar $v \notin \liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$. Deci există $\varepsilon_0 > 0$ pentru care are loc (3.5). Luând $U = B(\bar{x}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi notând x_U prin x_n, avem că $d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) > 2\varepsilon_0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din ipoteză există $(y_n) \subset Y$ astfel ca $y_n \to v$ şi $y_n \in \mathcal{R}(x_n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Obţinem astfel contradicţia $0 < 2\varepsilon_0 < d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) \le \rho(v, y_n) \to 0$.

Fie $v \in \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că

$$\inf\left\{d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) \mid x \in B\left(\bar{x}, \tfrac{1}{n}\right) \cap \operatorname{dom}\mathcal{R}\right\} = 0,$$

şi deci există $x_n \in B\left(\bar{x}, \frac{1}{n}\right) \cap \operatorname{dom}\mathcal{R}$ astfel ca $d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) < \frac{1}{n}$, ceea ce implică existenţa unui $y_n \in \mathcal{R}(x_n)$ astfel ca $\rho(v, y_n) < \frac{1}{n}$. Prin urmare are loc implicaţia " $\Rightarrow$ " în (3.3). Invers, presupunem că există $((x_n, y_n)) \subset \operatorname{gr}\mathcal{R}$ astfel ca $x_n \to \bar{x}$ şi $y_n \to v$. Fie $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$; există atunci $n_U \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in U$ pentru orice $n \ge n_U$. Prin urmare

$$\inf\{d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) \mid x \in U \cap \operatorname{dom}\mathcal{R}\} \le d\left(v, \mathcal{R}(x_n)\right) \le \rho(v, y_n)\ \ \forall\, n \ge n_U.$$

Deci $\inf\{d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) \mid x \in U \cap \operatorname{dom}\mathcal{R}\} = 0$ pentru orice $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$, ceea ce arată că $v \in \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$.

Demonstrăm acum formula (3.4). Fie $v \in \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$ şi $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$. Din (3.3) avem că există $((x_n, y_n)) \subset \operatorname{gr}\mathcal{R}$ astfel ca $x_n \to \bar{x}$ şi $y_n \to v$. Deoarece $x_n \to \bar{x}$, există atunci $n_U \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in U$ pentru orice $n \ge n_U$. Deci pentru $n \ge n_U$ avem că $y_n \in \bigcup_{x\in U} \mathcal{R}(x)$, astfel că $v \in \overline{\bigcup_{x\in U} \mathcal{R}(x)}$. Prin urmare are loc incluziunea "$\subset$" din (3.4).

Fie de această dată $v \notin \limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\liminf_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) > \varepsilon_0$. Deci există $U_0 \in \mathcal{V}(\bar{x})$ astfel ca $d\left(v, \mathcal{R}(x)\right) > \varepsilon_0$ pentru orice $x \in U_0 \cap \operatorname{dom}\mathcal{R}$. Prin urmare $\overline{B(v, \varepsilon_0) \cap \mathcal{R}(x)}$ pentru orice $x \in U_0$, de unde $B(v, \varepsilon_0) \cap \bigcup_{x\in U_0} \mathcal{R}(x) = \emptyset$. Deci $v \notin \overline{\bigcup_{x\in U_0} \mathcal{R}(x)}$. Prin urmare are loc şi incluziunea "$\supset$" din (3.4). ∎

În continuare, peste tot în acest capitol, X, Y şi Z desemnează spaţii normate.

Utilizând rezultatul anterior obţinem următoarele caracterizări, prin şiruri, ale elementelor din $T_B(M,\bar{x})$, $T_U(M,\bar{x})$ şi $T_C(M,\bar{x})$.

Teorema 3.1.2 *Fie $M \subset X$ şi $\bar{x} \in \overline{M}$. Atunci*

$$\begin{aligned}
T_B(M,\bar{x}) &= \{u \in X \mid \exists (t_n) \to 0+,\ (u_n) \to u,\ \forall n \in I\!N\ :\ \bar{x} + t_n u_n \in M\},\\
T_U(M,\bar{x}) &= \{u \in X \mid \forall (t_n) \to 0+,\ \exists (u_n) \to u,\ \forall n \in I\!N\ :\\
&\qquad\qquad \bar{x} + t_n u_n \in M\},\\
T_C(M,\bar{x}) &= \{u \in X \mid \forall (t_n) \to 0+,\ \forall (x_n) \subset M,\ (x_n) \to \bar{x},\\
&\qquad\qquad \exists (u_n) \to u,\ \forall n \in I\!N\ :\ x_n + t_n u_n \in M\}.
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Luând $\mathcal{R} :]0,\infty[\rightsquigarrow X$, $\mathcal{R}(t) := t^{-1}(M - \bar{x})$, în teorema precedentă, obţinem imediat caracterizările pentru elementele din $T_U(M,\bar{x})$ şi $T_B(M,\bar{x})$. Caracterizarea elementelor din $T_C(M,\bar{x})$ se obţine tot din teorema precedentă considerând însă $\mathcal{R} :]0,\infty[\times M \rightsquigarrow X$, $\mathcal{R}(t,x) := t^{-1}(M - x)$. ▮

În rezultatul următor punem în evidenţă câteva proprietăţi simple ale conurilor tangente în sensurile lui Bouligand, Clarke şi Ursescu.

Teorema 3.1.3 *Fie D, L, $M \subset X$, $P \subset Y$, $\bar{x} \in \operatorname{int} D \cap \overline{L}$ şi $\bar{y} \in \overline{P}$, iar $f : D \to Y$ o funcţie F-diferenţiabilă în $\bar{x}$. Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) *dacă $L \subset M$ atunci $T_B(L,\bar{x}) \subset T_B(M,\bar{x})$ şi $T_U(L,\bar{x}) \subset T_U(M,\bar{x})$;*

(ii) *$T_B(L,\bar{x})$, $T_U(L,\bar{x})$ şi $T_C(L,\bar{x})$ sunt conuri închise şi nevide. În plus*

$$T_S(L,\bar{x}) = T_S(\overline{L},\bar{x}) = T_S(L \cap D,\bar{x}) \quad \forall S \in \{B,U,C\}, \tag{3.6}$$

$$T_C(L,\bar{x}) \subset T_U(L,\bar{x}) \subset T_B(L,\bar{x}) \subset C(L,\bar{x}) \tag{3.7}$$

şi

$$T_B(L,\bar{x}) = \bigcap_{t>0} \overline{[t,\infty[\cdot (L - \bar{x})} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(\bar{x})} C(L \cap U,\bar{x}), \tag{3.8}$$

unde $\mathcal{U}(\bar{x})$ este un sistem fundamental de vecinătăţi i ale lui $\bar{x}$. În particular, $T_B(L,\bar{x}) = T_U(L,\bar{x}) = T_C(L,\bar{x}) = X$ dacă $\bar{x} \in \operatorname{int} L$;

(iii) *$T_U(L,\bar{x}) \times T_B(P,\bar{y}) \subset T_B(L \times P,(\bar{x},\bar{y})) \subset T_B(L,\bar{x}) \times T_B(P,\bar{y})$ şi*

$$T_U(L \times P,(\bar{x},\bar{y})) = T_U(L,\bar{x}) \times T_U(P,\bar{y}),\ T_C(L \times P,(\bar{x},\bar{y})) = T_C(L,\bar{x}) \times T_C(P,\bar{y});$$

(iv) *dacă $\bar{x} \in \overline{L \cap f^{-1}(P)}$ atunci*

$$T_B\left(L\cap f^{-1}(P),\bar{x}\right)\subset T_B(L,\bar{x})\cap\nabla f(\bar{x})^{-1}(T_B(P,f(\bar{x})))$$

şi

$$T_U\left(L\cap f^{-1}(P),\bar{x}\right)\subset T_U(L,\bar{x})\cap\nabla f(\bar{x})^{-1}(T_U(P,f(\bar{x}))).$$

Demonstraţie. (i) Incluziunile menţionate rezultă imediat din caracterizările cu şiruri date în teorema precedentă.

(ii) Egalitatea $T_B(L,\bar{x})=T_B(\overline{L},\bar{x})$ rezultă imediat din (3.1), iar incluziunea $T_B(L\cap D,\bar{x})\subset T_B(L,\bar{x})$ rezultă din (i). Fie $u\in T_B(L,\bar{x})$; aplicând teorema precedentă, există $(t_n)\to 0+$ şi $X\supset(u_n)\to u$ astfel ca $\bar{x}+t_nu_n\in L$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Deoarece $\bar{x}+t_nu_n\to\bar{x}\in\operatorname{int}D$, există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel ca $\bar{x}+t_nu_n\in D$ pentru $n\geq n_0$. Deci $u\in T_B(L\cap D,\bar{x})$. Prin urmare are loc şi egalitatea $T_B(L,\bar{x})=T_B(L\cap D,\bar{x})$. Demonstraţia pentru relaţiile corespunzătoare conului tangent în sensul lui Ursescu este la fel.

Egalitatea $T_C(L,\bar{x})=T_C(L\cap D,\bar{x})$ rezultă la fel ca şi în cazul conului lui Bouligand (verificând însă ambele incluziuni). Fie $u\in T_C(L,\bar{x})$ şi să arătăm că $u\in T_C(\overline{L},\bar{x})$. Pentru aceasta fie $\overline{L}\supset(\bar{x}_n)\to\bar{x}$ şi $(t_n)\to 0+$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există $x_n\in L$ astfel ca $\|\bar{x}_n-x_n\|<t_n/n$. Am obţinut astfel şirul $(x_n)_{n\geq 1}\subset L$ convergent la $\bar{x}$. Cum $u\in T_C(L,\bar{x})$, există $(u_n)\to u$ astfel ca $x_n+t_nu_n\in L$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Considerând $\bar{u}_n:=u_n+t_n^{-1}(x_n-\bar{x}_n)$, avem că $\bar{u}_n\to u$ şi $\bar{x}_n+t_n\bar{u}_n=x_n+t_nu_n\in L$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare $u\in T_C(\overline{L},\bar{x})$, ceea ce arată că $T_C(L,\bar{x})\subset T_C(\overline{L},\bar{x})$. Incluziunea inversă se dovedeşte analog.

Deoarece $x_n+t_n\cdot 0\in L$ pentru orice n, unde $(x_n)\subset L$ şi $(t_n)\subset]0,\infty[$ sunt şiruri arbitrare convergente la $\bar{x}$ respectiv 0, avem că $0\in T_C(L,\bar{x})$. Considerăm acum $u\in T_C(L,\bar{x})$ şi $\lambda\in]0,\infty[$. Fie $L\supset(x_n)\to\bar{x}$ şi $(t_n)\to 0+$. Cum $(\lambda t_n)\to 0+$, există $(u_n)\to u$ astfel ca $x_n+(\lambda t_n)u_n=x_n+t_n(\lambda u_n)\in L$ pentru orice n. Rezultă că $\lambda u\in T_C(L,\bar{x})$, şi deci $T_C(L,\bar{x})$ este con. Faptul că acest con este închis rezultă din Teorema 3.1.1. La fel se obţine că $T_B(L,\bar{x})$ şi $T_U(L,\bar{x})$ sunt conuri închise şi nevide.

Prima incluziune din (3.7), în cazul în care $\bar{x}\in L$ (ceea ce se poate presupune datorită relaţiei (3.6)), rezultă din faptul că se poate lua $x_n=\bar{x}$ pentru orice n în caracterizarea elementelor din $T_C(L,\bar{x})$, iar a doua incluziune rezultă fixând şirul $(t_n)\to 0+$, de exemplu $t_n:=2^{-n}$. Ultima incluziune din (3.7) rezultă din relaţia (3.8), dovedită în continuare.

Prima egalitate din (3.8) rezultă din (3.4). Fie $U\in\mathcal{U}(\bar{x})$ şi $u\in T_B(L,\bar{x})$; atunci există $(t_n)\to 0+$ şi $(u_n)\to u$ astfel ca $x_n:=\bar{x}+t_nu_n\in L$ pentru orice n. Deoarece $x_n\to\bar{x}$, există $n_U\in\mathbb{N}$ astfel ca $x_n\in U$ pentru $n\geq n_U$. Prin urmare $u_n\in\operatorname{con}(L\cap U-\bar{x})$ pentru orice $n\geq n_U$, şi deci $u\in C(L\cap U,\bar{x})$.

Fie acum u în mulţimea din dreapta a relaţiei (3.8); putem presupune că $u\neq 0$. Fie $n\in\mathbb{N}^*$; există $U_n\in\mathcal{U}(\bar{x})$ astfel ca $U_n\subset B(\bar{x},1/n)$. Din ipoteză avem că $u \in \overline{\text{con}}\,(L \cap U_n - \bar{x})$, şi deci $B(u, 1/n) \cap \text{con}\,(L \cap U_n - \bar{x}) \neq \emptyset$, ceea ce arată că există $x_n \in L \cap U_n \subset L \cap B(\bar{x}, 1/n)$ şi $t'_n \in [0, \infty[$ astfel ca $\|t'_n(x_n - \bar{x}) - u\| < 1/n$. Fie $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $1/n_0 < \|u\|$. Pentru $n \geq n_0$ obţinem că $t'_n \neq 0$; luând $t_n := 1/t'_n$ pentru $n \geq n_0$ şi $t_n := 1$ în rest, obţinem că $u_n := t_n^{-1}(x_n - \bar{x}) \to u$. Deoarece $x_n \to \bar{x}$, avem că $t_n \to 0$; putem deci conchide că $u \in T_B(L, \bar{x})$. Am obţinut astfel că (3.8) are loc.

Dacă $\bar{x} \in \text{int}\, L$ şi $u \in X$ atunci pentru orice şiruri $L \supset (x_n) \to \bar{x}$, $(t_n) \to 0+$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n + t_n u \in L$ pentru $n \geq n_0$. Prin urmare $u \in T_C(L, \bar{x})$. Ţinând seama şi de (3.7), avem că $T_C(L, \bar{x}) = T_U(L, \bar{x}) = T_B(L, \bar{x}) = X$ în acest caz.

(iii) Fie $u \in T_U(L, \bar{x})$ şi $v \in T_B(P, \bar{y})$. Din teorema precedentă obţinem existenţa şirurilor $(t_n) \to 0+$ şi $Y \supset (v_n) \to v$ astfel ca $\bar{y} + t_n v_n \in P$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru acest şir (t_n), tot din teorema precedentă obţinem existenţa şirului $X \supset (u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in L$ pentru orice n. Avem astfel că $(\bar{x}, \bar{y}) + t_n(u_n, v_n) \in L \times P$ pentru orice n. Cum $(u_n, v_n) \to (u, v)$, obţinem că $(u, v) \in T_B(L \times P, (\bar{x}, \bar{y}))$. Celelalte incluziuni rezultă în mod asemănător.

(iv) Fie $u \in T_B\left(L \cap f^{-1}(P), \bar{x}\right)$; există $(t_n) \to 0+$ şi $X \supset (u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in L \cap f^{-1}(P)$ pentru orice n. Cum $\bar{x} + t_n u_n \in L$ pentru orice n, $u \in T_B(L, \bar{x})$. Deoarece $\bar{x} + t_n u_n \to \bar{x} \in \text{int}\, D$, putem presupune că $\bar{x} + t_n u_n \in D$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru că f este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$, există un şir $(v_n) \subset Y$ convergent la 0 astfel ca

$$f(\bar{x} + t_n u_n) = f(\bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{x})(u_n) + t_n v_n \in P \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cum $\nabla f(\bar{x})(u_n) + v_n \to \nabla f(\bar{x})(u)$, rezultă că $\nabla f(\bar{x})(u) \in T_B(P, f(\bar{x}))$. Prin urmare $u \in T_B(L, \bar{x}) \cap \nabla f(\bar{x})^{-1}(T_B(P, f(\bar{x}))$, ceea ce dovedeşte incluziunea dorită. În mod asemănător se demonstrează şi relaţia corespunzătoare pentru conul tangent în sensul lui Ursescu. ∎

Relaţiile de la punctul (i) nu sunt valabile şi pentru conul tangent în sensul lui Clarke. De exemplu, luând $X := \mathbb{R}^2$, $L := \mathbb{R} \times \{0\}$, $M := \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ şi $\bar{x} = (0, 0)$, avem că $T_C(L, \bar{x}) = L$, iar $T_C(M, \bar{x}) = \{(0, 0)\}$. În schimb, conul tangent în sensul lui Clarke are alte proprietăţi remarcabile.

Teorema 3.1.4 *Fie $M \subset X$ şi $\bar{x} \in \overline{M}$. Atunci $T_C(M, \bar{x})$ este con convex şi închis. În plus*

$$T_C(M, \bar{x}) + T_U(M, \bar{x}) \subset T_U(M, \bar{x}), \quad T_C(M, \bar{x}) + T_B(M, \bar{x}) \subset T_B(M, \bar{x}).$$

Demonstraţie. Fie u, $v \in T_C(M, \bar{x})$. Considerăm $(x_n) \subset M$, $x_n \to \bar{x}$, şi $(t_n) \to 0+$. Deoarece $v \in T_C(M, \bar{x})$, aplicând Teorema 3.1.2, există $(v_n) \to v$

astfel ca $x'_n := x_n + t_n v_n \in M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x'_n \to \bar{x}$ şi $u \in T_C(M, \bar{x})$, există $(u_n) \to u$ astfel ca $x'_n + t_n u_n = x_n + t_n(u_n + v_n) \in M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $u_n + v_n \to u + v$, utilizând din nou Teorema 3.1.2, obţinem că $u + v \in T_C(M, \bar{x})$. Prin urmare

$$T_C(M, \bar{x}) + T_C(M, \bar{x}) \subset T_C(M, \bar{x}).$$

Ţinând seama de teorema precedentă, rezultă că $T_C(M, \bar{x})$ este con convex.
Celelalte două incluziuni se obţin în mod asemănător. ∎

Referitor la legătura dintre aceste conuri este interesant următorul rezultat.

Teorema 3.1.5 *Fie X spaţiu Banach, $M \subset X$ o mulţime închisă şi $x \in M$. Atunci*

$$\liminf_{M \ni y \to x} T_B(M, y) \subset T_C(M, x). \tag{3.9}$$

Dacă $\dim X < \infty$ *atunci în (3.9) are loc egalitate.*

Demonstraţie. Presupunem că (3.9) nu are loc. Atunci există un element $u \in \liminf_{M \ni y \to x} T_B(M, y)$ astfel încât $u \notin T_C(M, x)$; este evident că $u \neq 0$. Deoarece $u \notin T_C(M, x)$, există $\varepsilon_0 \in]0, \min\{\|u\|/6, 1/2\}[$ astfel ca

$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\, y \in D(x, \eta) \cap M,\ \exists\, t \in]0, \eta]\ :\ t^{-1}(M - y) \cap D(u, \varepsilon_0) = \emptyset,$$

sau, echivalent,

$$\forall\, \eta > 0,\ \exists\, y \in D(x, \eta) \cap M,\ \exists\, t \in]0, \eta]\ :\ [y + t \cdot D(u, \varepsilon_0)] \cap M = \emptyset. \tag{3.10}$$

Pentru acest $\varepsilon_0 > 0$, deoarece $u \in \liminf_{M \ni y \to x} T_B(M, y)$, există $\eta_1 > 0$ astfel ca

$$\forall\, y \in D(x, \eta_1) \cap M\ :\ D(u, \varepsilon_0/2) \cap T_B(M, y) \neq \emptyset. \tag{3.11}$$

Fie $\bar{\eta} := \eta_1/(1 + 2\|u\|)$. Pentru acest $\bar{\eta} > 0$, din (3.10), există $\bar{x} \in D(x, \bar{\eta}) \cap M$ şi $\bar{t} \in]0, \bar{\eta}]$ astfel ca

$$[\bar{x} + \bar{t} \cdot D(u, \varepsilon_0)] \cap M = \emptyset. \tag{3.12}$$

Fie $X_0 := [\bar{x} + [0, \bar{t}\,] \cdot D(u, \varepsilon_0)] \cap M$ şi $f : X_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) := -\|x - \bar{x}\|$. Este evident că (X_0, d), $d(x, y) := \|x - y\|$, este spaţiu metric complet, iar f este continuă (deci i.s.c.) şi mărginită inferior (deoarece $X_0 \subset X$ este mulţime mărginită). Aplicând principiul variaţional al lui Ekeland, există $\bar{z} \in X_0$ astfel ca

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|\bar{z} - \bar{x}\| + \varepsilon_0 \|x - \bar{z}\| \quad \forall\, x \in X_0. \tag{3.13}$$

Deoarece $\bar{z} \in X_0$, există $\alpha \in [0,1]$ şi $\bar{v} \in D(u, \varepsilon_0)$ astfel ca $\bar{z} = \bar{x} + (1-\alpha)\bar{t}\bar{v}$. Din (3.12) avem că $\alpha > 0$. În plus $\bar{z} \in D(x, \eta_1) \cap M$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \|\bar{z} - x\| &= \|\bar{x} + (1-\alpha)\bar{t}\bar{v} - x\| \leq \|\bar{x} - x\| + \bar{t}(\|u\| + \varepsilon_0) \\ &\leq \bar{\eta}(1 + \|u\| + \varepsilon_0) < \bar{\eta}(1 + 2\|u\|) = \eta_1. \end{aligned}$$

Din (3.11) avem că există $\bar{u} \in D(u, \varepsilon_0/2) \cap T_B(M, \bar{z})$; deci există $(t_n) \to 0+$, $(u_n) \to \bar{u}$ astfel ca $\bar{z} + t_n u_n \in M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Desigur, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $t_n \leq \alpha\bar{t}$ şi $u_n \in D(u, \varepsilon_0)$ pentru $n \geq n_0$. Atunci

$$\begin{aligned} \bar{z} + t_n u_n &= \bar{x} + (1-\alpha)\bar{t} \cdot \bar{v} + t_n u_n = \bar{x} + (1-\alpha)\bar{t} \cdot \bar{v} + \alpha(t_n/\alpha)u_n \\ &\in \bar{x} + (1-\alpha)[0, \bar{t}\,] \cdot D(u, \varepsilon_0) + \alpha \cdot [0, \bar{t}\,] \cdot D(u, \varepsilon_0) \\ &= \bar{x} + [0, \bar{t}\,] \cdot D(u, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Prin urmare $\bar{z} + t_n u_n \in X_0$ pentru $n \geq n_0$. Utilizând la început (3.13), obţinem succesiv

$$\|\bar{z} + t_n u_n - \bar{x}\| \leq \|\bar{z} - \bar{x}\| + \varepsilon_0 \|\bar{z} + t_n u_n - \bar{z}\| \quad \forall\, n \geq n_0,$$

$$\|(1-\alpha)\bar{t}\bar{v} + t_n u_n\| \leq (1-\alpha)\bar{t}\|\bar{v}\| + \varepsilon_0 t_n \|u_n\| \quad \forall\, n \geq n_0,$$

$$\|[(1-\alpha)\bar{t} + t_n]\bar{v} + t_n(u_n - \bar{v})\| \leq (1-\alpha)\bar{t}\|\bar{v}\| + \varepsilon_0 t_n \|u_n\| \quad \forall\, n \geq n_0,$$

$$[(1-\alpha)\bar{t} + t_n] \cdot \|\bar{v}\| - t_n\|u_n - \bar{v}\| \leq (1-\alpha)\bar{t}\|\bar{v}\| + \varepsilon_0 t_n \|u_n\| \quad \forall\, n \geq n_0,$$

$$\|\bar{v}\| \leq \|u_n - \bar{v}\| + \varepsilon_0 \|u_n\| \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Trecând la limită în ultima relaţie obţinem că

$$\|\bar{v}\| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\| + \varepsilon_0 \|\bar{u}\|.$$

Însă $\|\bar{v}\| \geq \|u\| - \varepsilon_0$,

$$\|\bar{u} - \bar{v}\| \leq \|\bar{u} - u\| + \|u - \bar{v}\| \leq \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0 = 3\varepsilon_0/2,$$

$$\|\bar{u}\| \leq \|\bar{u} - u\| + \|u\| \leq \|u\| + \varepsilon_0/2 < \|u\| + 1/2,$$

şi deci

$$\|u\| - \varepsilon_0 < 3\varepsilon_0/2 + \|u\|/2 + \varepsilon_0/2.$$

Obţinem astfel contradicţia $\|u\| < 6\varepsilon_0$. Deci (3.9) are loc.

Presupunem acum că $\dim X < \infty$. Fie $u \in T_C(M, x) \setminus \{0\}$ şi $\varepsilon > 0$. Există $\eta > 0$ astfel ca

$$\forall\, y \in D(x, \eta) \cap M, \ \forall\, t \in]0, \eta[\ : \ d\left(u, t^{-1}(M - y)\right) < \varepsilon/2.$$

Fie $y \in B(x,\eta) \cap M$ fixat şi $(t_n) \to 0+$; putem presupune că $t_n < \eta$ pentru orice $n \in I\!N$. Pentru fiecare $n \in I\!N$ există $y_n \in M$ astfel ca $\|u - t_n^{-1}(y_n - y)\| < \varepsilon/2$. Rezultă că şirul $(t_n^{-1}(y_n - y))$ este mărginit, şi deci are un subşir convergent, adică există un şir strict crescător $(n_k) \subset I\!N$ astfel ca $t_{n_k}^{-1}(y_{n_k} - y) \to u_y \in X$; este evident că $u_y \in T_B(M,y)$. În plus $\|u - u_y\| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Deci

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in B(x,\eta) \cap M\ :\ d\,(u, T_B(M,y)) < \varepsilon,$$

adică $\lim_{M \ni y \to x} d\,(u, T_B(M,y)) = 0$. Prin urmare $u \in \liminf_{y \to x} T_B(M,y)$, ceea ce arată că în (3.9) are loc egalitate. ∎

În cazul în care $\dim X < \infty$ se poate arăta că pentru orice mulţime închisă şi nevidă $M \subset X$ şi $x \in M$ are loc relaţia

$$\liminf_{M \ni y \to x} \overline{\operatorname{conv}}\,(T_B(M,y)) = T_C(M,x).$$

Este util de observat că în cazul mulţimilor convexe cele trei (chiar patru) conuri coincid.

Teorema 3.1.6 *Fie $M \subset X$ o mulţime convexă şi $\bar{x} \in \overline{M}$. Atunci*

$$T_C(M,\bar{x}) = T_U(M,\bar{x}) = T_B(M,\bar{x}) = C(M,\bar{x}). \tag{3.14}$$

Dacă M este con convex atunci $C(M,\bar{x}) = \overline{M - I\!R\bar{x}}$. În particular, dacă M este un subspaţiu liniar atunci $C(M,\bar{x}) = \overline{M}$. Dacă

$$M := \{x \in X \mid \langle x, x_i^* \rangle \le \alpha_i \quad \forall i,\ 1 \le i \le n\}, \tag{3.15}$$

unde $n \in I\!N^*$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I\!R$, iar $I(\bar{x}) := \{i \mid 1 \le i \le n, \langle \bar{x}, x_i^* \rangle = \alpha_i\}$, atunci

$$\operatorname{con}(M - \bar{x}) = \{u \in X^* \mid \langle u, x_i^* \rangle \le 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})\}. \tag{3.16}$$

Desigur, dacă $I(\bar{x}) = \emptyset$ atunci $\operatorname{con}(M - \bar{x}) = X$.

Demonstraţie. Având în vedere că pentru orice mulţime nevidă $A \subset X$ avem că $\overline{\operatorname{con}}\, A = \overline{\operatorname{con}}\, \bar{A}$, ţinând seama şi de (3.6), putem presupune că $\bar{x} \in M$ (sau că M este închisă). Fie pentru început $x \in M$ şi $u := x - \bar{x}$. Arătăm că $u \in T_C(M,\bar{x})$. Pentru aceasta fie $(x_n) \subset M$ şi $(t_n) \subset]0,\infty[$ astfel ca $x_n \to \bar{x}$ şi $t_n \to 0$. Există $n_0 \in I\!N$ astfel ca $t_n \le 1/2$ pentru $n \ge n_0$. Considerăm $u_n := x + \bar{x} - 2x_n$; avem că $x_n + t_n u_n = (1 - 2t_n)x_n + t_n x + t_n \bar{x} \in M$ pentru orice $n \ge n_0$, şi $u_n \to u$. Prin urmare $u \in T_C(M,\bar{x})$, şi deci $M - \bar{x} \subset T_C(M,\bar{x})$.

Deoarece $T_C(M, \bar{x})$ este con închis, din incluziunea precedentă obţinem că $\overline{\text{con}}\,(M - \bar{x}) \subset T_C(M, \bar{x})$. Relaţia (3.14) rezultă acum din (3.7).

Presupunem că M este con convex. Deoarece $\overline{M + \mathbb{R} \cdot \bar{x}} = \overline{\overline{M} + \mathbb{R} \cdot \bar{x}}$, putem considera şi în acest caz că $\bar{x} \in M$. În această situaţie are loc relaţia $\text{con}\,(M - \bar{x}) = M - [0, \infty[\,\cdot \bar{x} = M - \mathbb{R}\bar{x}$, de unde concluzia este evidentă. Desigur, dacă M este subspaţiu liniar atunci $\overline{M + \mathbb{R}\bar{x}} = \overline{M}$.

Fie acum M dat de relaţia (3.15) şi $\bar{x} \in M$. Dacă $u \in \text{con}\,(M - \bar{x})$, adică $u = t(x - \bar{x})$ cu $t \geq 0,\ x \in M$, iar $i \in I(\bar{x})$ atunci

$$\langle u, x_i^* \rangle = t \cdot \langle x - \bar{x}, x_i^* \rangle = t(\langle x, x_i^* \rangle - \alpha_i) \leq 0,$$

şi deci are loc incluziunea "$\subset$" din (3.16).

Considerăm acum $u \in X$ astfel ca $\langle u, x_i^* \rangle \leq 0$ pentru orice $i \in I(\bar{x})$. Pentru $i \in I(\bar{x})$ şi $t \geq 0$ avem că $\langle \bar{x} + tu, x_i^* \rangle = \langle \bar{x}, x_i^* \rangle + t\langle u, x_i^* \rangle \leq \alpha_i$. Dacă $i \notin I(\bar{x})$ atunci există $\varepsilon_i > 0$ astfel ca $\langle \bar{x} + tu, x_i^* \rangle < \alpha_i$ pentru orice $t \in]0, \varepsilon_i[$. Luând $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n,\ i \notin I(\bar{x})\}$, obţinem că $\bar{x} + tu \in M$ pentru orice $t \in]0, \varepsilon[$, şi deci $u \in \text{con}\,(M - \bar{x})$. Prin urmare (3.16) are loc. ∎

O mulţime de tipul celei din relaţia (3.15) se numeşte mulţime *poliedrală*.

Fie $M \subset X$ mulţime convexă şi $x \in M$. Ţinând seama de (2.21) şi de teorema bipolarei (Teorema 1.5.7), avem că în acest caz

$$C(M, x) = -N(M, x)^+.$$

Utilizând Consecinţa 2.7.2, obţinem următorul rezultat.

Teorema 3.1.7 *Fie $L \subset X$ şi $M \subset Y$ două mulţimi convexe şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Presupunem că una din următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) *există $x_0 \in L$ astfel că $Ax_0 \in \text{int}\, M$,*

(ii) *X, Y sunt spaţii Banach, L, M sunt închise şi $0 \in \text{ric}\,(A(L) - M)$,*

(iii) *$\dim Y < \infty$ şi $0 \in \text{raint}\,(A(L) - M)$.*

Atunci

$$C\left(L \cap A^{-1}(M), x\right) = C(L, x) \cap A^{-1}(C(M, Ax)) \quad \forall\, x \in L \cap A^{-1}(M).$$

Demonstraţie. Formula indicată rezultă imediat din (2.40) şi proprietăţi ile 5) şi 8) puse în evidenţă imediat după definiţia polarei (vezi Secţiunea 1.5). ∎

La punctul (iv) al Teoremei 3.1.3 am obţinut o estimare pentru conul $T_B\,(L \cap f^{-1}(M), \bar{x})$; în aplicaţii, după cum vom vedea în cele ce urmează, mai utilă este incluziunea inversă. Estimări de acest tip vom obţine în secţiunea următoare.

Înainte de a încheia această secţiune remarcăm că dacă $A \subset X \times \mathbb{R}$ este o mulţime de tip epigraf, iar $\bar{x} \in \bar{A}$, atunci $T_B(A, \bar{x})$, $T_U(A, \bar{x})$ şi $T_C(A, \bar{x})$ sunt de asemenea mulţimi de tip epigraf. Astfel, dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este o funcţie, iar $\bar{x} \in X$ este astfel ca $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, atunci $T_S(\operatorname{epi} f, (\bar{x}, f(\bar{x})))$, $S \in \{B, U, C\}$, este epigraful unei funcţii (pozitiv omogene), numită (epi-) derivata direcţională a funcţiei f în $\bar{x}$ în sensul lui Bouligand, Ursescu respectiv Clarke; fie aceste funcţii $D_B f(\bar{x})$, $D_U f(\bar{x})$ respectiv $D_C f(\bar{x})$. Dacă f este lipschitziană pe o vecinătate a lui $\bar{x}$, se obţine cu (relativă) uşurinţă că pentru fiecare $u \in X$

$$\begin{aligned} D_B f(\bar{x})(u) &= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t}, \\ D_U f(\bar{x})(u) &= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \end{aligned}$$

şi

$$D_C f(\bar{x})(u) = \limsup_{x \to \bar{x},\, t \downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Deoarece $T_C(\operatorname{epi} f, (\bar{x}, f(\bar{x})))$ este con convex închis, avem că $D_C f(\bar{x})$ este funcţională subliniară (continuă dacă f este lipschitziană pe o vecinătate a lui $\bar{x}$). Subdiferenţiala în sensul lui Clarke a funcţiei f în $\bar{x}$ se defineşte ca fiind $\partial D_C f(\bar{x})(0)$. Utilizând Teorema 3.2.3 se pot obţine formule (mai exact estimări) pentru derivatele direcţionale definite mai sus ale unor funcţii de forma $f + g \circ h$, şi deci estimări pentru subdiferenţiala în sensul lui Clarke pentru astfel de funcţii. În literatura matematică se găsesc multe rezultate referitoare la programarea matematică, obţinute prin utilizarea, ca instrument de bază, a subdiferenţialei în sensul lui Clarke. În acest capitol vom pune în evidenţă numai rezultate referitoare la probleme de programare matematică în care funcţiile care apar sunt Fréchet diferenţiabile. Secţiunea următoare are caracter ajutător în această direcţie.

3.2 Formule de calcul pentru conuri tangente

Concluzia Teoremei 1.10.10 este deosebit de utilă pentru calculul, mai exact estimarea, conurilor tangente la mulţimi de tipul $L \cap f^{-1}(P)$. Având în vedere acest fapt punem în evidenţă mai întâi câteva condiţii suficiente pentru ca să fie îndeplinită condiţia (1.30), şi deci să aibă loc concluzia Teoremei 1.10.10.

Teorema 3.2.1 (Aubin-Frankowska). *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu normat, $D \subset X$ mulţime deschisă, $f : D \to Y$ funcţie F-diferenţiabilă, $M \subset X$ mulţime închisă şi $\bar{x} \in M \cap D$. Presupunem că una din următoarele patru condiţii este îndeplinită:*

(i) *există $\eta > 0,\ c > 0$ şi $\alpha \in [0,1[$ astfel ca $D(\bar{x},\eta) \subset D$ şi*

$$\forall\, x \in D(\bar{x},\eta) \cap M \ :\ U_Y \subset \nabla f(x)\,(T_B(M,x) \cap cU_X) + \alpha U_Y; \tag{3.17}$$

(ii) *Y este spaţiu Banach, ∇f este continuă în $\bar{x}$, $\nabla f(\bar{x})\,(T_B(M,\bar{x})) = Y$ şi*

$$\lim_{M \ni x \to \bar{x}} \left(\sup_{u \in T_B(M,\bar{x}) \cap S_X} d\,(u, T_B(M,x)) \right) = 0; \tag{3.18}$$

(iii) $\dim Y < \infty$, *∇f este funcţie continuă în $\bar{x}$ şi*

$$\nabla f(\bar{x})\,(T_C(M,\bar{x})) = Y; \tag{3.19}$$

(iv) $\dim Y < \infty$, *∇f este funcţie continuă în $\bar{x}$, $\nabla f(\bar{x})\,(T_B(M,\bar{x})) = Y$ şi*

$$T_B(M,\bar{x}) \subset \liminf_{M \ni x \to \bar{x}} T_B(M,x). \tag{3.20}$$

Atunci există $\gamma,\ l > 0$ astfel ca $D(\bar{x},\gamma) \subset D$ şi

$$\forall\, x' \in D(\bar{x},\gamma) \cap M,\ \forall\, y \in D(f(\bar{x}),\gamma),\ \exists\, x \in D \cap M \ :$$
$$f(x) = y \text{ şi } \|x - x'\| \le l \cdot \|y - f(x')\|.$$

Demonstraţie. (i) Fie $c' := 2c > 0$ şi $\alpha' := (\alpha+1)/2 \in]0,1[$. Arătăm că are loc (1.30) pentru η, c' şi α'. Fie deci $x \in D(\bar{x},\eta) \cap M$ şi $t > 0$. Considerăm $v \in S_Y$; din (3.17), există $u \in T_B(M,x) \cap cU_X$ şi $w \in \alpha U_Y$ astfel ca $v = \nabla f(x)(u) + w$. Deoarece $u \in T_B(M,x)$, există $(t_n) \to 0+$ şi $(u_n) \to u$ astfel ca $x_n := \bar{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Este evident că

$$v = \nabla f(x)(u_n) + \nabla f(x)(u - u_n) + w \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Deoarece $\|u\| \le c < c',\ u_n \to u,\ t_n \to 0 < 1/t$ şi $\|w\| \le \alpha < \alpha'$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel că pentru $n \ge n_0$ avem: $\|u_n\| \le c',\ t_n \le 1/t$ şi $\|\nabla f(x)(u - u_n) + w\| \le \alpha'$. Fixând un $n \ge n_0$, (3.21) ne arată că

$$v \in \nabla f(x)\,([t,\infty[\,\cdot (M - x) \cap c'U_X) + \alpha' U_Y,$$

adică (1.30) are loc.

(ii) Arătăm că în această situaţie (i) are loc. Observăm mai întâi că (3.18) $\Rightarrow$ (3.20); aplicând Teorema 3.1.5, obţinem că $T_B(M,\bar{x}) \subset T_C(M,\bar{x})$. Prin urmare $T_B(M,\bar{x}) = T_C(M,\bar{x})$, şi deci (3.19) are loc. Considerăm aplicaţia multivocă

$$\mathcal{R} : X \rightsquigarrow Y, \quad \mathcal{R}(u) := \begin{cases} \{\nabla f(\bar{x})(u)\} & \text{dacă} \quad u \in T_C(M,\bar{x}) \\ \emptyset & \text{dacă} \quad u \notin T_C(M,\bar{x}). \end{cases}$$

Este clar că $\operatorname{gr}\mathcal{R} = \operatorname{gr}\nabla f(\bar{x}) \cap (T_C(M,\bar{x}) \times Y)$, şi deci $\operatorname{gr}\mathcal{R}$ este con convex închis. În plus $\operatorname{Im}\mathcal{R} = Y$. Utilizând Teorema lui Robinson-Ursescu (Teorema 1.8.8), obţinem că există $\rho > 0$ astfel ca $\rho U_Y \subset \mathcal{R}(U_X)$, ceea ce ne arată că există $k := \max\{1/\rho, 1\} \geq 1$ astfel ca

$$\forall\, v \in Y,\ \exists\, u \in T_C(M,\bar{x})\ :\ \|u\| \leq k \cdot \|v\|,\ \nabla f(\bar{x})(u) = v. \tag{3.22}$$

Fie $\alpha \in]0,1[$ fixat şi

$$\mu := \frac{\alpha}{2k(\|\nabla f(\bar{x})\| + 2)} \in]0,1[, \quad c := k(1+\mu) > 0. \tag{3.23}$$

Utilizând continuitatea lui ∇f în $\bar{x}$, avem că există $\eta_0 > 0$ astfel ca

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| \leq \mu \ \ \forall\, x \in D(\bar{x},\eta_0), \tag{3.24}$$

iar din (3.18) obţinem că există $\eta_1 > 0$ astfel ca

$$\forall\, x \in D(\bar{x},\eta_1) \cap M,\ \forall\, \bar{u} \in T_B(M,\bar{x}),\ \exists\, u \in T_B(M,x)\ :\ \|u - \bar{u}\| \leq \mu\|\bar{u}\|. \tag{3.25}$$

Fie $\eta := \min\{\eta_0,\eta_1\}$ şi $x \in D(\bar{x},\eta)$, $v \in U_Y$ fixaţi. Din (3.22) obţinem existenţa unui element $\bar{u} \in T_B(M,\bar{x}) = T_C(M,\bar{x})$ astfel ca $\nabla f(\bar{x})(\bar{u}) = v$ şi $\|\bar{u}\| \leq k \cdot \|v\| \leq k$. Din (3.25) există $u \in T_B(M,x)$ astfel ca $\|u - \bar{u}\| \leq \mu\|\bar{u}\|$; deci $\|u\| \leq \|u - \bar{u}\| + \|\bar{u}\| \leq \mu k + k = c$. Considerăm

$$w := \nabla f(\bar{x})(\bar{u}) - \nabla f(x)(u) = (\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x))\,(u) + \nabla f(\bar{x})(\bar{u} - u),$$

şi deci

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)\| \cdot \|u\| + \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|\bar{u} - u\| \\ &\leq \mu(k + \mu k + k \cdot \|\nabla f(\bar{x})\|) \leq \mu k(2 + \|\nabla f(\bar{x})\|) \\ &\leq \alpha/2 < \alpha. \end{aligned}$$

Cum $v = \nabla f(x)(u) + w$, am obţinut că (3.17) are loc.

(iii) Ca la demonstraţia punctului (ii), avem că există $k \in [1,\infty[$ pentru care (3.22) are loc. Considerăm $\alpha \in]0,1[$ fixat şi alegem μ, $c > 0$ definiţi de

(3.23), iar $\eta_0 > 0$ pentru care (3.24) are loc. Deoarece $\dim Y < \infty$, mulţimea S_Y este compactă, şi deci există $v_1, \ldots, v_p \in S_Y$ astfel ca

$$S_Y \subset \bigcup\nolimits_{i=1}^{p} B\left(v_i, \tfrac{\alpha}{2}\right). \tag{3.26}$$

Pentru fiecare i, $1 \leq i \leq p$, există $u_i \in T_C(M, \bar{x})$ astfel ca $\|u_i\| \leq k \cdot \|v_i\| = k$ şi $\nabla f(\bar{x})(u_i) = v_i$. Din definiţia conului $T_C(M, \bar{x})$, există $\eta_i > 0$ astfel ca

$$\forall\, x \in D(\bar{x}, \eta_i) \cap M,\ \forall\, t \in]0, \eta_i]\ :\ B(u_i, \mu) \cap t^{-1}(M - x) \neq \emptyset,$$

adică

$$\forall\, x \in D(\bar{x}, \eta_i) \cap M,\ \forall\, t \in]0, \eta_i]\ :\ u_i \in t^{-1}(M - x) + \mu B_X. \tag{3.27}$$

Fie $\eta := \min\{\eta_0, \ldots, \eta_p\} > 0$. Dorim să arătăm că pentru η, c şi α determinaţi mai sus are loc (1.30). Fie $\tau > 0$ şi $x \in D(\bar{x}, \eta) \cap M$ fixaţi. Considerăm $t := \min\{1/\tau, \mu\} > 0$. Fie $v \in S_Y$; din (3.26) avem că există i, $1 \leq i \leq p$, astfel ca $\|v - v_i\| < \alpha/2$. Deoarece $x \in D(\bar{x}, \eta_i) \cap M$ şi $t \in]0, \eta_i]$, din (3.27), există $x_i \in M$ şi $b_i \in B_X$ astfel ca $u_i = t^{-1}(x_i - x) + \mu b_i$. Fie $u := t^{-1}(x_i - x)$; din cele de mai sus avem că

$$\|u\| = \|u_i - \mu b_i\| \leq \|u_i\| + \mu\|b_i\| \leq k + \mu \leq c,$$

şi deci $u \in [\tau, \infty[\, \cdot (M - x) \cap cU_X$. Considerăm

$$\begin{aligned} w &:= v - v_i + \nabla f(\bar{x})(u_i) - \nabla f(x)(u) \\ &= v - v_i + (\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x))\,(u) + \nabla f(\bar{x})(\bar{u} - u). \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|v - v_i\| + \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)\| \cdot \|u\| + \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|\bar{u} - u\| \\ &\leq \alpha/2 + \mu(k + \mu) + \mu \cdot \|\nabla f(\bar{x})\| \leq \alpha/2 + \mu k(2 + \|\nabla f(\bar{x})\|) \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Cum $v = \nabla f(x)(u) + w$, obţinem din nou că (1.30) are loc.

(iv) Am observat deja la demonstraţia punctului (ii) că (3.20) implică faptul că $T_C(M, \bar{x}) = T_B(M, \bar{x})$, şi deci condiţiile de la (iii) sunt îndeplinite.

Prin urmare în toate cele patru cazuri condiţia (1.30) este satisfăcută, şi deci, conform Teoremei 1.10.10, concluzia teoremei are loc. ∎

O consecinţă imediată a acestui rezultat este binecunoscuta teoremă a lui Graves.

Teorema 3.2.2 (Graves). *Fie X, Y spaţii Banach, $D \subset X$ o mulţime deschisă, şi $h : D \to Y$ o funcţie F-diferenţiabilă pe D astfel ca ∇f să fie continuă în $\bar{x} \in D$. Presupunem că $\nabla h(\bar{x})(X) = Y$. Atunci există $\gamma,\ l > 0$ astfel ca $D(\bar{x}, \gamma) \subset D$ şi*

$$\forall\, u \in D(\bar{x}, \gamma),\ \forall\, y \in D(h(\bar{x}), \gamma),\ \exists\, x \in D\ :\ h(x) = y,\ \|x - u\| \leq l \cdot \|y - h(u)\|.$$

Demonstraţie. Observăm că luând $M := X$, condiţiile de la punctul (ii) din teorema precedentă sunt îndeplinite. Prin urmare concluzia teoremei are loc. ∎

Observăm că relaţia (3.18) este îndeplinită dacă M este mulţime poliedrală. Într-adevăr, fie M definită de (3.15) cu $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, iar pentru $x \in M$, $I(x) := \{i \mid 1 \leq i \leq n,\ \langle x, x_i^* \rangle = \alpha_i\}$. Fie $\bar{x} \in M$ fixat. Dacă $i \notin I(\bar{x})$ atunci există $\eta_i > 0$ astfel ca $\langle x, x_i^* \rangle < \alpha_i$ pentru orice $x \in B(\bar{x}, \eta_i)$; luând $\eta := \min\{\eta_i \mid i \in I(\bar{x})\}$, avem că $I(x) \subset I(\bar{x})$ pentru orice $x \in B(\bar{x}, \eta) \cap M$, şi deci, din Teorema 3.1.6, avem că $T_B(M, \bar{x}) \subset T_B(M, x)$ pentru orice $x \in B(\bar{x}, \eta) \cap M$. Această relaţie ne arată că (3.18) are loc.

O altă situaţie în care (3.18) are loc în mod evident este aceea în care M este subspaţiu liniar, deoarece, după cum am văzut în Teorema 3.1.6, pentru fiecare $x \in \overline{M}$ avem că $T_B(M, x) = \overline{M}$.

De asemenea, dacă mulţimile $L \subset X$ şi $P \subset Y$ satisfac condiţia (3.18) în $\bar{x} \in L$ respectiv $\bar{y} \in P$, iar una din mulţimile $L,\ P$ este convexă atunci $L \times P$ satisface condiţia (3.18) în $(\bar{x}, \bar{y})$. Într-adevăr, din Teorema 3.1.3 (iii) şi Teorema 3.1.6, avem că $T_B(L \times P, (x, y)) = T_B(L, x) \times T_B(P, y)$ pentru orice $(x, y) \in L \times P$. Considerând pe $X \times Y$, ca de obicei, norma maximum ($\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$), pentru $x \in X,\ y \in Y,\ A \subset X,\ B \subset Y$ avem că $d((x, y), A \times B) \leq \max\{d(x, A), d(y, B)\}$. Utilizând această observaţie, obţinem imediat că $L \times P$ satisface (3.18) în $(\bar{x}, \bar{y})$.

Punem în evidenţă în continuare câteva formule pentru conuri tangente.

Teorema 3.2.3 *Fie X, Y spaţii Banach, $L \subset X,\ P \subset Y$ mulţimi închise, $D \subset X$ mulţime deschisă şi $g : D \to Y$ o funcţie F-diferenţiabilă astfel că ∇g este continuă în $\bar{x} \in D \cap L \cap g^{-1}(P)$. Presupunem că*

a) *există $\eta,\ c > 0$ şi $\alpha \in]0, 1[$ astfel ca*

$$\begin{aligned}&\forall\, x \in D(\bar{x}, \eta) \cap L,\ \forall\, y \in D(g(\bar{x}), \eta) \cap P\ :\\ &\qquad U_Y \subset \nabla g(x)(T_B(L, x) \cap cU_X) - T_U(P, g(\bar{x})) + \alpha U_Y,\end{aligned} \tag{3.28}$$

sau că

$$\nabla g(\bar{x})\,(T_C(L, \bar{x})) - T_C(P, g(\bar{x})) = Y, \tag{3.29}$$

şi că una din următoarele două condiţii este îndeplinită:

b) $\dim Y < \infty$ *şi are loc (3.29),*

c) *L şi P satisfac condiţia (3.18) în $\bar{x}$ respectiv $g(\bar{x})$, L sau P este convexă şi are loc (3.29).*

Atunci

$$T_B(L,\bar{x}) \cap \nabla g(\bar{x})^{-1}\left(T_U(P,g(\bar{x}))\right) \subset T_B(L \cap g^{-1}(P),\bar{x}), \tag{3.30}$$

$$T_U(L,\bar{x}) \cap \nabla g(\bar{x})^{-1}\left(T_B(P,g(\bar{x}))\right) \subset T_B(L \cap g^{-1}(P),\bar{x}), \tag{3.31}$$

$$T_U(L,\bar{x}) \cap \nabla g(\bar{x})^{-1}\left(T_U(P,g(\bar{x}))\right) = T_U(L \cap g^{-1}(P),\bar{x}), \tag{3.32}$$

$$T_C(L,\bar{x}) \cap \nabla g(\bar{x})^{-1}\left(T_C(P,g(\bar{x}))\right) \subset T_C(L \cap g^{-1}(P),\bar{x}). \tag{3.33}$$

Demonstraţie. Considerăm pe $X \times Y$ norma maximum, amintită mai sus. Aplicăm Teorema 3.2.1 pentru funcţia $f : D \times Y \to Y,\ f(x,y) := g(x) - y$, mulţimea $L \times P$ şi punctul $(\bar{x}, g(\bar{x}))$. Avem că $\nabla f(x,y)(u,v) = \nabla g(x)(u) - v$ pentru $(x,y) \in D \times Y,\ (u,v) \in X \times Y$, iar din Teorema 3.1.3 (iii) avem că

$$T_C(L \times P, (\bar{x}, g(\bar{x})) \;=\; T_C(L,\bar{x}) \times T_C(P, g(\bar{x})),$$

$$T_B(L \times P, (\bar{x}, g(\bar{x})) \;\supset\; T_B(L,\bar{x}) \times T_U(P, g(\bar{x})).$$

Din ultima relaţie rezultă că (3.17) are loc în cazul în care (3.28) este verificată. Dacă (3.29) are loc atunci este satisfăcută condiţia (3.19). Aplicând punctul (i), (ii) sau (iii) al Teoremei 3.2.1, după cum este verificată a), b) respectiv c), obţinem că există γ, $l > 0$ astfel ca $D(\bar{x},\gamma) \subset D$ şi

$$\forall (x',y') \in D((\bar{x}, g(\bar{x})),\gamma) \cap L \times P,\ \forall\, z \in D(0,\gamma),\ \exists\,(x,y) \in L \times P \cap D \times Y \ :$$
$$f(x,y) = z,\ \|(x,y) - (x',y')\| \le l \cdot \|z - f(x',y')\|.$$

Luând $z = 0$ obţinem că

$$\forall\, x' \in D(\bar{x},\gamma) \cap L,\ \forall\, y' \in D(g(\bar{x}),\gamma) \cap P,\ \exists\, x \in L \cap g^{-1}(P)\ :$$
$$\|x - x'\| \le l \cdot \|g(x') - y'\|. \tag{3.34}$$

Fie

$$u \in T_C(L,\bar{x}) \cap \nabla g(\bar{x})^{-1}\left(T_C(P, g(\bar{x}))\right), \quad L \cap g^{-1}(P) \supset (x_n) \to \bar{x}$$

şi $(t_n) \to 0+$. Atunci $L \times P \supset (x_n, g(x_n)) \to (\bar{x}, g(\bar{x}))$. Deoarece

$$(u, \nabla g(\bar{x})(u)) \in T_C(L,\bar{x}) \times T_C(P, g(\bar{x})) = T_C(L \times P, (\bar{x}, g(\bar{x})),$$

există $((u_n, v_n)) \to (u, \nabla g(\bar{x})(u))$ astfel ca $x_n + t_n u_n \in L$ şi $g(x_n) + t_n v_n \in P$ pentru orice n. Există $n_0 \in I\!N$ astfel ca

$$x_n + t_n u_n \in D(\bar{x}, \gamma), \quad g(x_n) + t_n v_n \in D(g(\bar{x}), \gamma) \ \ \forall\, n \geq n_0.$$

Din (3.34) avem că există $\hat{x}_n \in L \cap g^{-1}(P)$ astfel ca

$$\|x_n + t_n u_n - \hat{x}_n\| \leq l \cdot \|g(x_n + t_n u_n) - g(x_n) - t_n v_n\|.$$

Din Consecinţa 1.10.1 avem că

$$\frac{g(x_n + t_n u_n) - g(x_n)}{t_n} \to \nabla g(\bar{x})(u),$$

şi deci, din relaţia de mai sus, obţinem că $\hat{u}_n := t_n^{-1}(\hat{x}_n - x_n) \to u$. Deoarece $x_n + t_n \hat{u}_n = \hat{x}_n \in L \cap g^{-1}(P)$ pentru $n \geq n_0$, avem că $u \in T_C(L \cap g^{-1}(P), \bar{x})$. Deci are loc (3.33). Incluziunile '$\subset$' din relaţiile (3.30)–(3.32) rezultă în mod asemănător. Singura deosebire este că $x_n = \bar{x}$ pentru orice n. Incluziunea '$\supset$' din (3.32) este dată în Teorema 3.1.3 (iv). ∎

Înainte de a pune în evidenţă câteva formule pentru conul tangent în sensul lui Bouligand la unele mulţimi care apar mai frecvent în programarea neliniară, introducem încă o noţiune care se va dovedi utilă în stabilirea unor condiţii suficiente de extrem. Fie $M \subset X$ mulţime nevidă şi $\bar{x} \in M$; spunem că M este *aproximată în* $\bar{x}$ *de conul închis* $K \subset X$ dacă există o funcţie $\alpha : M \to K$ astfel ca

$$\lim_{M \ni x \to \bar{x}} \frac{\alpha(x) - (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0, \tag{3.35}$$

adică

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in M \cap B(\bar{x}, \delta)\ :\ \|\alpha(x) - (x - \bar{x})\| \leq \varepsilon \cdot \|x - \bar{x}\|. \tag{3.36}$$

Este evident că din (3.35) se obţine (în cazul în care $\bar{x} \in \overline{M \setminus \{\bar{x}\}}$)

$$\lim_{M \ni x \to \bar{x}} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x - \bar{x}\|} = 1. \tag{3.37}$$

Să observăm că dacă M este aproximată în $\bar{x} \in M$ de conul închis K, iar $\widetilde{K} \subset X$ este con închis astfel încât $K \subset \widetilde{K}$, atunci M este aproximată în $\bar{x}$ şi de $\widetilde{K}$. În plus, dacă M este aproximată în $\bar{x} \in M$ de K atunci $T_B(M, \bar{x}) \subset K$. Într-adevăr, fie $\alpha : M \to K$ satisfăcând (3.35) şi $u \in T_B(M, \bar{x}) \setminus \{0\}$. Există $(t_n) \to 0+$ şi $(u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice $n \in I\!N$. Din (3.35) obţinem că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha(\bar{x} + t_n u_n) - t_n u_n}{t_n \|u_n\|} = 0,$$

şi deci $u = \lim t_n^{-1}\alpha(\bar{x} + t_n u_n)$. Deoarece $t_n^{-1}\alpha(\bar{x} + t_n u_n) \in K$ pentru orice n, $u \in K$.

Este interesant de observat că dacă X este finit dimensional atunci M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$. Într-adevăr, pentru orice $x \in M \setminus \{\bar{x}\}$ există $\alpha(x) \in T_B(M, \bar{x})$ astfel ca

$$\|x - \bar{x} - \alpha(x)\| < \|x - \bar{x} - u\| + \|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall u \in T_B(M, \bar{x}). \tag{3.38}$$

Punem $\alpha(\bar{x}) := 0$. Să arătăm că α satisface (3.36). În caz contrar, există $\varepsilon_0 > 0$ şi $(x_n) \subset M$, $x_n \to \bar{x}$, astfel ca

$$\|\alpha(x_n) - (x_n - \bar{x})\| > \varepsilon_0 \|x_n - \bar{x}\|. \tag{3.39}$$

Fie $u_n := (x_n - \bar{x})/\|x_n - \bar{x}\| \in S_X$. Cum $\dim X < \infty$, trecând eventual la un subşir, putem presupune că $u_n \to u \in S_X$. Desigur, $u \in T_B(M, \bar{x})$. Din (3.38) şi (3.39) obţinem că

$$\varepsilon_0 \|x_n - \bar{x}\| < \|x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\| < \|x_n - \bar{x} - \|x_n - \bar{x}\| \cdot u\| + \|x_n - \bar{x}\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Împărţind prin $\|x_n - \bar{x}\| > 0$ şi trecând la limită, obţinem contradicţia $\varepsilon_0 \leq 0$.

Un caz particular important al teoremei precedente este formulat în continuare.

Teorema 3.2.4 *Fie spaţiile Banach X, Y, mulţimea deschisă $D \subset X$, funcţia $h : D \to Y$ şi $M := \{x \in D \mid h(x) = 0\}$. Presupunem că h este F-diferenţiabilă şi ∇h este funcţie continuă în $\bar{x} \in M$. Dacă $\nabla h(\bar{x})$ este operator surjectiv atunci*

$$T_C(M, \bar{x}) = T_B(M, \bar{x}) = \ker \nabla h(\bar{x}) = \{u \in X \mid \nabla h(\bar{x})(u) = 0\}.$$

În plus M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$.

Demonstraţie. Fie $L = X$ şi $P = \{0\}$; incluziunea $T_B(M, \bar{x}) \subset \ker \nabla h(\bar{x})$ este dată de Teorema 3.1.3 (iv), iar incluziunea $\ker \nabla h(\bar{x}) \subset T_C(M, \bar{x})$ rezultă din relaţia (3.33) din teorema precedentă. Faptul că M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$ rezultă din teorema următoare. ∎

Un rezultat mai general este dat de teorema următoare.

Teorema 3.2.5 *Fie spaţii Banach X, Y, mulţimea deschisă $D \subset X$, şi funcţiile $g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to Y$. Considerăm mulţimea*

$$M := \{x \in D \mid h(x) = 0,\ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq m\}$$

şi $\bar{x} \in M$*. Presupunem că* h *este F-diferenţiabilă şi* ∇h *este continuă în* $\bar{x}$*, iar* g_i *este F-diferenţiabilă în* $\bar{x}$ *pentru* $i \in I(\bar{x})$ *şi* g_i *este continuă în* $\bar{x}$ *pentru* $i \notin I(\bar{x})$*, unde* $I(\bar{x}) := \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$*. Dacă* $\nabla h(\bar{x})$ *este operator surjectiv şi*

$$\exists\, \bar{u} \in X \ : \ \nabla h(\bar{x})(\bar{u}) = 0, \ \nabla g_i(\bar{x})(\bar{u}) < 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x}), \tag{3.40}$$

atunci

$$T_U(M, \bar{x}) = T_B(M, \bar{x}) = \{u \in \ker \nabla h(\bar{x}) \mid \nabla g_i(\bar{x})(u) \le 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x})\}. \tag{3.41}$$

În plus M *este aproximată în* $\bar{x}$ *de* $T_B(M, \bar{x})$*.*

Demonstraţie. Fie $M_1 := \{x \in D \mid h(x) = 0, \ g_i(x) \le 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x})\}$ şi $M_2 := \{x \in D \mid g_i(x) \le 0 \ \ \forall\, i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x})\}$; avem că $M = M_1 \cap M_2$. Deoarece g_i este continuă în $\bar{x}$ pentru $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\bar{x})$, M_2 este vecinătate a lui $\bar{x}$, şi deci $T_U(M, \bar{x}) = T_U(M_1, \bar{x})$ şi $T_B(M, \bar{x}) = T_B(M_1, \bar{x})$. Desigur, dacă $I(\bar{x}) = \emptyset$ atunci $M = \{x \in D \mid h(x) = 0\}$; din teorema precedentă avem că $T_U(M, \bar{x}) = T_B(M, \bar{x}) = \ker \nabla h(\bar{x})$. Având în vedere cele de mai sus, putem considera că $I(\bar{x}) = \{1, \dots, m\}$.

Considerăm funcţia

$$f : D \to Y \times \mathbb{R}^m, \quad f(x) := (h(x), g_1(x), \dots, g_m(x)),$$

şi mulţimile $L := X$ şi $P := \{0\} \times (-\mathbb{R}^m_+)$. Incluziunea

$$T_B(M, \bar{x}) \subset \{u \in \ker \nabla h(\bar{x}) \mid \nabla g_i(\bar{x})(u) \le 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x})\}$$

rezultă din Teorema 3.1.3 (iv).

Fie $u \in \ker \nabla h(\bar{x})$ astfel ca $\nabla g_i(\bar{x})(u) < 0$ pentru $1 \le i \le m$, şi $(t_n) \to 0+$. Din teorema precedentă rezultă că există $(u_n) \to u$ astfel ca $h(\bar{x} + t_n u_n) = 0$ pentru orice n. Fie $i \in I(\bar{x})$; deoarece g_i este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$, există $(\gamma_n^i) \subset \mathbb{R}$ astfel ca $\gamma_n^i \to 0$ şi

$$g_i(\bar{x} + t_n u_n) = g_i(\bar{x} + t_n u_n) - g_i(\bar{x}) = t_n \nabla g_i(\bar{x})(u_n) + \gamma_n^i t_n \|u_n\| \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Din ipoteză rezultă imediat că există $n_i \in \mathbb{N}$ astfel ca $g_i(\bar{x} + t_n u_n) < 0$ pentru orice $n \ge n_i$. Considerând $n_0 := \max\{n_i \mid i \in I(\bar{x})\}$, obţinem că $(\bar{x} + t_n u_n)_{n \ge n_0} \subset M$. Prin urmare $u \in T_U(M, \bar{x})$. Am obţinut în acest mod că

$$\{u \in \ker \nabla h(\bar{x}) \mid \nabla g_i(\bar{x})(u) < 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x})\} \subset T_U(M, \bar{x}).$$

Fie acum $u \in X$ astfel ca $\nabla h(\bar{x})(u) = 0$ şi $\nabla g_i(\bar{x})(u) \le 0$ pentru $i \in I(\bar{x})$. Fie $\lambda \in]0, 1[$ şi $u_\lambda := \lambda \bar{u} + (1 - \lambda) u$. Rezultă imediat că $\nabla h(\bar{x})(u_\lambda) = 0$ şi

$\nabla g_i(\bar{x})(u_\lambda) < 0$ pentru $i \in I(\bar{x})$. Prin urmare $u_\lambda \in T_U(M,\bar{x})$ pentru orice $\lambda \in]0,1[$. Făcând $\lambda \to 0$, obţinem că $u \in T_U(M,\bar{x})$. Deci relaţia (3.41) are loc.

Să arătăm că M este aproximată în $\bar{x}$ de către $T_B(M,\bar{x})$. Observăm că putem presupune şi în acest caz că $I(\bar{x}) = \{1,\ldots,m\}$. Fie funcţia f definită mai sus. Faptul că $\nabla h(\bar{x})$ este surjectiv şi că (3.40) are loc implică (de fapt sunt echivalente) cu faptul că

$$\nabla f(\bar{x})(X) + \{0\} \times \mathbb{R}^m_+ = Y \times \mathbb{R}^m. \tag{3.42}$$

(Demonstraţia se poate face ca în demonstraţia teoremei următoare, luând $T_C(L,\bar{x}) = X$.) Considerăm aplicaţia multivocă

$$\mathcal{R} : X \rightsquigarrow Y \times \mathbb{R}^m, \quad \mathcal{R}(u) := \nabla f(\bar{x})(u) + \{0\} \times \mathbb{R}^m_+.$$

Este evident că $\mathcal{R}$ are graficul un con convex închis, iar din (3.42) avem că $\operatorname{Im}\mathcal{R} = Y \times \mathbb{R}^m$. Utilizând Teorema lui Robinson-Ursescu obţinem existenţa unui $\rho > 0$ astfel ca

$$U_{Y\times\mathbb{R}^m} \subset \nabla f(\bar{x})(\rho U_X) + \{0\} \times \mathbb{R}^m. \tag{3.43}$$

Deoarece f este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$, există $\gamma : D \to Y \times \mathbb{R}^m$ astfel ca $\lim_{x\to\bar{x}} \gamma(x) = \gamma(\bar{x}) = 0$ şi

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) + \gamma(x)\cdot\|x-\bar{x}\| \quad \forall\, x \in D. \tag{3.44}$$

Din (3.43) obţinem existenţa funcţiilor $\beta : D \to X$ şi $\mu : D \to \mathbb{R}^m_+$ astfel ca

$$\gamma(x)\cdot\|x-\bar{x}\| = \nabla f(\bar{x})\left(\beta(x)\right) + (0,\mu(x))\,,\ \|\beta(x)\| \le \rho\|\gamma(x)\|\cdot\|x-\bar{x}\| \ \ \forall\, x \in D. \tag{3.45}$$

Fie $x \in M$; din (3.44) şi (3.45) avem că

$$\nabla f(\bar{x})\left(x - \bar{x} + \beta(x)\right) = f(x) - (0,\mu(x)) \in \{0\} \times \left(-\mathbb{R}^m_+\right),$$

şi deci, din (3.41), $x - \bar{x} + \beta(x) \in T_B(M,\bar{x})$. Considerând $\alpha : M \to T_B(M,\bar{x})$, $\alpha(x) := x - \bar{x} + \beta(x)$, ţinând seama şi de (3.45), obţinem că M este aproximată în $\bar{x}$ de către $T_B(M,\bar{x})$. ∎

Condiţia (3.40) se întâlneşte în literatură sub denumirea de condiţia de calificare Mangasarian-Fromovitz.

Luând $Y := \{0\}$ şi $h := 0$ în teorema precedentă obţinem formula pentru conul tangent la o mulţime definită de un număr finit de inegalităţi. Să observăm că pentru această situaţie nu este nevoie să presupunem că X este spaţiu Banach.

O situaţie mai generală este considerată în teorema următoare.

Teorema 3.2.6 *Fie X, Y spaţii Banach, $L \subset X$ mulţime închisă, $D \subset X$ mulţime deschisă, $g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to Y$ funcţii F-diferenţiabile ale căror diferenţiale sunt continue în $\bar{x} \in M$, unde*

$$M := L \cap \{x \in D \mid h(x) = 0,\ g_i(x) \le 0 \quad \forall\, i,\ 1 \le i \le m\}.$$

Presupunem că

$$\nabla h(\bar{x})(T_C(L, \bar{x})) = Y$$

şi

$$\exists\, \bar{u} \in T_C(L, \bar{x}) \ :\ \nabla h(\bar{x})(\bar{u}) = 0,\ \nabla g_i(\bar{x})(\bar{u}) < 0 \quad \forall\, i \in I(\bar{x}).$$

Dacă $\dim Y < \infty$ *sau L satisface condiţia (3.18) în $\bar{x}$, atunci*

$$T_B(M, \bar{x}) = \{u \in T_B(L, \bar{x}) \mid \nabla h(\bar{x})(u) = 0,\ \nabla g_i(\bar{x})(u) \le 0 \quad \forall\, i \in I(\bar{x})\},$$

unde $I(\bar{x}) := \{i \mid 1 \le i \le m,\ g_i(\bar{x}) = 0\}$.

Demonstraţie. Ca în demonstraţia teoremei precedente, putem presupune că $I(\bar{x}) = \{1, \ldots, m\}$. Considerăm din nou funcţia

$$f : D \to Y \times \mathbb{R}^m, \quad f(x) := (h(x), g_1(x), \ldots, g_m(x))$$

şi mulţimea $P := \{0\} \times (-\mathbb{R}^m_+)$. Incluziunea '$\subset$' din concluzia teoremei rezultă din nou din Teorema 3.1.3. Pentru a obţine incluziunea inversă folosim Teorema 3.2.3 pentru L, P şi f. Pentru aceasta trebuie numai să verificăm că

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{x})&(T_C(L, \bar{x})) - T_C(P, f(\bar{x})) \\ &= (\nabla h(\bar{x}), \nabla g_1(\bar{x}), \ldots, \nabla g_m(\bar{x}))(T_C(L, \bar{x})) + \{0\} \times \mathbb{R}^m_+ \\ &= Y \times \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Fie $(v, \lambda) \in Y \times \mathbb{R}^m$; din ipoteză există $u \in T_C(L, \bar{x})$ astfel ca $\nabla h(\bar{x})(u) = v$. Fie

$$\alpha := \max\left\{0, \frac{\lambda_1 - \nabla g_1(\bar{x})(u)}{\nabla g_1(\bar{x})(\bar{u})}, \ldots, \frac{\lambda_m - \nabla g_m(\bar{x})(u)}{\nabla g_m(\bar{x})(\bar{u})}\right\},$$

şi

$$\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_m),\ \text{unde}\ \mu_i := \lambda_i - \nabla g_i(\bar{x})(u + \alpha\bar{u}) \quad \forall\, i,\ 1 \le i \le m.$$

Din modul de alegere a lui α avem că $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ şi

$$(v, \lambda) = \nabla f(\bar{x})(u + \alpha\bar{u}) + (0, \mu).$$

Deoarece $T_C(L, \bar{x})$ este con convex, avem că $u + \alpha\bar{u} \in T_C(L, \bar{x})$. Prin urmare are loc relaţia (3.46). ∎

3.3 Condiţii necesare şi condiţii suficiente de optim

Şi în această secţiune spaţiile X şi Y vor fi spaţii normate. Considerăm problema de minimizare

(P) $\qquad \min\ f(x),\ x \in M,$

unde $f : D \to I\!R$, iar $\emptyset \neq M \subset D \subset X$. În cele ce urmează suntem interesaţi în a stabili condiţii necesare, respectiv condiţii suficiente pentru ca $\bar{x} \in M$ să fie soluţie locală pentru problema (P). Spunem că $\bar{x} \in M$ este *soluţie locală* pentru problema (P) dacă există $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$ astfel ca

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall\, x \in M \cap V; \tag{3.47}$$

$\bar{x}$ este *soluţie locală strictă* dacă pentru $x \neq \bar{x}$ inegalitatea este strictă în (3.47). În probleme de programare convexă nu ne-au interesat soluţiile locale datorită Teoremei 2.5.4. Desigur, se poate considera şi problema de maximizare

(P') $\qquad \max\ f(x),\ x \in M.$

Rezultatele obţinute pentru problema (P) se transpun imediat pentru problema (P') prin simpla înlocuire a funcţiei obiectiv f cu $-f$. De aceea în continuare vom formula rezultate numai pentru probleme de minimizare.

Următoarele două rezultate pun în evidenţă utilitatea conului tangent (în sensul lui Bouligand) pentru stabilirea condiţiilor necesare, respectiv suficiente, de optimalitate în probleme de programare neconvexă.

Teorema 3.3.1 *Fie $D \subset X$ mulţime deschisă, $f : D \to I\!R$ şi $M \subset D$. Presupunem că f este F-diferenţiabilă în $\bar{x} \in M$. Dacă $\bar{x}$ este soluţie optimă locală pentru problema (P) atunci*

$$\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0 \quad \forall\, u \in T_B(M, \bar{x}).$$

Demonstraţie. Deoarece $\bar{x}$ este soluţie locală pentru (P), există $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$ astfel ca (3.47) să aibă loc. Fie $u \in T_B(M, \bar{x})$; există $(t_n) \to 0+$ şi $(u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice $n \in I\!N$. Desigur, $\bar{x} + t_n u_n \to \bar{x}$, şi deci putem presupune că $\bar{x} + t_n u_n \in V$ pentru orice n. Ţinând seama de faptul că f este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$ şi de (3.47), există $(\gamma_n) \subset I\!R$ astfel ca $\gamma_n \to 0$ şi

$$0 \leq f(\bar{x} + t_n u_n) - f(\bar{x}) = t_n \nabla f(\bar{x})(u_n) + \gamma_n t_n \|u_n\| \quad \forall\, n \in I\!N.$$

Împărţind prin $t_n > 0$ şi trecând la limită, obţinem că $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$. ∎

Teorema 3.3.2 *Fie $D \subset X$ mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $M \subset D$. Presupunem că f este F-diferenţiabilă în $\bar{x} \in M$, M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$ şi că există $m \in]0, \infty[$ astfel ca*

$$\nabla f(\bar{x})(u) \geq m \cdot \|u\| \quad \forall u \in T_B(M, \bar{x}). \tag{3.48}$$

Atunci

$$\exists \rho, l > 0, \; \forall x \in M \cap B(\bar{x}, \rho) \;:\; f(x) \geq f(\bar{x}) + l \cdot \|x - \bar{x}\|. \tag{3.49}$$

În particular $\bar{x}$ este soluţie locală strictă pentru (P).

Demonstraţie. Presupunem că (3.49) nu are loc; atunci

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \exists x_n \in M \cap B\left(\bar{x}, \tfrac{1}{n}\right) \;:\; f(x_n) < f(\bar{x}) + \tfrac{1}{n}\|x_n - \bar{x}\|. \tag{3.50}$$

Deoarece M este aproximată în $\bar{x}$ de către $T_B(M, \bar{x})$, există $\alpha : M \to T_B(M, \bar{x})$ satisfăcând (3.35). Deoarece f este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$, există $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\gamma_n \to 0$ şi

$$f(x_n) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizând această relaţie şi (3.50) obţinem că

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\|x_n - \bar{x}\| &> \nabla f(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\| \\
&= \nabla f(\bar{x})\left(\alpha(x_n)\right) + \nabla f(\bar{x})\left(x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\right) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\| \\
&\geq m \cdot \|\alpha(x_n)\| + \nabla f(\bar{x})\left(x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\right) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\|.
\end{aligned}$$

Împărţind prin $\|x_n - \bar{x}\| > 0$ ultima inegalitate şi trecând apoi la limită (ţinând seama şi de (3.37)), obţinem contradicţia $0 \geq m$. Prin urmare concluzia teoremei are loc. ∎

Să observăm că dacă $\dim X < \infty$ atunci M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$, iar existenţa lui $m > 0$ satisfăcând (3.48) este echivalentă cu

$$\nabla f(\bar{x})(u) > 0 \quad \forall u \in T_B(M, \bar{x}) \setminus \{0\}.$$

Punem în evidenţă acum condiţii necesare şi condiţii suficiente de extrem pentru probleme cu restricţii date de egalităţi.

Teorema 3.3.3 *Fie X, Y spaţii Banach, $D \subset X$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to Y$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Presupunem că $\bar{x} \in D$ este soluţie locală pentru problema*

$(P_1) \qquad \min f(x), \quad h(x) = 0$

şi că $\nabla h(\bar{x})$ *este operator surjectiv. Atunci există* $\bar{y}^* \in Y^*$ *astfel ca*

$$\nabla f(\bar{x}) + \bar{y}^* \circ \nabla h(\bar{x}) = 0. \tag{3.51}$$

Dacă în plus f *şi* h *sunt de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe* D *atunci*

$$\nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u,u) \geq 0 \quad \forall\, u \in \ker \nabla h(\bar{x}). \tag{3.52}$$

Demonstraţie. Considerăm mulţimea $M := \{x \in D \mid h(x) = 0\}$. Din Teorema 3.2.4 avem că $T_B(M, \bar{x}) = \ker \nabla h(\bar{x})$. Utilizând Teorema 3.3.1 avem că $\nabla f(\bar{x}) \in (\ker \nabla h(\bar{x}))^+ = (\ker \nabla h(\bar{x}))^\perp$. Aplicând Teorema 1.8.11, ultima mulţime este tocmai $\operatorname{Im}(\nabla h(\bar{x}))^*$. Deci există $\bar{y}^* \in Y^*$ satisfăcând (3.51).

Presupunem acum că f şi h sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D; considerăm $u \in \ker \nabla h(\bar{x})$. Din aceeaşi Teoremă 3.2.4 avem că $u \in T_B(M, \bar{x})$ şi deci există $t_n \to 0+$ şi $(u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice n. Deoarece $\bar{x}$ este soluţie pentru (P_1), putem presupune că $f(\bar{x} + t_n u_n) \geq f(\bar{x})$ pentru orice n. Cum f şi h sunt de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D, utilizând formula lui Taylor (Teorema 1.10.9), ţinând seama şi de (3.51), avem că există $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$, $\gamma_n \to 0$, astfel ca

$$\begin{aligned}
f(\bar{x} + t_n u_n) - f(\bar{x}) &= (f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x} + t_n u_n) - (f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x}) \\
&= t_n \nabla(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u_n) + \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} t_n^2 \nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u_n, u_n) + t_n^2 \gamma_n \|u_n\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2} t_n^2 \nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u_n, u_n) + t_n^2 \gamma_n \|u_n\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Împărţind prin t_n^2, apoi trecând la limită, obţinem concluzia. ∎

Întărind condiţia din relaţia (3.52), obţinem şi o condiţie suficientă pentru ca $\bar{x}$ să fie soluţie optimă pentru (P_1).

Teorema 3.3.4 *Fie* $D \subset X$ *o mulţime deschisă şi* $f : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to Y$ *funcţii de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe* D. *Considerăm* $\bar{x} \in M := \{x \in D \mid h(x) = 0\}$. *Presupunem că există* $\bar{y}^* \in Y^*$ *satisfăcând (3.51),* M *este aproximată în* $\bar{x}$ *de către* $T_B(M, \bar{x})$ *şi că există* $m > 0$ *astfel ca*

$$\nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u,u) \geq m \cdot \|u\|^2 \quad \forall\, u \in T_B(M, \bar{x}). \tag{3.53}$$

Atunci

$$\exists\, \rho, l > 0,\ \forall\, x \in M \cap B(\bar{x}, \rho) \ :\ f(x) \geq f(\bar{x}) + l \cdot \|x - \bar{x}\|^2. \tag{3.54}$$

În particular $\bar{x}$ *este o soluţie locală strictă pentru problema* (P_1).

Demonstraţie. Presupunem că nu are loc concluzia. Atunci

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists x_n \in M \cap B\left(\bar{x}, \tfrac{1}{n}\right) \ : \ f(x_n) < f(\bar{x}) + \frac{1}{n}\|x_n - \bar{x}\|^2. \tag{3.55}$$

Deoarece M este aproximată în $\bar{x}$ de către $T_B(M, \bar{x})$, există $\alpha : M \to T_B(M, \bar{x})$ satisfăcând (3.35). Utilizând din nou formula lui Taylor şi relaţia (3.51), există $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$ astfel ca $\gamma_n \to 0$ şi

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(\bar{x}) &= (f + \bar{y}^* \circ h)(x_n) - (f + \bar{y} \circ h)(\bar{x}) \\ &= \nabla(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}) + \gamma_n\|x_n - \bar{x}\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}) + \gamma_n\|x_n - \bar{x}\|^2. \end{aligned}$$

Considerând $B := \nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})$, din relaţia anterioară şi (3.55), obţinem

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{n}\|x_n - \bar{x}\|^2 &> B(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}) + 2\gamma_n\|x_n - \bar{x}\|^2 \\ &= B\left(x_n - \bar{x} - \alpha(x_n), x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\right) + 2B\left(\alpha(x_n),\right. \\ &\qquad \left. x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\right) + B\left(\alpha(x_n), \alpha(x_n)\right) + 2\gamma_n\|x_n - \bar{x}\|^2 \\ &\geq m \cdot \|\alpha(x_n)\|^2 + 2\gamma_n\|x_n - \bar{x}\|^2 - \|B\| \cdot \|x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\|^2 \\ &\qquad -2\|B\| \cdot \|\alpha(x_n)\| \cdot \|x_n - \bar{x} - \alpha(x_n)\|. \end{aligned}$$

Împărţind ultima inegalitate prin $\|x_n - \bar{x}\|^2 > 0$ şi apoi trecând la limită (ţinând seama de (3.35) şi (3.37)), obţinem contradicţia $0 \geq m$. Prin urmare concluzia este adevărată. ∎

Desigur, dacă $\dim X < \infty$ atunci existenţa lui $m > 0$ astfel ca (3.53) să aibă loc este echivalentă cu

$$\nabla^2(f + \bar{y}^* \circ h)(\bar{x})(u, u) > 0 \ \ \forall u \in T_B(M, \bar{x}) \setminus \{0\}.$$

Dăm acum condiţii necesare, respectiv suficiente, pentru probleme cu restricţii definite de inegalităţi.

Teorema 3.3.5 *Fie $D \subset X$ o mulţime deschisă şi $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Considerăm mulţimea*

$$M := \{x \in D \mid g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0\}. \tag{3.56}$$

Presupunem că $\bar{x} \in M$ este soluţie locală pentru problema

(P_2) $\quad \min f(x), \quad g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0,$

şi că

$$\exists\ \bar{u} \in X,\ \forall i \in I(\bar{x})\ :\ \nabla g_i(\bar{x})(\bar{u}) < 0,$$

unde $I(\bar{x}) := \{i \mid 1 \leq i \leq m,\ g_i(\bar{x}) = 0\}$ *este mulţimea restricţiilor active în* $\bar{x}$*. Atunci există* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *astfel ca*

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq m, \tag{3.57}$$

şi

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0. \tag{3.58}$$

Dacă în plus $f, g_1, \ldots, g_m$ *sunt de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe* D *atunci*

$$\nabla^2 \left(f + \sum\nolimits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\right)(\bar{x})(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in T_B(M^*, \bar{x}), \tag{3.59}$$

unde $M^* := \{x \in M \mid g_i(x) = 0 \ \ \forall i,\ \lambda_i > 0\}$.

Demonstraţie. Din Teorema 3.2.5 avem că

$$T_B(M, \bar{x}) = \{u \in X \mid \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0 \ \ \forall i \in I(\bar{x})\}.$$

Prin urmare, utilizând Teorema 3.3.1, avem că

$$\nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0 \ \ \forall i \in I(\bar{x}) \ \Rightarrow\ \nabla f(\bar{x})(u) \geq 0,$$

adică 0 este soluţie optimă a problemei de programare convexă (chiar liniară)

$$(P_l) \qquad \min\ \nabla f(\bar{x})(u), \qquad \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0,\ i \in I(\bar{x}).$$

Aplicând Teorema 2.8.3, există $(\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})} \subset [0, \infty[$ astfel ca

$$0 = \nabla \left(f(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x})\right)(0) = \nabla f(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}).$$

Luând $\lambda_i := 0$ pentru $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I(\bar{x})$, obţinem că relaţiile din (3.57) şi (3.58) sunt satisfăcute.

Presupunem acum că funcţiile $f, g_1, \ldots, g_m$ sunt de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D şi fie $u \in T_B(M^*, \bar{x})$; există $(t_n) \to 0+$ şi $(u_n) \to u$ astfel ca $\bar{x} + t_n u_n \in M^* \subset M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\bar{x}$ este soluţie pentru (P_2), putem presupune că $f(\bar{x} + t_n u_n) \geq f(\bar{x})$ pentru orice n. Cum f şi g_i sunt de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D, utilizând formula lui Taylor (Teorema 1.10.9), ţinând seama şi de (3.58), avem că există $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$, $\gamma_n \to 0$, astfel ca

$$\begin{aligned} f(\bar{x}+t_nu_n)-f(\bar{x}) &= \left(f+\sum\nolimits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x}+t_nu_n)-\left(f+\sum\nolimits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x}) \\ &= t_n\nabla\left(f+\sum\nolimits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x})(u_n)+ \\ &\quad +\tfrac{1}{2}t_n^2\nabla^2\left(f+\textstyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x})(u_n,u_n)+t_n^2\gamma_n\|u_n\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}t_n^2\nabla^2\left(f+\textstyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x})(u_n,u_n)+t_n^2\gamma_n\|u_n\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Împărţind prin t_n^2 şi apoi trecând la limită, obţinem că (3.59) are loc. ∎

Întărind condiţia (3.59) obţinem şi o condiţie suficientă de optimalitate pentru (P_2).

Teorema 3.3.6 *Fie $D \subset X$ o mulţime deschisă şi $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D. Considerăm mulţimea M definită de relaţia (3.56) şi $\bar{x} \in M$. Presupunem că există $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \subset [0, \infty[$ satisfăcând (3.57) şi (3.58), M este aproximată în $\bar{x}$ de $T_B(M, \bar{x})$ şi că există $m > 0$ astfel ca*

$$\nabla^2\left(f+\sum\nolimits_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\right)(\bar{x})(u,u) \geq m\cdot\|u\|^2 \quad \forall\, u \in T_B(M,\bar{x}). \tag{3.60}$$

Atunci (3.54) are loc. În particular $\bar{x}$ este o soluţie locală strictă pentru problema (P_2).

Demonstraţie. Demonstraţia acestui rezultat fiind analoagă cu cea a Teoremei 3.3.4, o omitem. ∎

Punem acum în evidenţă condiţii necesare de ordin întâi şi doi pentru o problemă de optimizare care conţine atât restricţii date de egalităţi cât şi de inegalităţi, precum şi restricţii neexplicite ($x \in L$!).

Teorema 3.3.7 *Fie X, Y două spaţii Banach, $D \subset X$ o mulţime deschisă, $L \subset X$ o mulţime închisă, $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to Y$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Considerăm mulţimea*

$$M := L \cap \{x \in D \mid h(x) = 0,\ g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0\}.$$

Fie $\bar{x} \in M$ soluţie locală pentru problema

$$(P_3) \qquad \min f(x), \quad x \in L,\ h(x)=0,\ g_1(x)\leq 0,\ldots,g_m(x)\leq 0,$$

Presupunem că $\dim Y < \infty$ sau că L satisface condiţia (3.18) în $\bar{x}$,

$$\nabla h(\bar{x})(T_C(L,\bar{x})) = Y$$

şi
$$\exists\, \bar{u} \in T_C(L, \bar{x}) \;:\; \nabla h(\bar{x})(\bar{u}) = 0,\ \nabla g_i(\bar{x})(\bar{u}) < 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x}),$$
unde $I(\bar{x}) := \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ *este mulţimea restricţiilor active în* $\bar{x}$. *Atunci există* $\bar{y}^* \in Y^*$ *şi* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ *astfel ca*
$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \ \ \forall\, i,\ 1 \leq i \leq m, \tag{3.61}$$
şi
$$\nabla f(\bar{x}) + \bar{y}^* \circ \nabla h(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \in (T_C(L, \bar{x}))^+ . \tag{3.62}$$
Dacă în plus $\bar{x} \in \operatorname{int} L$, *iar* f, h, $g_1, \ldots, g_m$ *sunt de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe* D *atunci*
$$\nabla^2 \left(f + \bar{y}^* \circ h + \sum\nolimits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \right)(\bar{x})(u, u) \geq 0 \ \ \forall\, u \in T_B(M^*, \bar{x}), \tag{3.63}$$
unde $M^* := \{x \in M \mid g_i(x) = 0 \ \ \forall\, i,\ \lambda_i > 0\}$.

Demonstraţie. Din Teorema 3.2.6 avem că
$$T_B(M, \bar{x}) = \{u \in T_B(L, \bar{x}) \mid \nabla h(\bar{x})(u) = 0,\ \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0 \ \ \forall\, i \in I(\bar{x})\}.$$
Prin urmare, utilizând Teorema 3.3.1, avem că 0 este soluţie optimă pentru problema de programare convexă
$$(P_c) \qquad \min\ \nabla f(\bar{x})(u) + I_{T_C(L,\bar{x})}(u), \quad \nabla h(\bar{x})(u) = 0,\ \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0,\ i \in I(\bar{x}).$$
Aplicând Teorema 2.8.4, există $(\lambda_i)_{i \in I(\bar{x})} \subset [0, \infty[$ şi $\bar{y}^* \in Y^*$ astfel ca
$$\begin{aligned} 0 &\in \partial \left(\nabla f(\bar{x}) + I_{T_C(L,\bar{x})} + \bar{y}^* \circ \nabla h(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \right)(0) \\ &= \nabla f(\bar{x}) + \bar{y}^* \circ \nabla h(\bar{x}) + \sum\nolimits_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + N(T_C(L, \bar{x}), 0). \end{aligned}$$
Fie $\lambda_i = 0$ pentru $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I(\bar{x})$. Ca în demonstraţia Teoremei 3.3.5, (3.61) are loc. Deoarece $(T_C(L, \bar{x}))^+ = -N(T_C(L, \bar{x}), 0)$, din relaţia de mai sus obţinem şi (3.62).

În cazul în care $\bar{x} \in \operatorname{int} L$, iar f, h, $g_1, \ldots, g_m$ sunt de clasă $\mathcal{C}^2$, demonstraţia relaţiei (3.63) se face ca în demonstraţia Teoremei 3.3.5. ∎

În teoremele de mai sus $\bar{y}^*$ şi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar ultima teoremă (mai exact partea care se referă la condiţia necesară de ordinul întâi) se numeşte Teorema Kuhn-Tucker sau Teorema Karush-Kuhn-Tucker.

Desigur, se formulează cu uşurinţă şi o condiţie suficientă de optimalitate pentru problema (P_3) (în cazul în care $\bar{x} \in \operatorname{int} L$).

În cazul în care $Y = \mathbb{R}^p$, în Teoremele 3.3.3, 3.3.4 şi 3.3.7 h este de forma $(h_1, \ldots, h_p)$ cu $h_i : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$, iar elementul $\bar{y}^*$ este de forma $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$. Să observăm că în acest caz condiţia ca $\nabla h(\bar{x})$ să fie surjectiv revine la faptul că $(\nabla h_i(\bar{x}))_{1 \leq i \leq p}$ este familie liniar independentă; a se vedea în acest sens Teorema 1.3.7.

3.4 Condiţii asimptotice de optim

Încheiem acest capitol punând în evidenţă câteva rezultate (interesante) referitoare la probleme de minimizare, obţinute prin utilizarea principiului variaţional al lui Ekeland (Capitolul 1).

Teorema 3.4.1 *Fie $(X, \|\ \|)$ spaţiu Banach şi $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie inferior semicontinuă, mărginită inferior şi G-diferenţiabilă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$ astfel ca*

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{3.64}$$

Prin urmare există $(x_n) \subset X$ astfel ca

$$f(x_n) \to \inf_{x \in X} f(x) \qquad \text{şi} \qquad \nabla f(x_n) \to 0. \tag{3.65}$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$; există $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$. Utilizând Teorema lui Ekeland (Teorema 1.2.6) pentru $\sqrt{\varepsilon} > 0$, obţinem $x_\varepsilon \in X$ astfel ca

$$f(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\, \|x_\varepsilon - x_0\| \leq f(x_0) \leq \inf f + \varepsilon,$$

de unde $f(x_\varepsilon) \leq f(x_0)$, şi

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\| \quad \forall\, x \in X.$$

Luând $x := x_\varepsilon + tu$ în relaţia de mai sus, obţinem că

$$\frac{f(x_\varepsilon + tu) - f(x_\varepsilon)}{t} \geq -\sqrt{\varepsilon} \cdot \|u\| \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, u \in X,$$

şi deci $\nabla f(x_\varepsilon)(u) \geq -\sqrt{\varepsilon} \cdot \|u\|$ pentru $u \in X$. Prin urmare (3.64) are loc. Luând $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem şirul $(x_n) \subset X$ astfel ca

$$\inf_{x \in X} f(x) \leq f(x_n) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \frac{1}{n}, \qquad \|\nabla f(x_n)\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

şi deci are loc şi (3.65). ∎

Relaţiile (3.65) reprezintă de fapt condiţii asimptotice de minim.

Are loc şi următorul rezultat de existenţă a punctelor de minim.

Teorema 3.4.2 *Fie* $(X, \| \ \|)$ *spaţiu Banach şi* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie inferior semicontinuă, mărginită inferior şi G-diferenţiabilă. Presupunem că este satisfăcută* condiţia Palais-Smale

$$(PS) \qquad \forall (x_n) \subset X \ a.\hat{\imath}.\ f(x_n) \to \alpha \in \mathbb{R},\ \|\nabla f(x_n)\| \to 0,\ \exists (x_{n_k}) \to x \in X.$$

Atunci există $\bar{x} \in X$ *astfel ca* $f(\bar{x}) \le f(x)$ *pentru orice* $x \in X$.

Demonstraţie. Din teorema precedentă avem că există $(x_n) \subset X$ satisfăcând (3.65). Din (PS) avem că există un subşir (x_{n_k}) convergent la $\bar{x} \in X$. Folosind faptul că f este i.s.c., obţinem că

$$f(\bar{x}) \le \liminf f(x_{n_k}) = \inf_{x \in X} f(x),$$

adică $\bar{x}$ este punct de minim pentru f. ∎

Se poate formula un rezultat asemănător celui din Teorema 3.4.1 şi pentru probleme de minim cu restricţii.

Teorema 3.4.3 *Fie* $(X, \| \ \|)$ *spaţiu Banach,* $M \subset X$ *o mulţime nevidă şi închisă, iar* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie mărginită inferior (pe* M*) şi F-diferenţiabilă (în fiecare punct din* M*). Atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $x_\varepsilon \in M$ *astfel ca*

$$f(x_\varepsilon) \le \inf_{x \in M} f(x) + \varepsilon \qquad \textit{şi} \qquad \nabla f(x_\varepsilon)(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u\| \ge 0 \ \ \forall u \in T_B(M, x_\varepsilon). \tag{3.66}$$

În particular, dacă $P \subset T_B(M, x_\varepsilon)$ *este un con convex închis atunci*

$$\nabla f(x_\varepsilon) \in \sqrt{\varepsilon} \cdot U_X + P^+. \tag{3.67}$$

Demonstraţie. Considerăm $g := f + I_M$. Funcţia g este i.s.c., proprie şi mărginită inferior. Luând $x_0 \in X$ astfel ca

$$g(x_0) \le \inf_{x \in X} g(x) + \varepsilon = \inf_{x \in M} f(x) + \varepsilon,$$

utilizând din nou principiului variaţional al lui Ekeland pentru $\sqrt{\varepsilon} > 0$, există $x_\varepsilon \in \operatorname{dom} g = M$ astfel ca $g(x_\varepsilon) \le g(x_0)$ şi

$$g(x_\varepsilon) \le g(x) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\| \ \ \forall x \in X,$$

adică

$$f(x_\varepsilon) \le f(x) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|x - x_\varepsilon\| \ \ \forall x \in M. \tag{3.68}$$

Fie $u \in T_B(M, x_\varepsilon)$; există şirurile $(x_n) \subset M$ şi $(t_n) \subset]0, \infty[$ astfel ca $t_n \to 0$, $u_n := t_n^{-1}(x_n - x_\varepsilon) \to u$. Deoarece f este F-diferenţiabilă în $x_\varepsilon \in M$, există $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$, $\gamma_n \to 0$, astfel ca

$$f(x_\varepsilon + t_n u_n) = f(x_\varepsilon) + t_n \nabla f(x_\varepsilon)(u_n) + \gamma_n t_n \|u_n\| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luând $x := x_\varepsilon + t_n u_n$ în relaţia (3.68) obţinem că

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) + t_n \nabla f(x_\varepsilon)(u_n) + \gamma_n t_n \|u_n\| + t_n \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u_n\| \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din această relaţie se obţine imediat că $\nabla f(x_\varepsilon)(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u\| \geq 0$. Prin urmare (3.66) are loc.

Fie $P \subset T_B(M, x_e)$ con convex închis. Din (3.66) avem că 0 este punct de minim pentru funcţia convexă $X \ni u \mapsto \nabla f(x_\varepsilon)(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u\| + I_P(u) \in \overline{\mathbb{R}}$, şi deci 0 este în subdiferenţiala acestei funcţii în 0, adică

$$0 \in \nabla f(x_\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \cdot U_X - P^+,$$

ceea ce arată că (3.67) are loc. ∎

Exerciţii

Exerciţiul 1 *Fie* $f : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie i.s.c. proprie cu proprietatea că* $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ *(adică* f *este coercivă). Să se arate că există* $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ *astfel că* $f(\bar{x}) \leq f(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^k$.

Soluţie. Fie $\lambda > \inf_{x\in\mathbb{R}^k} f(x)$. Din ipoteză avem că $\mathrm{niv}_\lambda f$ este mulţime închisă. Mulţimea $\mathrm{niv}_\lambda f$ este mărginită; într-adevăr, în caz contrar există $(x_n) \subset \mathrm{niv}_\lambda f$ astfel ca $\|x_n\| \to \infty$. Dar, din ipoteză, avem că $f(x_n) \to \infty$, contrazicând faptul că $f(x_n) \leq \lambda$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare $\mathrm{niv}_\lambda f$ este mulţime compactă. Aplicând acum teorema lui Weierstrass pentru $f|_{\mathrm{niv}_\lambda f}$ obţinem concluzia.

Exerciţiul 2 *Fie* $f : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie proprie, i.s.c. şi mărginită inferior, iar* $p : \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ *o funcţie i.s.c. satisfăcând următoarele condiţii:* $p(0) = 0$, $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ *pentru orice* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ *şi* $\lim_{\|x\|\to\infty} p(x) = \infty$. *Atunci pentru orice* $\varepsilon, \lambda > 0$ *şi* $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ *cu proprietatea că* $f(x_\varepsilon) \leq \inf f + \varepsilon$ *există* $x_\lambda \in \mathbb{R}^k$ *astfel ca*

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &\leq f(x_\varepsilon), \quad p(x_\lambda - x_\varepsilon) \leq \lambda \quad \text{şi} \\ f(x_\lambda) &\leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x - x_\lambda) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Soluţie. Fie $\bar{\lambda} := \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^k\} \in \mathbb{R}$. Considerăm funcţia

$$g : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}},\ g(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x - x_\varepsilon).$$

Deoarece f şi p sunt i.s.c., g este de asemenea i.s.c.; în plus, deoarece $g(x) \geq \bar{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x - x_\varepsilon)$, avem că $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \infty$. Din Exerciţiul 1 (sau utilizând teorema lui Weierstrass) rezultă că există $x_\lambda \in \mathbb{R}^k$ astfel ca $g(x_\lambda) \leq g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$, adică

$$f(x_\lambda) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x_\lambda - x_\varepsilon) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x - x_\varepsilon) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^k.$$

Prin urmare

$$f(x_\lambda) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x_\lambda - x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) \leq f(x_\lambda) + \varepsilon,$$

de unde urmează că $f(x_\lambda) \leq f(x_\varepsilon)$ (deoarece $p \geq 0$) şi $p(x_\lambda - x_\varepsilon) \leq \lambda$. De asemenea, obţinem că

$$f(x_\lambda) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \left(p(x - x_\varepsilon) - p(x_\lambda - x_\varepsilon)\right) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x - x_\lambda) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^k.$$

Exerciţiul 3 *Fie* X *un spaţiu normat finit dimensional şi* $A \subset X$ *o mulţime nevidă şi convexă. Să se arate că* $\mathrm{raint}\, A \neq \emptyset$, $\mathrm{raint}\, \overline{A} = \mathrm{raint}\, A$, $\overline{\mathrm{raint}\, A} = \overline{A}$, *iar pentru orice* $a \in \mathrm{raint}\, A$ *şi* $\bar{x} \in \overline{A}$ *avem că* $]a, x[\subset \mathrm{raint}\, A$.

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $0 \in A$. Fie $X_0 := \operatorname{lin} A$. Dacă $X_0 = \{0\}$ atunci $A = \{0\}$ şi proprietăţile din enunţ sunt evidente. Fie deci $\dim X_0 \geq 1$. Deoarece $\dim X_0 \leq \dim X < \infty$, avem că X_0 este subspaţiu liniar închis; putem înlocui pe X prin X_0, sau altfel spus, putem presupune că $\operatorname{lin} A = X$; în această situaţie $\operatorname{raint} A = \operatorname{aint} A$. Pentru a dovedi relaţiile din enunţ este suficient, având în vedere Teorema 1.4.3, să arătăm că $\operatorname{aint} A \neq \emptyset$, deoarece X fiind finit dimensional avem că $\operatorname{aint} A = \operatorname{int} A$.

Deoarece $\operatorname{lin} A = X$ există o bază $\{e_1, \ldots, e_k\}$, $k \geq 1$, a lui X de elemente din A. Elementul $\bar{x} := \frac{1}{2k}(e_1 + \cdots + e_k) \in \operatorname{aint} A$. Într-adevăr, fie $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k \in X$ şi $\delta := \min\{\frac{1}{2k|\lambda_1|}, \ldots, \frac{1}{2k|\lambda_k|}\}$; atunci pentru orice $t \in]-\delta, \delta[$ avem că $\bar{x} + tx \in A$. Prin urmare $\bar{x} \in \operatorname{aint} A$.

Exerciţiul 4 *Fie $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie cvasiconvexă şi $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Pentru $u \in \mathbb{R}^n$ considerăm funcţia $f_u : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_u(t) = f(\bar{x} + tu)$. Să se arate că*

$$\begin{aligned} &f \text{ este i.s.c. în } \bar{x} &\Leftrightarrow\quad &f_u \text{ este i.s.c. în } 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n, \\ &f \text{ este s.s.c. în } \bar{x} &\Leftrightarrow\quad &f_u \text{ este s.s.c. în } 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dacă $\mathbb{R}^n$ se înlocuieşte cu un spaţiu normat infinit dimensional nici una din proprietăţile de mai sus nu este adevărată (în general).

Soluţie. Este evident că implicaţiile " $\Rightarrow$ " au loc. Să presupunem că f_u este s.s.c. în 0 pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ şi fie $\mathbb{R} \ni \lambda > f(\bar{x}) = f_u(0)$. Din faptul că f_u este s.s.c. în 0 rezultă imediat că $\bar{x} \in \operatorname{aint}(\operatorname{niv}_\lambda f)$. Funcţia f fiind cvasiconvexă, $\operatorname{niv}_\lambda f$ este convexă; deoarece $\dim \mathbb{R}^n < \infty$, obţinem că $\bar{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{niv}_\lambda f)$. Prin urmare f este s.s.c. în $\bar{x}$.

Să presupunem că f_u este i.s.c. în 0 pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$. Presupunem, prin reducere la absurd, că f nu este i.s.c. în $\bar{x}$. Atunci există $\mathbb{R} \ni \lambda < f(\bar{x})$ astfel ca $\bar{x} \in \overline{\operatorname{niv}_\lambda f}$. Prin urmare $\operatorname{niv}_\lambda f \neq \emptyset$. Fie $a \in \operatorname{raint}(\operatorname{niv}_\lambda f)$ ($\neq \emptyset$ din Exerciţiul 3). Utilizând Exerciţiul 3 obţinem că $]a, \bar{x}[\subset \operatorname{raint}(\operatorname{niv}_\lambda f) \subset \operatorname{niv}_\lambda f$, contrazicând faptul că funcţia $f_{a-\bar{x}}$ este i.s.c. în 0. Deci f este i.s.c. în $\bar{x}$.

Dacă X este un spaţiu normat infinit dimensional atunci există $\varphi : X \to \mathbb{R}$ o aplicaţie liniară care nu este continuă. Este evident că φ este cvasiconvexă (chiar convexă), iar φ_u este continuă pe $\mathbb{R}$ pentru orice $u \in X$.

Existenţa aplicaţiei liniare φ de mai sus se poate dovedi în modul următor: Fie $(e_i)_{i \in I}$ o bază algebrică a lui X; schimbând eventual e_i prin $e_i/\|e_i\|$, putem considera că $\|e_i\| = 1$ pentru orice $i \in I$. Deoarece I este infinită, putem presupune că $\mathbb{N} \subset I$, iar înlocuind X prin $\operatorname{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, putem considera că $I = \mathbb{N}$. Pentru orice $x \in X$ există $n \in \mathbb{N}$ şi $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $x = \lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n$. Considerăm

$$\varphi : X \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} k\lambda_k.$$

Este evident că φ este bine definită şi liniară. În plus

$$\sup\{|\varphi(x)| \mid \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{|\varphi(e_n)| \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty,$$

ceea ce arată că φ nu este continuă.

Exerciţiul 5 *Fie X spaţiu normat şi $f : X \to I\!R$ o funcţie convexă, iar $\lambda > \inf_{x\in X} f(x)$. Să se arate că*

$$\operatorname{aint}\{x \in X \mid f(x) \le \lambda\} = \{x \in X \mid f(x) < \lambda\},$$

iar dacă f este continuă atunci

$$\operatorname{int}\{x \in X \mid f(x) \le \lambda\} = \{x \in X \mid f(x) < \lambda\}.$$

Soluţie. Fie $\bar{x} \in X$ astfel ca $f(\bar{x}) < \lambda$ şi $x \in X$. Dacă $f(\bar{x}+x) \le \lambda$ atunci $tx \in \operatorname{niv}_\lambda f - \bar{x}$ pentru $t \in [0, 1[$, iar dacă $f(\bar{x}+x) > \lambda$ atunci $tx \in \operatorname{niv}_\lambda f - \bar{x}$ pentru $t \in [0, \bar{t}\,[$, unde $\bar{t} := \frac{\lambda - f(\bar{x})}{f(\bar{x}+x) - f(\bar{x})}$. Deci $\bar{x} \in \operatorname{aint}(\operatorname{niv}_\lambda f)$.

Să arătăm acum că are loc incluziunea inversă. Deoarece $\lambda > \inf f$, există $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) < \lambda$. Fie $\bar{x} \in \operatorname{aint}(\operatorname{niv}_\lambda f)$. Există $\bar{t} > 0$ astfel ca $x := \bar{x} + \bar{t}(\bar{x} - x_0) \in \operatorname{niv}_\lambda f$. Obţinem astfel că

$$\bar{x} = \frac{1}{1+\bar{t}}x + \frac{\bar{t}}{1+\bar{t}}x_0 \text{ şi } f(\bar{x}) \le \frac{1}{1+\bar{t}}f(x) + \frac{\bar{t}}{1+\bar{t}}f(x_0) < \frac{1}{1+\bar{t}}\lambda + \frac{\bar{t}}{1+\bar{t}}\lambda = \lambda,$$

ceea ce dovedeşte şi incluziunea inversă.

Dacă f este continuă, atunci

$$\operatorname{int}(\operatorname{niv}_\lambda f) \supset \{x \in X \mid f(x) < \lambda\} \ne \emptyset,$$

şi deci, cum $\operatorname{niv}_\lambda f$ este mulţime convexă, $\operatorname{int}(\operatorname{niv}_\lambda f) = \operatorname{aint}(\operatorname{niv}_\lambda f)$.

Exerciţiul 6 *Fie X spaţiu normat şi $A, C \subset X$ submulţimi convexe nevide astfel ca $\operatorname{int} C \ne \emptyset$. Să se arate că $\operatorname{int}(A + C) = A + \operatorname{int} C$. Dacă în plus $A \cap \operatorname{int} C \ne \emptyset$ atunci $\overline{A \cap C} = \overline{A} \cap \overline{C}$. În particular, dacă C este un con convex cu interior nevid atunci $\overline{C} + \operatorname{int} C = \operatorname{int} C$.*

Soluţie. Deoarece $A + \operatorname{int} C = \bigcup_{a\in A}(a + \operatorname{int} C)$, mulţimea $A + \operatorname{int} C$ este deschisă. Obţinem astfel că $A + \operatorname{int} C \subset \operatorname{int}(A + C)$. Fie $\bar{x} \notin A + \operatorname{int} C$. Deoarece mulţimea $A + \operatorname{int} C$ este nevidă, convexă şi cu interior nevid, există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel ca

$$\langle \bar{x}, x^* \rangle \le \langle a, x^* \rangle + \langle c, x^* \rangle \quad \forall\, a \in A,\ \forall\, c \in \operatorname{int} C.$$

Întrucât $C \subset \overline{\operatorname{int} C}$, obţinem că $\langle \bar{x}, x^* \rangle \le \langle x, x^* \rangle$ pentru orice $x \in A + C$. Prin urmare $\bar{x} \notin \operatorname{int}(A + C)$, ceea ce dovedeşte că $\operatorname{int}(A + C) = A + \operatorname{int} C$.

Presupunem acum că $A \cap \operatorname{int} C \ne \emptyset$. Cum incluziunea $\overline{A \cap C} \subset \overline{A} \cap \overline{C}$ este evidentă (şi adevărată fără nici o presupunere asupra mulţimilor A şi C), să dovedim incluziunea inversă. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $0 \in A \cap \operatorname{int} C$ (făcând eventual o translaţie). Fie $p_C : X \to I\!R$ funcţionala Minkowski asociată mulţimii C. Din Consecinţa 1.4.2 avem că p_C este continuă şi

$$\operatorname{int} C = \{x \in X \mid p_C(x) < 1\}, \qquad \overline{C} = \{x \in X \mid p_C(x) \le 1\}.$$

Fie $x \in \overline{A} \cap \overline{C}$; există $(x_n) \subset A$ astfel ca $x_n \to x$. Deoarece p_C este continuă, avem că $p_C(x_n) \to p_C(x) \le 1$. Dacă mulţimea $P := \{n \in I\!N \mid p_C(x_n) < 1\}$ este infinită, atunci $x_n \in A \cap C$ pentru orice $n \in P$ şi deci $x = \lim_{n\in P} x_n \in \overline{A \cap C}$. Dacă P este finită atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $p_C(x_n) \geq 1$ pentru orice $n \geq n_0$. Cum $x \in \overline{C}$, avem că $p_C(x_n) \to 1$. Pentru fiecare $n \geq n_0$ considerăm $\bar{x}_n := \frac{n}{np_C(x_n)+1} x_n$. Deoarece A este convexă şi $0,\ x_n \in A$, avem că $\bar{x}_n \in A$. Cum $p_C(\bar{x}_n) = np_C(x_n)/(np_C(x_n)+1) < 1$, avem că $\bar{x}_n \in A \cap C$ pentru orice $n \geq n_0$. Însă $\bar{x}_n \to x$, şi deci şi în acest caz avem că $x \in \overline{A \cap C}$. Deci $\overline{A \cap C} = \overline{A} \cap \overline{C}$.

Presupunem acum că C este con convex cu interior nevid; avem că $\operatorname{int} \overline{C} = \operatorname{int} C$. Din cele de mai sus, luând $A = \overline{C}$, avem că

$$\overline{C} + \operatorname{int} C = \overline{C} + \operatorname{int} \overline{C} = \operatorname{int}(\overline{C} + \overline{C}) = \operatorname{int} \overline{C} = \operatorname{int} C.$$

Exerciţiul 7 *Fie X spaţiu normat, $X_0, X_1 \subset X$ subspaţii liniare şi elementele $a_1, \ldots, a_p \in X$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in X^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, unde $p,\ k \in \mathbb{N}^*$.*

a) Dacă X_0 este închis şi $\dim X_1 < \infty$ atunci $X_0 + X_1$ este închis.

b) Dacă X_0 este închis şi $C = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ 1 \leq i \leq p\}$, atunci $X_0 + C$ este con convex închis. În particular C este con convex închis.

c) $X_0 + \{x \in X \mid \langle x, \varphi_i \rangle \leq \alpha_i\ \forall i,\ 1 \leq i \leq k\}$ este mulţime convexă închisă.

Soluţie. a) Fie $\Pr : X \to X/X_0$ proiecţia canonică. Deoarece $\Pr(X_1)$ este subspaţiu finit dimensional al spaţiului normat X/X_0, $\Pr(X_1)$ este mulţime închisă (vezi Consecinţa 1.4.4). Din Teorema 1.7.2 obţinem că $X_0 + X_1$ este mulţime închisă.

b) Este evident că $X_0 + C$ este con convex. Demonstrăm prin inducţie după p faptul că $X_0 + C$ este mulţime închisă.

Fie $p = 1$. Dacă $a_1 \in X_0$ atunci $X_0 + C = X_0$, şi deci $X_0 + C$ este mulţime închisă. Presupunem că $a_1 \notin X_0$. Considerăm şirul $(u_n) \subset X_0 + C$, $u_n \to u \in X$. Există $(x_n) \subset X_0$, $(t_n) \subset [0, \infty[$ astfel ca $u_n = x_n + t_n a_1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $t_n \to \infty$ atunci $-\frac{1}{t_n} x_n \to a_1$, de unde obţinem contradicţia $a_1 \in \overline{X_0} = X_0$. Prin urmare (t_n) conţine un subşir mărginit, şi deci conţine şi un subşir $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent la $t \in [0, \infty[$. Prin urmare $x_n \to u - ta_1 =: x \in X_0$, ceea ce arată că $u = x + ta_1 \in X_0 + C$. Deci afirmaţia este adevărată pentru $p = 1$.

Presupunem acum că afirmaţia este adevărată pentru $p \geq 1$ şi să o dovedim pentru $p + 1$. Ca şi pentru $p = 1$ considerăm două situaţii. Presupunem pentru început că $-a_1, \ldots, -a_{p+1} \in X_0 + C$; atunci, după cum se poate verifica uşor,

$$X_0 + C = X_0 + \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_{p+1}\}.$$

Deoarece $\dim(\operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_{p+1}\}) \leq p + 1 < \infty$, din a) obţinem că $X_0 + C$ este un subspaţiu liniar închis. Presupunem acum că există i astfel ca $-a_i \notin X_0 + C$; fără a restrânge generalitatea putem presupune că $i = p + 1$. Fie

$$\widetilde{C} := \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ 1 \leq i \leq p \right\}.$$

Din ipoteza inductivă avem că $X_0 + \widetilde{C}$ este mulţime închisă. Fie $(u_n) \subset X_0 + C$, $u_n \to u \in X$. Există $(x_n) \subset X_0 + \widetilde{C}$, $(t_n) \subset [0, \infty[$ astfel ca $u_n = x_n + t_n a_{p+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $t_n \to \infty$ atunci $X_0 + \widetilde{C} \ni \frac{1}{t_n} x_n \to -a_{p+1}$, şi deci $-a_{p+1} \in X_0 + \widetilde{C} \subset X_0 + C$, absurd. Deci (t_n) conţine un subşir (t_{n_k}) convergent la $t \in [0, \infty[$. Prin urmare $x_n \to u - ta_{p+1} \in X_0 + \widetilde{C}$, ceea ce arată că $u = (u - ta_{p+1}) + ta_{p+1} \in X_0 + C$. Deci afirmaţia este adevărată pentru $p + 1$. Am obţinut astfel că $X_0 + C$ este mulţime închisă pentru orice $p \geq 1$.

c) Fie $E := \{x \in X \mid \langle x, \varphi_i\rangle \le \alpha_i \ \forall i,\ 1 \le i \le k\}$. Dacă mulţimea E este vidă este evident că are loc concluzia. Presupunem deci că $E \ne \emptyset$. Considerăm aplicaţiile

$$T,\, A : X \to \mathbb{R}^k,\ T(x) := (\langle x, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle x, \varphi_k\rangle),\ A(x) := \alpha - T(x),$$

unde $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. Este evident că T este un operator liniar continuu. Prin urmare A este continuu şi $T(X_0)$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^k$. Rezultă că $T(X_0)$ este închis. Considerând $P := \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i \ge 0 \ \forall i,\ 1 \le i \le k\}$, avem că $E = A^{-1}(P)$ şi $A(E) \subset P$. Fie $(u_n) \subset X_0 + E$, $u_n \to u \in X$. Există $(x_n) \subset X_0$ şi $(z_n) \subset E$ astfel ca $u_n = x_n + z_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare $T(X_0) + P \ni A(z_n) - T(x_n) = A(u_n) \to A(u)$. Din b) avem că $T(X_0) + P$ este mulţime închisă, şi deci $A(u) \in T(X_0) + P$. Deci există $x_0 \in X_0$ astfel ca $A(u + x_0) \in P$, adică $u \in X_0 + E$. Prin urmare $X_0 + E$ este mulţime închisă.

Exerciţiul 8 *Fie X un spaţiu Hilbert real, $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Să se arate că*

$$P(\alpha) := \{x \in X \mid \angle(x, x_0) \le \alpha\},$$

unde $\alpha \in [0, \pi/2]$, este con convex închis. În plus $P(\alpha)^\circ = P(\pi/2 - \alpha)$.

Soluţie. Amintim că $\angle(x, y) := \arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $\|x_0\| = 1$. Este clar că dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $x \in P(\alpha)$ atunci $\lambda x \in P(\alpha)$. Fie $x,\, y \in P(\alpha)$; atunci

$$\langle x, x_0\rangle \ge \|x\| \cdot \cos\alpha, \quad \langle y, x_0\rangle \ge \|y\| \cdot \cos\alpha,$$

şi deci

$$\langle x + y, x_0\rangle \ge (\|x\| + \|y\|) \cdot \cos\alpha \ge \|x + y\| \cdot \cos\alpha.$$

Prin urmare $x + y \in P(\alpha)$. Faptul că $P(\alpha)$ este mulţime închisă este imediat.

Să observăm că

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \{x = \lambda x_0 + u \in X \mid \lambda = \langle x, x_0\rangle,\ u = x - \lambda x_0,\ \langle x, x_0\rangle \ge \|x\| \cdot \cos\alpha\} \\ &= \{\lambda x_0 + u \mid \lambda \ge 0,\ \langle u, x_0\rangle = 0,\ \lambda \ge \sqrt{\lambda^2 + \|u\|^2} \cdot \cos\alpha\} \\ &= \{\lambda x_0 + u \mid \lambda \ge 0,\ \langle u, x_0\rangle = 0,\ \lambda \sin\alpha \ge \|u\| \cdot \cos\alpha\}. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$P(0) = \{\lambda x_0 \mid \lambda \ge 0\}, \quad P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{\lambda x_0 + u \mid \lambda \ge 0,\ \langle u, x_0\rangle = 0\}.$$

Având în vedere faptul că $P(\alpha)$ este con, avem că $P(\alpha)^\circ = P(\alpha)^+$. Arătăm pentru început că $P(0)^+ = P(\pi/2)$. Fie $x = \lambda x_0$ şi $y = \mu x_0 + v$, cu $\lambda,\, \mu \ge 0$, $\langle v, x_0\rangle = 0$. Atunci $\langle x, y\rangle = \lambda\mu \ge 0$, şi deci $P(\pi/2) \subset P(0)^+$. Fie acum $y \in P(0)^+$. Există $\mu \in \mathbb{R}$ şi $u \in X$ astfel ca $\langle u, x_0\rangle = 0$, $y = \mu x_0 + v$. Avem că $\langle x_0, \mu x_0 + v\rangle = \mu \ge 0$, ceea ce arată că $y \in P(\pi/2)$. Prin urmare $P(0)^+ = P(\pi/2)$.

Considerăm acum $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Fie $x \in P(\alpha)$ şi $y \in P(\pi/2 - \alpha)$. Din cele arătate mai sus avem că există $\lambda,\, \mu \ge 0$, $u,\, v \in X$ astfel ca

$$x = \lambda x_0 + u, \quad \langle u, x_0\rangle = 0,\ \lambda \sin\alpha \ge \|u\| \cdot \cos\alpha,$$

$$y = \mu x_0 + v, \quad \langle v, x_0\rangle = 0,\ \lambda\cos\alpha \geq \|v\|\cdot\sin\alpha.$$

Prin urmare avem că $\lambda\mu \geq \|u\|\cdot\|v\|$. Obţinem că

$$\langle x, y\rangle = \lambda\mu + \langle u, v\rangle \geq \lambda\mu - \|u\|\cdot\|v\| \geq 0.$$

Rezultă că $y \in P(\alpha)^+$, şi deci $P(\pi/2) \subset P(\alpha)^+$.

Fie acum $y \in P(\alpha)^+$; există $\mu \in \mathbb{R}$ şi $v \in X$ astfel ca $\langle v, x_0\rangle = 0,\ y = \mu x_0 + v$. Dacă $v = 0$, cum $x_0 \in P(\alpha)$, avem că $\langle x_0, y\rangle = \langle x_0, \mu x_0\rangle = \mu \geq 0$, şi deci $y \in P(\pi/2 - \alpha)$. Presupunem că $v \neq 0$ şi considerăm $x := x_0 - \dfrac{\sin\alpha}{\|v\|\cdot\cos\alpha}\cdot v$. Atunci $x \in P(\alpha)$, şi deci

$$\langle x, y\rangle = \mu - \frac{\sin\alpha}{\|v\|\cdot\cos\alpha}\cdot\langle v, v\rangle = \mu - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\|v\| \geq 0.$$

Obţinem astfel că $\mu\sin(\pi/2-\alpha) \geq \|v\|\cdot\cos(\pi/2-\alpha)$, adică $y \in P(\pi/2-\alpha)$. Deci şi în acest caz avem că $P(\alpha)^+ = P(\pi/2-\alpha)$.

Mai observăm că $\operatorname{int} P(\alpha) = \{x \in X \mid \angle(x, x_0) < \alpha\}$, iar $P(\alpha)$ este punctat dacă şi numai dacă $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Exerciţiul 9 *Să se arate că*

$$P := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,\ z \geq 0,\ 2xz \geq y^2\right\}$$

este con convex şi închis, iar $P^+ = P$. (P se numeşte cornetul de îngheţată, ice cream cone *în terminologia engleză.)*

Soluţie. Fie $x_0 = (1, 0, 1)$. Cu notaţia din exerciţiul precedent, avem că

$$\begin{aligned} P(\pi/4) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x+z}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z \geq 0,\ (x+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z \geq 0,\ 2xz \geq y^2\right\} = P. \end{aligned}$$

Concluzia rezultă imediat din exerciţiul precedent.

Exerciţiul 10 *Fie X spaţiu normat, $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ şi $0 < \alpha < \|\varphi\|$. Să se arate că mulţimea $C := \{x \in X \mid \varphi(x) \geq \alpha\|x\|\}$ este con convex, închis, punctat, cu interior nevid, iar $C^+ = [0, \infty[\cdot(\varphi + \alpha U^*) = \mathbb{R}_+ \cdot D(\varphi, \alpha)$.*

Soluţie. Fie $f : X \to \mathbb{R},\ f(x) := \alpha\|x\| - \varphi(x)$. Este evident că f este o funcţională subliniară continuă. Prin urmare C este con convex închis. Dacă $x, -x \in C$ atunci

$$\varphi(x) \geq \alpha\|x\|,\ -\varphi(x) = \varphi(-x) \geq \alpha\|-x\| = \alpha\|x\|,$$

şi deci, prin adunare, obţinem că $0 \geq 2\alpha\|x\|$, adică $x = 0$. Deci C este punctat. Deoarece $\alpha < \|\varphi\|$, există $x \in X$ astfel ca $\alpha\|x\| < \varphi(x)$, şi deci $0 > \inf f$. Prin urmare, utilizând Exerciţiul 5, avem că

$$\operatorname{int} C = \{x \in X \mid f(x) < 0 = f(0)\} \neq \emptyset.$$

În plus, utilizând Consecinţa 2.8.2, avem că

$$N(C; 0) = \mathbb{R}_+ \cdot \partial f(0) = \mathbb{R}_+ \cdot (\alpha U^* - \varphi),$$

şi deci $C^+ = -N(C; 0) = \mathbb{R}_+ \cdot (\varphi + \alpha U^*)$.

Exerciţiul 11 *Fie funcţia*

$$f : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \int_0^1 \sqrt{1+(x(t))^2}\, dt.$$

Să se arate că f este funcţie convexă, de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $C[0,1]$, şi

$$\nabla f(x)(u) = \int_0^1 \frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}\, dt, \quad \nabla^2 f(x)(u,v) = \int_0^1 \frac{uv}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dt$$

pentru orice u, $v \in C[0,1]$.

Soluţie. Considerăm $X := C[0,1]$; X este spaţiu Banach relativ la norma Cebîşev: $\|u\| := \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$ pentru $u \in X$.

Fie funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := \sqrt{1+t^2}$. Avem că

$$\varphi'(t) = t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi''(t) = (1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \varphi'''(t) = -3t(1+t^2)^{-\frac{5}{2}} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că φ este (strict) convexă deoarece $\varphi''(t) > 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Din această observaţie convexitatea lui f este imediată. Utilizând formula lui Taylor pentru funcţii de variabilă reală, avem că pentru orice t, $\tau \in \mathbb{R}$ există $\theta \in]0,1[$ astfel ca

$$\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - \varphi'(t)\,\tau = \tfrac{1}{2}\varphi''(t+\theta\tau)\,\tau^2,$$

şi deci

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t) - \varphi'(t)\,\tau| \le \tfrac{1}{2}\tau^2, \quad \forall\, t,\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Fie x, $u \in X$ elemente fixate. Înlocuind în inegalitatea de mai sus t prin $x(t)$ şi τ prin $u(t)$, $t \in [0,1]$, şi apoi integrând pe $[0,1]$, obţinem

$$\left| f(x+u) - f(x) - \int_0^1 \frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}\, dt \right| \le \frac{1}{2}\int_0^1 u^2\, dt \le \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Această inegalitate arată că f este F-diferenţiabilă în x şi $\nabla f(x)$ are expresia din enunţ. Să arătăm că ∇f este diferenţiabilă. Avem că pentru orice t, $\tau \in \mathbb{R}$ există $\theta \in]0,1[$ astfel ca

$$\varphi'(t+\tau) - \varphi'(t) - \varphi''(t)\,\tau = \tfrac{1}{2}\varphi'''(t+\theta\tau)\,\tau^2.$$

Din expresia lui φ''' dată mai sus obţinem că $|\varphi'''(t)| \le 3$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Prin urmare avem că

$$|\varphi'(t+\tau) - \varphi'(t) - \varphi''(t)\,\tau| \le \tfrac{3}{2}\tau^2, \quad \forall\, t,\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Notând $B(x)$ aplicaţia biliniară definită prin

$$B(x) : X \times X \to \mathbb{R}, \quad B(x)(u,v) := \int_0^1 \frac{uv}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dt,$$

din relaţia anterioară, ca mai sus, obţinem că pentru x, u, $v \in X$ avem

$$|(\nabla f(x+u) - \nabla f(x) - B(x)(u,\cdot))\,(v)| \le \frac{3}{2}\int_0^1 u^2|v|\, dt \le \frac{3}{2}\|u\|^2\|v\| \quad \forall\, x, u, v \in X,$$

şi deci

$$\|\nabla f(x+u) - \nabla f(x) - B(x)(u,\cdot)\| \le \frac{3}{2}\|u\|^2 \quad \forall\, x, u \in X.$$

Prin urmare ∇f este F-diferenţiabilă pe X şi $\nabla^2 f(x) = B(x)$ pentru orice $x \in X$. Din expresia lui $\nabla^2 f(x)$ şi expresia lui φ''' se obţine cu uşurinţă că $\nabla^2 f$ este Lipschitziană de constantă Lipschitz 3. Deci f este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe X.

Exerciţiul 12 *Fie funcţia*

$$f : L^1(0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \int_0^1 \sqrt{1+(x(t))^2}\, dt,$$

$L^1(0,1)$ fiind spaţiul Banach al (claselor) funcţiilor integrabile Lebesgue pe intervalul $[0,1]$ înzestrat cu măsura Lebesgue. Să se arate că f este funcţie convexă şi diferenţiabilă Gâteaux pe $L^1(0,1)$, cu

$$\nabla f(x)(u) = \int_0^1 \frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}\, dt, \quad \forall\, u \in L^1(0,1),$$

însă f nu este Fréchet diferenţiabilă în nici un punct din $L^1(0,1)$.

Soluţie. Notăm $X := L^1(0,1)$; X este spaţiu Banach relativ la norma: $\|u\| := \int_0^1 |u(t)|\, dt$ pentru $u \in X$.

Utilizând funcţia φ definită în soluţia exerciţiului precedent, ţinând seama şi de faptul că φ este convexă, avem că f este convexă şi

$$-|\tau| \le \varphi'(t)\,\tau \le \varphi(t+\tau) - \varphi(t) \le |\tau| \;\forall\, t,\, \tau \in \mathbb{R},$$

inegalitatea din stânga fiind evidentă, iar cea din dreapta verificându-se cu uşurinţă. Fixăm $x,\, u \in X$ şi un şir $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$ astfel ca $0 \ne \tau_n \to 0$, şi considerăm funcţiile $g_n,\ g$ (definite aproape peste tot, pe scurt a.p.t.) date de formulele

$$g_n := \frac{\sqrt{1+(x+\tau_n u)^2} - \sqrt{1+x^2}}{\tau_n}, \quad g := \frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Este evident că $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ a.p.t., iar din inegalitatea de mai sus obţinem că $|g_n| \le |u|$ a.p.t. pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Utilizând teorema lui Lebesgue (vezi [41]) obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n\, dt = \int_0^1 g\, dt.$$

Am obţinut astfel că f este G-diferenţiabilă în x şi $\nabla f(x)$ are expresia din enunţ.

Fie $x \in X$; arătăm că f nu este F-diferenţiabilă în x. Putem presupune că x este finită a.p.t. Avem atunci că

$$[0,1] = \cup_{m\in\mathbb{N}} A_m, \quad \text{unde } A_m := \{t \in [0,1] \mid |x(t)| \le m\}.$$

Cum $\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}(A_m) = 1$, există $m_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\operatorname{mes}(A_{m_0}) > \frac{1}{2}$. Însă

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+(t+\tau)^2} - \sqrt{1+t^2} - \frac{t\tau}{\sqrt{1+t^2}} \\ = \quad &\frac{\tau^2}{\sqrt{1+(t+\tau)^2}+\sqrt{1+t^2}} \left(1 - \frac{2t^2+\tau t}{\sqrt{1+t^2}(\sqrt{1+(t+\tau)^2}+\sqrt{1+t^2})^2}\right), \end{aligned}$$

iar pentru $\tau = n,\ |t| \le m_0$, avem că

$$\frac{\tau}{\sqrt{1+(t+\tau)^2}+\sqrt{1+t^2}} \ge \frac{n}{2\sqrt{1+(n+m_0)^2}} \to \frac{1}{2},$$

$$\frac{2t^2+\tau t}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{1+(t+\tau)^2}+\sqrt{1+t^2}\right)^2} \le \frac{m_0}{\sqrt{1+m_0^2}}\cdot\frac{n+2m_0}{\sqrt{1+(n-m_0)^2}} \to \frac{m_0}{\sqrt{1+m_0^2}},$$

limitele fiind considerate pentru $n\to\infty$. Deci există $n_0 \ge m_0$ şi $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca

$$\sqrt{1+(t+n)^2}-\sqrt{1+t^2}-\frac{tn}{\sqrt{1+t^2}} \ge \varepsilon_0 n \quad \forall\, t \in A_{m_0},\ \forall\, n \ge n_0.$$

Pentru fiecare $n \ge n_0$ există o submulţime măsurabilă B_n a mulţimii A_{m_0} astfel ca $\text{mes}(B_n) = 1/n^2$. Considerăm funcţia

$$u_n : [0,1] \to \mathbb{R},\quad u_n(t) := \begin{cases} n & \text{dacă} \quad t \in B_n, \\ 0 & \text{dacă} \quad t \in [0,1]\setminus B_n. \end{cases}$$

Avem că $\|u_n\| = 1/n \to 0$. Din inegalitatea de mai sus obţinem că

$$\int_0^1 \left(\sqrt{1+(x+u_n)^2}-\sqrt{1+x^2}-\frac{xu_n}{\sqrt{1+x^2}}\right) dt \ge \varepsilon_0 \int_0^1 u_n\, dt = \varepsilon_0\|u_n\|,$$

ceea ce arată că f nu este F-diferenţiabilă în x.

Exerciţiul 13 *Utilizând funcţii convexe, să se arate că:*

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad \forall\, a,\, b \in [0,\infty[,\ \forall\, p,\, q \in]1,\infty[,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

egalitate având loc dacă şi numai dacă $a^p = b^q$, *şi*

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \forall\, x_1,\ldots,x_n \in [0,\infty[,$$

egalitate având loc dacă şi numai dacă $x_1 = \cdots = x_n$.

Soluţie. Funcţia $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{e}^t$ este strict convexă. Deci, pentru $a,\, b \in]0,\infty[$, $a^p \ne b^q$, şi $p,\, q \in]1,\infty[$, $1/p + 1/q = 1$, avem că

$$ab = f(\tfrac{1}{p}\ln a^p + \tfrac{1}{q}\ln b^q) < \tfrac{1}{p}f(\ln a^p) + \tfrac{1}{q}f(\ln b^q) = \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q.$$

Prin urmare afirmaţia făcută are loc. Afirmaţia este evidentă în cazul în care $a = 0$ sau $b = 0$.

Funcţia $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) = -\ln t$ este strict convexă. Fie $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ şi numerele $x_1,\ldots,x_n \in]0,\infty[$, nu toate egale. Obţinem astfel că

$$-\ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = g\left(\frac{1}{n}x_1+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right) < \frac{1}{n}g(x_1)+\cdots+\frac{1}{n}g(x_n) = -\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

şi deci

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Este evident că inegalitatea de mai sus rămâne valabilă şi în cazul în care $x_1,\ldots,x_n \in [0,\infty[$, şi nu toate sunt egale. Afirmaţia din enunţ este acum evidentă.

Exerciţiul 14 *Fie* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ $(n \geq 1)$ *astfel ca* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq 1$. *Să se arate că funcţia* $f :]0, \infty[^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, *este concavă. Dacă* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < 1$ *funcţia* f *este strict concavă.*

Soluţie. Observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\alpha_i}{x_i} f(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x) = \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{x_i^2} f(x),$$

iar pentru $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = \frac{\alpha_i \alpha_j}{x_i x_j} f(x).$$

Funcţia f este concavă (adică $-f$ este convexă) dacă şi numai dacă $d^2 f(x)$ este negativ semi-definită pentru orice $x \in]0, \infty[^n$, adică

$$\sum\nolimits_{i=1}^n \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{x_i^2} u_i^2 + 2 \sum\nolimits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\alpha_i \alpha_j}{x_i x_j} u_i u_j \leq 0 \;\; \forall\, x \in]0, \infty[^n, \;\forall\, u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

sau echivalent,

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 - \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i^2 \leq 0 \;\; \forall\, u \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstrăm această inegalitate prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$ inegalitatea este evidentă. Presupunem că ea este adevărată pentru n şi o dovedim pentru $n + 1$. Avem

$$\begin{aligned}
&\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i \right)^2 - \sum\nolimits_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i^2 = \\
&\quad = (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1}) u_{n+1}^2 + 2\alpha_{n+1} u_{n+1} \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i + \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 - \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i^2 \\
&\quad = (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1}) \left[u_{n+1}^2 - \frac{2}{1 - \alpha_{n+1}} u_{n+1} \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i + \frac{1}{(1 - \alpha_{n+1})^2} \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 \right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 + \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 - \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i^2 \\
&\quad = (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1}) \left(u_{n+1} - \frac{1}{1 - \alpha_{n+1}} u_{n+1} \sum\nolimits_{i=1}^n \alpha_i u_i \right)^2 + \\
&\qquad\qquad + (1 - \alpha_{n+1}) \left[\left(\sum\nolimits_{i=1}^n \beta_i u_i \right)^2 - \sum\nolimits_{i=1}^n \beta_i u_i^2 \right] \\
&\quad \leq 0,
\end{aligned}$$

unde $\beta_i := \alpha_i / (1 - \alpha_{n+1})$; ultimul termen este negativ din ipoteza inductivă, deoarece $\sum_{i=1}^n \beta_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) / (1 - \alpha_{n+1}) \leq 1$.

Dacă $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n < 1$, ca mai sus, rezultă că $d^2 f(x)$ este negativ definită pentru orice $x \in]0, \infty[^n$, şi deci f este strict concavă.

Exerciţiul 15 *Fie funcţia*

$$f :]0, \infty[\times]0, \infty[^n \to \mathbb{R}, \quad f(t, x) := \frac{t^p}{\prod_{i=1}^n x_i},$$

unde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că funcţia f este strict convexă pentru $p \in]-\infty, 0[\cup]n+1, \infty[$ şi convexă pentru $p = n+1$.

Fie $c \in \mathbb{R}^n$ şi $\Delta := \{x \in]0,\infty[^n \mid \langle x, c\rangle \geq 0\}$. Să se arate că funcţia

$$g : \Delta \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\langle x, c\rangle^p}{\prod_{i=1}^n x_i},$$

este strict convexă pentru $p > n+1$. Funcţia g a fost utilizată de Karmarkar în stabilirea algoritmului său de punct interior. (Se poate arăta că g este strict convexă chiar pentru $p > n$.)

Să se arate de asemenea că funcţia

$$h :]0,\infty[^n \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i},$$

este strict convexă.

Soluţie. Obţinem cu uşurinţă că

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{p}{t} f(t,x), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) = -\frac{1}{x_i} f(t,x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = \frac{p(p-1)}{t^2} f(t,x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t,x) = \frac{2}{x_i^2} f(t,x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x_i}(t,x) = -\frac{p}{x_i t} f(t,x),$$

iar pentru $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t,x) = \frac{1}{x_i x_j} f(t,x).$$

Deoarece $f(t,x) > 0$ pentru orice $(t,x) \in]0,\infty[\times]0,\infty[^n$, faptul că f este strict convexă (convexă) este echivalent cu faptul că următoarea formă pătratică este pozitiv (semi-pozitiv) definită:

$$\frac{p(p-1)}{t^2} s^2 + \sum_{i=1}^n \frac{2}{x_i^2} u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n \frac{p}{x_i t} s u_i + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i x_j} u_i u_j,$$

sau, echivalent, că următoarea formă pătratică este pozitiv (semi-pozitiv) definită:

$$\frac{p-1}{p} s^2 + \sum_{i=1}^n 2u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n s u_i + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j.$$

Matricea asociată ultimei forme pătratice este

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{p-1}{p} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{array} \right\|.$$

Pentru a studia pozitivitatea formei pătratice asociate matricei A trebuie să determinăm valorile sale proprii. Determinantul $\Delta_n := \det(\lambda I_{n+1} - A)$ este

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{p-1}{p} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{p-1}{p} & \lambda+\frac{1}{p} & \lambda+\frac{1}{p} & \cdots & \lambda+\frac{1}{p} \\ 1 & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând după ultima linie, obţinem că

$$\Delta_n = (\lambda-1)\Delta_{n-1} - (\lambda-1)^{n-1}\left(\lambda + \frac{1}{p}\right),$$

şi deci

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (\lambda-1)^{n-1}\Delta_1 - (n-1)(\lambda-1)^{n-1}\left(\lambda+\frac{1}{p}\right) \\ &= (\lambda-1)^{n-1}\left[\lambda^2 - \left(n+2-\frac{1}{p}\right)\lambda + 1 - \frac{n+1}{p}\right]. \end{aligned}$$

Fie λ_1, λ_2 rădăcinile polinomului din paranteza pătrată. Cum celelalte rădăcini ale polinomului caracteristic sunt egale cu 1, forma pătratică considerată este pozitiv (semi-pozitiv) definită dacă şi numai dacă $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$). Pentru $p < 0$ avem că

$$\lambda_1 + \lambda_2 = n + 2 - 1/p > 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1 - (n+1)/p > 0,$$

şi deci $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$. În cazul $p > 0$ rădăcinile λ_1, λ_2 sunt strict pozitive (pozitive) dacă şi numai dacă $p > n+1$ ($p \geq n+1$). Prin urmare f este strict convexă dacă şi numai dacă $p \in]-\infty, 0[\cup]n+1, \infty[$ şi convexă pentru $p \in]-\infty, 0[\cup [n+1, \infty[$. Deoarece $g(x) = f(\langle x, c\rangle, x)$, iar aplicaţia $x \mapsto \langle x, c\rangle$ este liniară, rezultă imediat că g este (strict) convexă pentru ($p > n+1$) $p \geq n+1$.

Deoarece $h(x) = f(1, x)$ (pentru $p = n+2$), obţinem imediat că h este strict convexă.

Exerciţiul 16 *Fie X, Y spaţii normate şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Să se arate că funcţia*

$$f : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad f(y) := \inf\{\|x\| \mid Tx = y\},$$

este o funcţională subliniară. Dacă în plus T este operator deschis atunci $\operatorname{dom} f = X$ şi f este continuă.

Soluţie. Fie

$$F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad F(x, y) := \begin{cases} \|x\| & \text{dacă } \ Tx = y, \\ +\infty & \text{dacă } \ Tx \neq y. \end{cases}$$

Este evident că funcţia F este convexă, iar f este funcţia marginală asociată lui F. Prin urmare f este convexă. În plus, pentru $\lambda > 0$ şi $y \in Y$ avem

$$\begin{aligned} f(\lambda y) &= \inf\{\|x\| \mid Tx = \lambda y\} = \inf\left\{\lambda \cdot \left\|\frac{1}{\lambda}x\right\| \;\middle|\; T\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = y\right\} \\ &= \lambda \inf\{\|u\| \mid Tu = y\} = \lambda f(y). \end{aligned}$$

Dacă T este operator deschis, atunci există $\rho > 0$ astfel ca $\rho U_Y \subset T(U_X)$. Prin urmare

$$\forall\, y \in \rho U_Y,\ \exists\, x \in U_X \ :\ Tx = y,$$

şi deci $f(y) \le 1$ pentru orice $y \in \rho U_Y$, ceea ce antrenează faptul că $\operatorname{dom} f = Y$ şi f este continuă.

Exerciţiul 17 *Fie X, Y spaţii normate şi $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă proprie. Să se arate că dacă f este continuă în $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} f$ atunci*

$$\operatorname{Pr}_{X^*}(\partial f(x_0, y_0)) = \partial f(\cdot, y_0)(x_0) \quad \text{şi} \quad \operatorname{Pr}_{Y^*}(\partial f(x_0, y_0)) = \partial f(x_0, \cdot)(y_0).$$

Soluţie. Fie $(x^*, y^*) \in \partial f(x_0, y_0)$; este evident că $x^* \in \partial f(\cdot, y_0)(x_0)$ şi $y^* \in \partial f(x_0, \cdot)(y_0)$, chiar fără ca f să fie continuă în (x_0, y_0).

Fie deci $x^* \in \partial f(\cdot, y_0)(x_0)$. Deoarece f este continuă în $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} f$, $f'_+((x_0, y_0), \cdot)$ este finită, subliniară şi continuă. În plus, deoarece $x^* \in \partial f(\cdot, y_0)(x_0)$, avem că

$$\langle x, x^* \rangle \le f(x_0 + x, y_0) - f(x_0, y_0) \ \ \forall\, x \in X,$$

şi deci

$$\langle x, x^* \rangle \le f'_+((x_0, y_0), (x, 0)) \ \ \forall\, x \in X.$$

Considerând subspaţiul liniar $X \times \{0\}$ al lui $X \times Y$ şi aplicaţia liniară $\varphi_0 : X \times \{0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(x, 0) := \langle x, x^* \rangle$, având în vedere inegalitatea de mai sus şi Teorema lui Hahn-Banach, există $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ aplicaţie liniară astfel ca

$$\varphi|_{X \times \{0\}} = \varphi_0 \ \text{ şi } \ \varphi(x, y) \le f'_+((x_0, y_0), (x, y)) \ \ \forall\, (x, y) \in X \times Y.$$

Din această inegalitatea, deoarece $f'_+((x_0, y_0), \cdot)$ este continuă, obţinem că φ este continuă, şi deci $\varphi \in \partial f(x_0, y_0)$. Luând $y^* := \varphi(0, \cdot) \in Y^*$ obţinem că $(x^*, y^*) \in \partial f(x_0, y_0)$. Prin urmare $x^* \in \operatorname{Pr}_{X^*}(\partial f(x_0, y_0))$. Rezultă că are loc concluzia.

Exerciţiul 18 *Fie X spaţiu normat, $(a_n)_{n \ge 1} \subset X$ şi $(\lambda_n)_{n \ge 1} \subset [0, \infty[$ astfel ca $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Considerăm funcţiile:*

$$f_n : X \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} \lambda_k \|x - a_k\|^2, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

şi

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x - a_n\|^2.$$

1) Următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|a_n\|^2 < \infty$ (adică $0 \in \operatorname{dom} f$), b) $\operatorname{dom} f \ne \emptyset$, c) $\operatorname{dom} f = X$.

2) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|a_n\|^2 < \infty$ atunci f este finită, convexă şi continuă.

3) Presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|a_n\|^2 < \infty$. Atunci pentru orice $x \in X$ are loc:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \ge n_\varepsilon \ :\ \partial f(x) \subset \partial f_n(x) + \varepsilon U^*,\ \partial f_n(x) \subset \partial f(x) + \varepsilon U^*,$$

adică şirul de mulţimi $(\partial f_n(x))$ converge în sens Hausdorff la $\partial f(x)$.

Soluţie. 1) Este evident că c) $\Rightarrow$ a) şi c) $\Rightarrow$ b).

b) $\Rightarrow$ c) Fie $x_0 \in \operatorname{dom} f$; prin urmare $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_0 - a_n\|^2 < \infty$. Fie $x \in X$ fixat. Atunci

$$\|x - a_n\|^2 \le (\|x - x_0\| + \|x_0 - a_n\|)^2 \le 2\left(\|x - x_0\|^2 + \|x_0 - a_n\|^2\right).$$

Obţinem astfel că

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x - a_n\|^2 \le 2\|x - x_0\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_0 - a_n\|^2 = 2\|x - x_0\|^2 + 2f(x_0), \quad (*)$$

ceea ce arată că $x \in \operatorname{dom} f$.

Luând $x_0 = 0$ în demonstraţia de mai sus avem că a) $\Rightarrow$ c).

2) Presupunem că $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|a_n\|^2 < \infty$. Din 1) avem că $\operatorname{dom} f = X$. Este evident că $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Cum f_n este funcţie convexă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, utilizând Teorema 2.1.2 (iii), avem că f este convexă. Aplicând relaţia (*) pentru $x_0 = 0$, obţinem că

$$f(x) \le 2 + 2f(0) \quad \forall\, x \in U.$$

Cum $\infty > f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in X$, rezultă că f este finită şi continuă pe X.

3) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|a_n\|^2 < \infty$ şi $x \in X$ fixat. Deoarece f_n, f sunt convexe şi continue avem că $\partial f_n(x)$, $\partial f(x)$ sunt mulţimi nevide, convexe şi w^*–compacte (deci mărginite şi închise).

Fie $u \in U$; pentru fiecare $t \in]0,1[$ avem că

$$f(x + tu) - f(x) = f_n(x + tu) - f_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \left(\|x + tu - a_k\|^2 - \|x - a_k\|^2\right).$$

Însă

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \left(\|x + tu - a_k\|^2 - \|x - a_k\|^2\right)\right| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (\|x + tu - a_k\| + \|x - a_k\|) \cdot \big|\, \|x + tu - a_k\| - \|x - a_k\| \,\big| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (2\|x\| + 2\|a_k\| + t\|u\|) \cdot t\|u\| \le t\|u\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (2\|x\| + 1 + \|a_k\|^2 + 1) \\
&\le t\|u\| \left((2\|x\| + 2)\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \|a_k\|^2\right).
\end{aligned}$$

Deoarece seriile $\sum_{n\ge1} \lambda_n$ şi $\sum_{n\ge1} \lambda_n \|a_n\|^2$ sunt convergente, pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$(2\|x\| + 2)\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \|a_k\|^2 \le \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $u \in U$, $t \in]0,1[$ şi $n \ge n_\varepsilon$ avem că

$$f_n(x + tu) - f_n(x) - \varepsilon t\|u\| \le f(x + tu) - f(x) \le f_n(x + tu) - f_n(x) + \varepsilon t\|u\|.$$

Împărţind prin t şi trecând apoi la limită pentru $t \to 0$ obţinem

$$f'_{n+}(x; u) - \varepsilon\|u\| \le f'_+(x; u) \le f'_{n+}(x; u) + \varepsilon\|u\| \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, n \ge n_\varepsilon.$$

Desigur, inegalitatea de mai sus se extinde la orice $u \in X$. Din inegalitatea din dreapta obţinem că $\partial f(x) \subset \partial f_n(x) + \varepsilon U^*$, iar din cea din stânga $\partial f_n(x) \subset \partial f(x) + \varepsilon U^*$.

Exerciţiul 19 *Fie X spaţiu normat, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie, iar $\mu > 0$. Considerăm* regularizata Hausdorff *a funcţiei f definită prin*

$$f_H(\cdot, \mu) : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_H(x, \mu) := \inf\{f(y) + \mu\|x - y\| \mid y \in X\}.$$

1) Pentru orice $\mu > 0$ funcţia $f_H(\cdot,\mu)$ este fie identic $-\infty$, fie este convexă, finită şi lipschitziană de constantă Lipschitz μ. În plus pentru $\mu_1 < \mu_2$ avem că $f_H(\cdot,\mu_1) \le f_H(\cdot,\mu_2) \le f$ şi $\lim_{\mu\to\infty} f_H(x,\mu) = f(x)$ pentru orice $x \in X$.

2) Fie $x_0 \in X$ fixat. Următoarele afirmaţii sunt echivalente: a) $\partial f(x_0)\cap \cap\mu B^* \ne \emptyset$, b) $f(x_0) = f_H(x_0,\mu)$, c) $f_H(x_0,\mu) \in I\!R$ şi $\partial f(x_0,\mu) = \partial f(x_0)\cap \cap\mu B^*$.

Soluţie. 1) Observăm că $f_H(\cdot,\mu) = f\Box\mu\|\cdot\|$. Prin urmare $f_H(\cdot,\mu)$ este funcţie convexă şi $\operatorname{dom} f_H(\cdot,\mu) = X$. De aici rezultă că dacă $f_H(\cdot,\mu)$ ia valoarea $-\infty$ atunci este identic $-\infty$. Presupunem acum că $f_H(\cdot,\mu)$ nu ia valoarea $-\infty$; deci funcţia este finită. Să arătăm că este lipschitziană, de constantă Lipschitz μ. Fie x_1, $x_2 \in X$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $y_1 \in X$ astfel ca

$$f_H(x_1,\mu) > f(y_1) + \mu\|x_1 - y_1\| - \varepsilon,$$

şi deci

$$f_H(x_2,\mu) - f_H(x_1,\mu) < f(y_1) + \mu\|x_2 - y_1\| - f(y_1) - \mu\|x_1 - y_1\| + \varepsilon \le \mu\|x_2 - x_1\| + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, obţinem că

$$f_H(x_2,\mu) - f_H(x_1,\mu) \le \mu\|x_2 - x_1\|.$$

Schimbând elementele x_1 şi x_2 între ele obţinem că $f_H(\cdot,\mu)$ este lipschitziană, de constantă Lipschitz μ.

Este evident că pentru $0 < \mu_1 < \mu_2$ avem că $f_H(\cdot,\mu_1) \le f_H(\cdot,\mu_2) \le f$. Să dovedim acum ultima afirmaţie de la 1). Mai întâi să observăm că, deoarece f este convexă, proprie şi i.s.c., există $x^* \in X^*$ şi $\gamma \in I\!R$ astfel ca

$$f(x) \ge \langle x, x^*\rangle + \gamma \quad \forall\, x \in X.$$

Fie $\bar{x} \in X$ fixat şi $I\!R \ni \lambda < f(\bar{x})$. Deoarece f este i.s.c. în $\bar{x}$, există $\rho > 0$ astfel ca $f(x) > \lambda$ pentru $x \in D(\bar{x},\rho)$. Fie $\bar{\mu} := (\lambda + \|x^*\| - \gamma - \langle \bar{x}, x^*\rangle)/\rho$. Obţinem că pentru $\mu \ge \bar{\mu}$ au loc

$$\begin{aligned}
f_H(\bar{x},\mu) &= \min\left\{ \inf_{y\in D(\bar{x},\rho)} (f(y) + \mu\|\bar{x} - y\|)\,,\ \inf_{y\notin D(\bar{x},\rho)} (f(y) + \mu\|\bar{x} - y\|) \right\} \\
&\ge \min\left\{ \inf_{y\in D(\bar{x},\rho)} (\lambda + \mu\|\bar{x} - y\|)\,,\ \inf_{y\notin D(\bar{x},\rho)} (\langle y, x^*\rangle + \gamma + \mu\|\bar{x} - y\|) \right\} \\
&\ge \min\left\{\lambda, \inf\left\{\langle \bar{x}, x^*\rangle + t\langle u, x^*\rangle + \gamma + \mu t \mid u \in S,\ t \ge \rho\right\}\right\} \\
&\ge \min\left\{\lambda, \inf\{\langle \bar{x}, x^*\rangle + \gamma + t(\bar{\mu} - \|x^*\|) \mid t \ge \rho\}\right\} \\
&\ge \lambda.
\end{aligned}$$

Prin urmare $\lim_{\mu\to\infty} f_H(\bar{x},\mu) = f(\bar{x})$. Cum $\bar{x} \in X$ este arbitrar, concluzia are loc.

2) Fie $x_0 \in X$ fixat şi $g : X \to \overline{I\!R}$, $g(x) := f(x) + \mu\|x - x_0\|$. Este clar că, dacă $x_0 \in \operatorname{dom} f$,

$$\partial g(x_0) = \partial f(x_0) + \mu U^*.$$

a) $\Rightarrow$ b) Din relaţia $\partial f(x_0)\cap\mu U^* \ne \emptyset$ obţinem că $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi $0 \in \partial g(x_0)$. Prin urmare

$$f(x_0) = g(x_0) \le g(x) \quad \forall\, x \in X,$$

şi deci $f(x_0) = f_H(x_0, \mu)$.

b) $\Rightarrow$ c) Din cele arătate mai sus şi din ipoteză avem că $-\infty < f(x_0) = f_H(x_0, \mu) < \infty$. Deci $f_H(x_0, \mu) \in \mathbb{R}$. De aici, ţinând seama de 1), rezultă că $f_H(\cdot, \mu)$ este convexă şi continuă. Prin urmare $\partial f(x_0, \mu) \neq \emptyset$. Cum $f_H(\cdot, \mu)$ este o convoluţie exactă în $x_0 = x_0 + 0$, avem, conform Consecinţei 2.4.3, că $\partial f_H(x_0, \mu) = \partial f(x_0) \cap \mu U^*$.

c) $\Rightarrow$ a) Deoarece $f_H(x_0, \mu) \in \mathbb{R}$, din 1) avem că $f_H(\cdot, \mu)$ este convexă şi continuă. Prin urmare $\partial f(x_0, \mu) \neq \emptyset$, şi deci a) are loc.

Exerciţiul 20 *Fie X spaţiu normat, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie, iar $\mu > 0$. Considerăm* regularizata Yosida *a funcţiei f definită prin*

$$f_Y(\cdot, \mu) : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_Y(x, \mu) := \inf \left\{ f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \,\middle|\, y \in X \right\}.$$

1) Pentru orice $\mu > 0$ funcţia $f_Y(\cdot, \mu)$ este este convexă, finită şi continuă. În plus pentru $0 < \mu_1 < \mu_2$ avem că $f_Y(\cdot, \mu_1) \leq f_Y(\cdot, \mu_2) \leq f$ şi $\lim_{\mu\to\infty} f_Y(x, \mu) = f(x)$ pentru orice $x \in X$.

2) Presupunem că X este spaţiu Banach reflexiv şi strict convex. Atunci există $J_\mu : X \to X$ (unic) astfel ca

$$f_Y(x, \mu) = f(J_\mu(x)) + \frac{\mu}{2}\|x - J_\mu(x)\|^2 \quad \forall\, x \in X,$$

iar $\lim_{\mu\to\infty} J_\mu(x) = x$ pentru orice $x \in \operatorname{dom} f$. Dacă în plus X^* este strict convex atunci $f_Y(\cdot, \mu)$ este G-diferenţiabilă în orice punct $x \in X$ şi $\nabla f_Y(x, \mu) = \mu F_X(x - J_\mu(x))$ pentru orice $x \in X$, unde $F_X : X \to X^*$ este aplicaţia de dualitate a lui X.

3) Dacă X este spaţiu Hilbert atunci $f_H(\cdot, \mu)$ este diferenţiabilă Fréchet.

Soluţie. 1) Deoarece f este convexă, i.s.c. şi proprie, există $x^* \in X^*$ şi $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle + \gamma \quad \forall\, x \in X. \tag{$^\circ$}$$

Prin urmare pentru fiecare $x \in X$,

$$f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \geq \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 - \|x^*\| \cdot \|x - y\| + \langle x, x^* \rangle + \gamma \quad \forall\, y \in X, \tag{*}$$

şi deci $f_Y(\cdot, \mu) > -\infty$. Deoarece $f_Y(\cdot, \mu) = f \square \frac{\mu}{2}\| \;\|^2$, $\operatorname{dom} f_Y(\cdot, \mu) = \operatorname{dom} f + X = X$; deci $f_Y(\cdot.\mu)$ este finită. Întrucât funcţia f este convexă, iar $\frac{\mu}{2}\| \;\|^2$ este convexă şi continuă, avem că $f_Y(\cdot, \mu)$ este convexă şi continuă. Inegalitatea $f_Y(\cdot, \mu_1) \leq f_Y(\cdot, \mu_2) \leq f$ este evidentă pentru $0 < \mu_1 < \mu_2$. Demonstraţia faptului că $\lim_{\mu\to\infty} f_Y(x, \mu) = f(x)$ pentru orice $x \in X$ este complet analoagă celei din Exerciţiul 19.

2) Dacă X este strict convex, din Teorema 2.4.8 (v), avem că aplicaţia $\frac{\mu}{2}\| \;\|^2$ este strict convexă şi deci funcţia $X \ni y \mapsto f(y) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2 \in \overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea strict convexă.

Din (*) avem că această funcţie este şi coercivă, şi i.s.c. deoarece f este astfel. Prin urmare, deoarece X este spaţiu reflexiv, există un unic element $x_\mu \in X$ astfel ca

$$f_Y(x,\mu) = f(x_\mu) + \frac{\mu}{2}\|x_\lambda - x\|^2. \tag{**}$$

În plus, din Consecinţa 2.4.3, avem că

$$\partial f_Y(x,\mu) = \partial f(x_\mu) \cap \mu F_X(x - x_\mu). \tag{***}$$

Considerăm operatorul $J_\mu : X \to X,\ J_\mu(x) := x_\mu$. Relaţia (**) ne arată că formula din enunţ are loc. Fie $x \in \operatorname{dom} f$ fixat, iar $\mu > 0$. Din (°) şi (**) avem că

$$\langle J_\mu(x), x^*\rangle + \gamma + \frac{\mu}{2}\|J_\mu(x) - x\|^2 \le f_Y(x,\mu) \le f(x),$$

şi deci, pentru $\eta := f(x) - \gamma - \langle x, x^*\rangle$, avem că

$$\frac{\mu}{2}\|J_\mu(x) - x\|^2 - \|x^*\| \cdot \|J_\mu(x) - x\| - \eta \le 0 \quad \forall\, \mu > 0.$$

Obţinem astfel că

$$\|J_\mu(x) - x\| \le \frac{\|x^*\| + \sqrt{\|x^*\|^2 + 2\mu\eta}}{\mu} \quad \forall\, \mu > 0.$$

Trecând la limită pentru $\mu \to \infty$, obţinem că $\lim_{\mu\to\infty} J_\mu(x) = x$.

Presupunem acum că X^* este strict convex. Din Teoremele 2.4.9 şi 2.4.8 (iv) avem că aplicaţia de dualitate F_X este univocă. Din (***) avem că $\partial f_Y(x,\mu) = \{\mu F_X(x - J_\mu(x))\}$ pentru orice $x \in X$. Utilizând Consecinţa 2.4.4 obţinem că $f_Y(\cdot,\mu)$ este G-diferenţiabilă şi $\nabla f_Y(x,\mu) = \mu F_X(x - J_\mu(x))$ pentru orice $x \in X$.

3) Fie acum X spaţiu Hilbert; în acest caz $F_X(x) = x$ pentru orice $x \in X$. Să arătăm că $f_Y(\cdot,\mu)$ este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$. Fie $x \in X$. Avem că

$$\begin{aligned}
\langle x - \bar{x}, \mu(\bar{x} - J_\mu(\bar{x}))\rangle &\le f_Y(x,\mu) - f_Y(\bar{x},\mu) \\
&\le f(J_\mu(\bar{x})) + \frac{\mu}{2}\|J_\mu(\bar{x}) - x\|^2 - f(J_\mu(\bar{x})) - \frac{\mu}{2}\|J_\mu(\bar{x}) - \bar{x}\|^2 \\
&= \langle x - \bar{x}, \mu(\bar{x} - J_\mu(\bar{x}))\rangle + \frac{\mu}{2}\|x - \bar{x}\|^2.
\end{aligned}$$

De aici este evident că $f_Y(\cdot,\mu)$ este F-diferenţiabilă în $\bar{x}$ şi $\nabla f_Y(\bar{x},\mu) = \mu(\bar{x} - J_\mu(\bar{x}))$.

Exerciţiul 21 *Fie funcţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că $\varphi(0) = 0$, unde $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Considerăm funcţia*

$$\varphi^\times : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \varphi^\times(y) := \sup\{xy - \varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}_+\}.$$

Să se arate următoarele:

a) Funcţia $\varphi^\times$ este bine definită, $\varphi^\times(0) = 0$, iar $\varphi^{\times\times} = \overline{\operatorname{conv}}\,\varphi$, unde $\overline{\operatorname{conv}}\,\varphi$ este acea funcţie $\psi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ a cărei epigraph este $\overline{\operatorname{conv}}\,(\operatorname{epi}\varphi)$.

b) Fie X spaţiu normat şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f(x) := \varphi(\|x\|)$. Atunci pentru orice $x^* \in X^*$, $f^*(x^*) = \varphi^\times(\|x^*\|)$ iar $f^{**}(x) = \varphi^{\times\times}(\|x\|)$ pentru $x \in X$.

c) Presupunem că funcţia φ este crescătoare, $\varphi(x) > 0$ pentru $x > 0$ şi $\psi = \overline{\operatorname{conv}}\,\varphi$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente: 1) există $x > 0$ astfel ca $\psi(x) > 0$, 2) $\psi(x) > 0$ pentru orice $x > 0$, 3) $\liminf_{x\to\infty} \varphi(x)/x > 0$.

Soluţie. a) Din faptul că $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(y) \geq 0$ pentru $y \geq 0$ se obţine imediat că $\varphi^\times(0) = 0$ şi $\varphi^\times(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, ceea ce arată că $\varphi^\times$ este bine definită. Fie prelungirea $\tilde{\varphi}$ a lui φ definită prin $\tilde{\varphi}(x) = \infty$ pentru $x < 0$. Pentru $x < 0$ avem că

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \sup\{xy - \tilde{\varphi}(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \sup\{xy - \varphi(y) \mid y \geq 0\} = 0,$$

iar pentru $x \geq 0$

$$\tilde{\varphi}^*(x) = \sup\{xy - \tilde{\varphi}(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \sup\{xy - \varphi(y) \mid y \geq 0\} = \varphi^\times(x).$$

Prin urmare, pentru $x < 0$

$$\tilde{\varphi}^{**}(x) = \sup\{xy - \tilde{\varphi}^*(y) \mid y \in \mathbb{R}\} \geq \sup\{xy \mid y < 0\} = \infty,$$

iar pentru $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{**}(x) &= \sup\{xy - \tilde{\varphi}^*(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \max\left\{0, \sup\{xy - \varphi^\times(y) \mid y \geq 0\}\right\} \\ &= \max\{0, \varphi^{\times\times}(x)\} = \varphi^{\times\times}(x). \end{aligned}$$

Cum $\tilde{\varphi} \geq 0$, avem că $\tilde{\varphi}^{**} = \overline{\text{conv}}\, \tilde{\varphi}$; utilizând calculele de mai sus obţinem că $\varphi^{\times\times} = \overline{\text{conv}}\, \varphi$.

b) Pentru $x^* \in X^*$ avem că

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup\{\langle x, x^*\rangle - \varphi(\|x\|) \mid x \in X\} = \sup\{\langle x, x^*\rangle - \varphi(t) \mid x \in X,\ t \geq 0,\ \|x\| = t\} \\ &= \sup_{t\geq 0} \sup_{\|x\|=t} (\langle x, x^*\rangle - \varphi(t)) = \sup_{t\geq 0} (t\|x^*\| - \varphi(t)) = \varphi^\times(\|x^*\|). \end{aligned}$$

Relaţia $f^{**}(x) = \varphi^{\times\times}(\|x\|)$ rezultă în mod asemănător.

c) Presupunem acum că φ este crescătoare, $\varphi(x) > 0$ pentru $x > 0$ şi notăm $\overline{\text{conv}}\, \varphi$ prin ψ. Este evident că $0 \leq \psi \leq \varphi$, şi deci $\psi(0) = 0$. Implicaţia 2) $\Rightarrow$ 1) este clară.

3) $\Rightarrow$ 2) Fie $2\alpha := \liminf_{x\to\infty} \varphi(x)/x > 0$; există atunci $\rho > 0$ astfel ca $\varphi(x) \geq \alpha x$ pentru $x \geq \rho$. Fie $x \geq 0$ astfel ca $\psi(x) = 0$; prin urmare $(x, 0) \in \text{epi}\, \psi = \overline{\text{conv}}\,(\text{epi}\, \varphi) \subset \mathbb{R}^2$. Utilizând Teorema lui Carathéodory (Teorema 1.3.1), pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3\}$ există şirurile (λ_n^i), (x_n^i), $(t_n^i) \subset \mathbb{R}_+$ cu $\lambda_n^1 + \lambda_n^2 + \lambda_n^3 = 1$, $\varphi(x_n^i) \leq t_n^i$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $1 \leq i \leq 3$, astfel ca $\sum_{i=1}^3 \lambda_n^i x_n^i \to x$ şi $\sum_{i=1}^3 \lambda_n^i t_n^i \to \psi(x) = 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că

$$x_n^i \to x^i \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ t_n^i \to t^i \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ \lambda_n^i \to \lambda^i \in [0, 1],\ \lambda_n^i x_n^i \to y^i \in \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ şi } \lambda_n^i t_n^i \to \tau^i \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Desigur, $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1$, $y^1 + y^2 + y^3 = x$ şi $\tau^1 + \tau^2 + \tau^3 = 0$. Prin urmare $\tau^1 = \tau^2 = \tau^3 = 0$. Dacă $\lambda^i > 0$, deoarece $\lambda_n^i t_n^i \to 0$, rezultă că $t^i = 0$, şi deci $\varphi(x_n^i) \to 0$. Având în vedere că φ este crescătoare, din ipoteză avem că în acest caz $x_n^i \to x^i = 0$, care la rândul său implică $y^i = 0$. Dacă $\lambda^i = 0$ şi $y^i > 0$, atunci $x_n^i \to \infty$. Există $n_i \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n^i \geq \rho$ pentru $n \geq n_i$. Prin urmare pentru $n \geq n_i$ avem că $t_n^i \geq \varphi(x_n^i) \geq \alpha x_n^i$, şi deci $\lambda_n^i t_n^i \geq \alpha \lambda_n^i x_n^i$, ceea ce antrenează faptul că $0 = \tau^i \geq \alpha y^i > 0$, absurd. Prin urmare $y^1 = y^2 = y^3 = 0$, şi deci $x = 0$.

1) $\Rightarrow$ 3) Presupunem că $\liminf_{x\to\infty} \varphi(x)/x = 0$; atunci există $(x_n) \subset \mathbb{R}_+$ astfel ca $x_n \to \infty$ şi $\varphi(x_n) = \alpha_n x_n$ cu $\alpha_n \to 0$. Fie $x \in]0, \infty[$; există $n_x \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \geq x$ pentru $n \geq n_x$. Fie $\lambda_n := x/x_n \in]0, 1[$ pentru $n \geq n_x$; atunci

$$\lambda_n(x_n, \varphi(x_n)) = (x, \alpha_n x) \in \text{conv}\,(\text{epi}\, \varphi) \subset \text{epi}\, \psi,$$

ceea ce antrenează faptul că $(x, 0) \in \text{epi}\, \psi$. Prin urmare $\psi(x) = 0$ pentru orice $x > 0$. Demonstraţia este completă.

Exerciţiul 22 *Fie X spaţiu normat, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie proprie, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $\bar{x}^* \in X^*$. Fie $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) := f(x) - \langle x, \bar{x}^* \rangle$. Considerăm următoarele aserţiuni:*

a) f este (slab) i.s.c. în $\bar{x}$, $\bar{x}^* \in \operatorname{dom} f^*$, f^* este (Gâteaux) Fréchet diferenţiabilă în $\bar{x}^*$ şi $\nabla f^*(\bar{x}^*) = \bar{x}$.

b) $g(\bar{x}) = \inf g(X)$ şi ($x_n \xrightarrow{w} \bar{x}$) $x_n \to \bar{x}$ dacă $g(x_n) \to g(\bar{x})$, adică (g, X) este (slab) Tihonov bine pusă.

c) $f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Să se arate că a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Dacă în plus f este convexă atunci a) $\Leftrightarrow$ b).

Soluţie. b) $\Rightarrow$ c) Avem că

$$\begin{array}{rcl} [g(x) \geq g(\bar{x})\ \forall x \in X] & \Leftrightarrow & \bar{x}^* \in \partial f(\bar{x}) \Leftrightarrow [\bar{x}^* \in \operatorname{dom} f^* \text{ şi } f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*)] \\ & \Rightarrow & f(\bar{x}) \leq f^{**}(\bar{x}). \end{array}$$

Cum inegalitatea inversă are loc întotdeauna, avem că $f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Atât în cazul a) cât şi b) avem că $\bar{x}^* \in \operatorname{dom} f^*$ şi $\bar{x} \in \partial f^*(\bar{x}^*)$. Înlocuind eventual funcţia f prin

$$h : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad h(x) := f(\bar{x} + x) + f^*(\bar{x}^*) - \langle \bar{x} + x, \bar{x}^* \rangle$$

(deci $h^*(x^*) = f^*(\bar{x}^* + x^*) - f^*(\bar{x}^*) - \langle \bar{x}, x^* \rangle$), putem presupune că $\bar{x} = 0$, $\bar{x}^* = 0$, $f^*(0) = 0$ şi $0 \in \partial f^*(0)$, ceea ce şi facem în continuare. În această situaţie $g = f$. Se obţine imediat că

$$f(x) \geq f^{**}(x) \geq f^{**}(0) = 0 \quad \forall x \in X.$$

a) $\Rightarrow$ b) Considerăm pentru început cazul în care f este i.s.c. în $\bar{x} = 0$ şi f^* este Fréchet diferenţiabilă în $\bar{x}^* = 0$. Deoarece $\nabla f^*(0) = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leq \delta(\varepsilon)\ :\ f^*(x^*) \leq \varepsilon \|x^*\|.$$

Considerăm funcţia

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \varphi(t) = \inf\{\varepsilon t \mid \varepsilon > 0,\ \delta(\varepsilon) \geq t\}.$$

Este clar că $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$ pentru $0 \leq t_1 \leq t_2$; în plus

$$f^*(x^*) \leq \varphi(\|x^*\|) \quad \forall x^* \in X^*.$$

Din această relaţie, utilizând şi Exerciţiul 21, rezultă că

$$f^{**}(x) \geq (\varphi \circ \|\ \|)^*(x) = \varphi^{\times}(\|x\|) \quad \forall x \in X.$$

Din definiţia lui φ avem că, pentru $\tau \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{\times}(\tau) & = & \sup\{t\tau - \varphi(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\} = \sup\{t(\tau - \varepsilon) \mid t \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon > 0,\ \delta(\varepsilon) \geq t\} \\ & = & \sup\limits_{\varepsilon > 0} [\delta(\varepsilon) \max\{0, \tau - \varepsilon\}] \geq 0 = \varphi^{\times}(0). \end{array}$$

În plus $\varphi^{\times}(\tau) > 0$ pentru $\tau > 0$. Deoarece $\varphi^{\times}$ este convexă, conform Teoremei 2.1.4 (ii), aplicaţia $]0, \infty[\ni \tau \mapsto \varphi^{\times}(\tau)/\tau \in \overline{\mathbb{R}}$ este crescă-toare, şi deci $\varphi^{\times}$ este crescătoare pe $[0, \infty[$.

Fie $(x_n) \subset X$ astfel ca $f(x_n) \to \inf f = -f^*(0) = 0$ (cel puţin un astfel de şir există). Presupunem că $x_n \not\to 0$. Atunci există $\alpha > 0$ astfel ca $P := \{n \in \mathbb{N} \mid \|x_n\| \geq \alpha\}$ este mulţime infinită. Prin urmare

$$f(x_n) \geq f^{**}(x_n) \geq \varphi^{\times}(\|x_n\|) \geq \varphi^{\times}(\alpha) > 0 \quad \forall n \in P,$$

ceea ce contrazice faptul că $f(x_n) \to 0$. Deci $x_n \to 0$. Deoarece f este i.s.c. în $\bar{x} = 0$, obţinem că $0 \leq f(0) \leq \liminf f(x_n) = 0$, adică $f(0) = 0$. Am obţinut astfel că $f(x) \geq f(0)$ pentru orice $x \in X$ şi $f(x_n) \to f(0) \;\Rightarrow\; x_n \to 0$.

Presupunem acum că f este w-i.s.c. în $\bar{x} = 0$, f^* este Gâteaux diferenţiabilă în $\bar{x}^* = 0$ şi $\nabla f^*(0) = 0$. Fie $(x_n) \subset X$ astfel ca $f(x_n) \to \inf f = -f^*(0) = 0$ (cel puţin un astfel de şir există). Arătăm că $x_n \xrightarrow{w} 0$. În caz contrar există $x^* \in X^*$ astfel ca $P := \{n \in \mathbb{N} \mid \langle x_n, x^* \rangle \geq 1\}$ să fie infinită. Atunci

$$f^*(tx^*) \geq \langle x_n, tx^* \rangle - f(x_n) \geq t - f(x_n) \quad \forall t > 0,\ \forall n \in P.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ $(n \in P)$, obţinem că $f^*(tx^*) \geq t$ pentru $t > 0$, şi deci $0 = \nabla f^*(0)(x^*) \geq 1$. Această contradicţie arată că $x_n \xrightarrow{w} 0$. Cum f este w-i.s.c. în 0, obţinem că $0 \leq f(0) \leq \liminf f(x_n) = 0$. Am obţinut astfel că $f(x) \geq f(0)$ pentru orice $x \in X$ şi $f(x_n) \to f(0) \;\Rightarrow\; x_n \xrightarrow{w} 0$ şi în acest caz.

b) $\Rightarrow$ a) dacă f este convexă. Inferioara semicontinuitate (slabă şi tare) a funcţiei f în $\bar{x} = 0$ este evidentă deoarece $f(0) = \inf f$ $(= -f^*(0) = 0)$.

Presupunem pentru început că $x_n \to 0$ dacă $f(x_n) \to 0$. Fie funcţia

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \varphi(t) := \inf\{f(x) \mid x \in X,\ \|x\| = t\}.$$

Este evident că $\varphi(0) = 0$, iar $\varphi(t) > 0$ pentru $t > 0$ (într-adevăr, dacă $\varphi(t) = 0$, atunci există $(x_n) \subset X$ astfel ca $f(x_n) \to 0$ şi $\|x_n\| = t$ pentru orice n; din ipoteză avem că $x_n \to 0$, şi deci $t = 0$). În plus aplicaţia $0 < t \mapsto \varphi(t)/t \in]0, \infty]$ este crescătoare, şi deci şi φ este crescătoare. Într-adevăr, fie $0 < \tau < t$ şi $x \in X$ astfel ca $\|x\| = t$. Atunci $\varphi(\tau) \leq f(\frac{\tau}{t}x) \leq \frac{\tau}{t} f(x)$, ceea ce arată că $\varphi(\tau)/\tau \leq \varphi(t)/t$. Cum $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = \sup\{\varphi(t)/t \mid t > 0\} > 0$, utilizând Exerciţiul 21, obţinem că $\varphi^{\times\times}(t) = \overline{\operatorname{conv}}\, \varphi(t) > 0$ pentru orice $t > 0$. Presupunem că $\lim_{t\downarrow 0} \varphi^{\times}(t)/t > 0$. În acest caz există $\alpha > 0$ astfel ca $\varphi^{\times}(t) \geq \alpha t$ pentru orice $t \geq 0$, şi deci $\varphi^{\times\times}(\alpha) = \sup\{\alpha t - \varphi^{\times}(t) \mid t \geq 0\} = 0$, absurd. Prin urmare $\lim_{t\downarrow 0} \varphi^{\times}(t)/t = 0$.

Din construcţia lui φ avem că $f(x) \geq \varphi(\|x\|)$ pentru orice $x \in X$, şi deci, utilizând din nou Exerciţiul 21, avem că $0 = f^*(0) \leq f^*(x^*) \leq \varphi^{\times}(\|x^*\|)$ pentru orice $x^* \in X^*$. Prin urmare $\lim_{x^*\to 0}[f^*(x^*) - f^*(0)]/\|x^*\| = \lim_{t\downarrow 0} \varphi^{\times}(t)/t = 0$, ceea ce arată că f^* este Fréchet diferenţiabilă în 0 şi $\nabla f^*(0) = 0$.

Presupunem acum că $x_n \xrightarrow{w} 0$ dacă $f(x_n) \to 0$. Fie $x^* \in X^*$ fixat. Presupunem că $f^{*\prime}_{+}(0, x^*) > 0$, adică există $\mu > 0$ astfel ca $f^*(tx^*) > t\mu$ pentru orice $t > 0$. Rezultă că $f^*(\frac{1}{n}x^*) > \frac{1}{n}\mu$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci există $(x_n) \subset X$ astfel ca

$$\frac{\|x_n\| \cdot \|x^*\|}{n} \geq \frac{1}{n}\langle x_n, x^* \rangle > \frac{1}{n}\langle x_n, x^* \rangle - \frac{\mu}{n} > f(x_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{*}$$

Rezultă că $\langle x_n, x^* \rangle > \mu$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că (x_n) nu are nici un subşir convergent slab la 0. Presupunem că (x_n) conţine un subşir (x_{n_k}) mărginit. Din $(^*)$ obţinem că $0 \leq f(x_{n_k}) \leq \|x_{n_k}\| \cdot \|x^*\|/n_k \to 0$, şi deci, din ipoteză, $x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$, absurd. Prin urmare $\alpha_n := \|x_n\| \to \infty$. Să presupunem că $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n/n < \infty$. Fie $t_n := \sqrt{\alpha_n}$ $(\to \infty)$ şi $y_n := \frac{1}{t_n}x_n$; desigur, $\|y_n\| \to \infty$. Avem că $0 \leq f(y_n) \leq \frac{1}{t_n}f(x_n) \leq \frac{\alpha_n}{nt_n}\|x^*\| \to 0$. Prin urmare $f(y_n) \to 0$, iar din ipoteză avem că $y_n \xrightarrow{w} 0$, contrazicând faptul că $(\|y_n\|)$ este şir nemărginit. Deci $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n/n = \infty$. Fie $(n_k) \subset \mathbb{N}^*$ un şir strict crescător astfel ca $\alpha_{n_k}/n_k \to \infty$. Considerăm $t_k := \alpha_{n_k}/\sqrt{n_k}$ $(\to \infty)$ şi $y_k := \frac{1}{t_k}x_{n_k}$; desigur, $\|y_k\| \to \infty$. Avem că

$$0 \le f(y_k) \le \frac{1}{t_k} f(x_{n_k}) \le \frac{\alpha_{n_k}}{t_k n_k}\|x^*\| = \frac{1}{\sqrt{n_k}}\|x^*\| \to 0.$$

Prin urmare $f(y_k) \to 0$, şi deci $y_k \xrightarrow{w} 0$, contrazicând faptul că (y_k) este nemărginit.

Din cele de mai sus rezultă că ${f^*}'_+(0, x^*) \le 0$ pentru orice $x^* \in X^*$. Aceasta ne arată că $0 \in \operatorname{aint}(\operatorname{dom} f^*)$, şi cum ${f^*}'_+(0, \cdot)$ este subliniară (şi finită în acest caz), rezultă că ${f^*}'_+(0, x^*) = 0$ pentru orice $x^* \in X^*$. Prin urmare f^* este Gâteaux diferenţiabilă în 0 şi $\nabla f^*(0) = 0$.

Exerciţiul 23 *Fie X un spaţiu normat şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie i.s.c., convexă şi proprie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$;

b) $\operatorname{niv}_\lambda f$ *este mulţime mărginită pentru orice* $\lambda > \inf_{x\in X} f(x)$;

c) există $\bar\lambda > \inf_{x\in X} f(x)$ *astfel că* $\operatorname{niv}_{\bar\lambda} f$ *este mulţime mărginită;*

d) există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *astfel că* $f(x) \ge \alpha\|x\| + \beta$ *pentru orice* $x \in X$;

e) $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| > 0$;

f) $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f^*)$.

În plus, dacă $p, q \in]1, \infty[$, $1/p + 1/q = 1$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

g) $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\|^p > 0$;

h) $\liminf_{\|x^*\|\to\infty} f^*(x^*)/\|x^*\|^q < \infty$;

i) există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *astfel că* $f(x) \ge \alpha\|x\|^p + \beta$ *pentru orice* $x \in X$;

j) există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, *astfel că* $f^*(x^*) \le \alpha\|x^*\|^q + \beta$ *pentru orice* $x^* \in X^*$.

Soluţie. Este evident că d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c); aceste implicaţii au loc pentru funcţii arbitrare.

c) $\Rightarrow$ b) Fie $x_0 \in X$ astfel ca $f(x_0) < \bar\lambda$ şi $\lambda > \bar\lambda$. Fie $t := (\lambda - \bar\lambda)/(\lambda - f(x_0)) \in]0, 1[$ şi $x \in \operatorname{niv}_\lambda f$. Avem că

$$f(tx_0 + (1-t)x) \le tf(x_0) + (1-t)f(x) \le tf(x_0) + (1-t)\lambda = \bar\lambda.$$

Deci

$$\frac{\lambda - \bar\lambda}{\lambda - f(x_0)} \cdot x_0 + \frac{\bar\lambda - f(x_0)}{\lambda - f(x_0)} \cdot x \in \operatorname{niv}_{\bar\lambda} f,$$

de unde obţinem că

$$x \in \frac{\lambda - f(x_0)}{\bar\lambda - f(x_0)} \cdot \operatorname{niv}_{\bar\lambda} f - \frac{\lambda - \bar\lambda}{\bar\lambda - f(x_0)} \cdot x_0.$$

Prin urmare $\text{niv}_\lambda f$ este mulţime mărginită. Concluzia are evident loc pentru $\lambda \leq \bar{\lambda}$. (Observăm că s-a utilizat numai convexitatea lui f.)

b) $\Rightarrow$ a) Demonstraţia rezultă imediat prin reducere la absurd (fără nici o condiţie asupra lui f).

e) $\Rightarrow$ d) Deoarece e) are loc, există $\alpha, \rho \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$, astfel ca $f(x) \geq \alpha\|x\|$ pentru orice $x \in X,\ \|x\| \geq \rho$. Deoarece f este convexă, proprie şi i.s.c., din Teorema 2.2.4 avem că există $x^* \in X^*$ şi $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \geq \langle x, x^*\rangle + \gamma$ pentru orice $x \in X$. Prin urmare

$$f(x) \geq -\|x\| \cdot \|x^*\| + \gamma \geq -\rho\|x^*\| + \gamma \quad \forall\, x \in X,\ \|x\| \leq \rho.$$

Luând $\beta := \min\{0, \gamma - \rho\|x^*\|\}$, d) are loc.

a) $\Rightarrow$ e) Presupunem că e) nu are loc. Atunci există $(x_n) \subset X$ astfel ca $\|x_n\| \to \infty$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x_n)/\|x_n\| = \mu \leq 0$. Rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există $n'_k \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n'_k\ :\ \|x_n\| \geq k^2 \ \text{ şi } \ f(x_n)/\|x_n\| \leq 1/k,$$

şi deci există $(n_k)_{k\in N^*} \subset \mathbb{N}$ şir strict crescător astfel ca $\|x_{n_k}\| \geq k^2$ şi $f(x_{n_k})/\|x_{n_k}\| \leq 1/k$ pentru orice k. Fixăm $\bar{x} \in \text{dom}\, f$ şi considerăm $t_k := \|x_{n_k}\|/k \geq k$ şi $y_k := (1-\frac{1}{t_k})\bar{x} + \frac{1}{t_k}x_{n_k}$. Atunci $\|y_k\| \to \infty$ şi

$$f(y_k) \leq \left(1 - \frac{1}{t_k}\right) f(\bar{x}) + \frac{1}{t_k} f(x_{n_k}) \leq 1 + \max\{0, f(\bar{x})\},$$

ceea ce arată că implicaţia a) $\Rightarrow$ e) are loc.

d) $\Rightarrow$ f) Fie $g : X \to \mathbb{R},\ g(x) := \alpha\|x\| + \beta$. Funcţia g este convexă; din Teorema 2.3.1 şi Consecinţa 2.4.5 avem că $g^*(x^*) = I_{\alpha U^*}(x^*) - \beta$. Cum $f \geq g$, avem că $f^* \leq g^*$, de unde obţinem că $\alpha U^* \subset \text{dom}\, f^*$, şi deci concluzia are loc.

f) $\Rightarrow$ d) Deoarece f^* este w^*–i.s.c., f^* este $\|\cdot\|$–i.s.c.; cum $0 \in \text{int}\,(\text{dom}\, f^*)$, din Teorema 2.2.7 rezultă că f^* este continuă în 0 şi deci există $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$, astfel ca $f^*(x^*) \leq \beta$ pentru orice $x^* \in \alpha U^*$. Prin urmare $f^* \leq I_{\alpha U^*} + \beta$, de unde, trecând la conjugate, obţinem că $f(x) \geq f^{**}(x) \geq \alpha \cdot \|x\| - \beta$ pentru orice $x \in X$.

Presupunem acum că $p,\ q \in\,]1, \infty[,\ 1/p + 1/q = 1$.

Implicaţiile i) $\Rightarrow$ g) şi j) $\Rightarrow$ h) sunt evidente, iar g) $\Rightarrow$ i) este similară implicaţiei e) $\Rightarrow$ d) demonstrată mai sus. Echivalenţa g) $\Leftrightarrow$ h) rezultă imediat din antimonotonia operatorului de conjugare şi din faptul că $(\frac{1}{p}\|\ \|^p)^* = \frac{1}{q}\|\ \|^q$. Presupunem că are loc h). Atunci există $\alpha,\ \rho > 0$ astfel ca $f^*(x^*) \leq \alpha\|x^*\|^q$ pentru $x^* \in X^*,\ \|x^*\| \geq \rho$. Cum $\text{dom}\, f^*$ este mulţime convexă, din relaţia de mai înainte, avem că $\text{dom}\, f^* = X^*$. Fie $x^* \in X^* \setminus \{0\},\ \|x^*\| < \rho$; considerăm $x_1^* := \rho x^*/\|x^*\|$. Atunci

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= f^*\left(\frac{\|x^*\|}{\rho}x_1^* + \left(1 - \frac{\|x^*\|}{\rho}\right)0\right) \leq \frac{\|x^*\|}{\rho} f^*(x_1^*) + \left(1 - \frac{\|x^*\|}{\rho}\right) f^*(0) \\ &\leq \alpha\rho^q \frac{\|x^*\|}{\rho} + \left(1 - \frac{\|x^*\|}{\rho}\right) f^*(0) \leq \alpha\rho^q + \max\{0, f^*(0)\}. \end{aligned}$$

Luând $\beta := \alpha\rho^q + \max\{0, f^*(0)\}$, obţinem că j) are loc.

Exerciţiul 24 *Fie X un spaţiu normat şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, proprie şi mărginită inferior. Considerăm $\lambda > \inf f$ şi $\rho > 0$. Fie condiţiile:*

a) $\text{niv}_\lambda f \subset \rho U$;

b) $f(x) \geq \inf f + \dfrac{\lambda - \inf f}{2\rho} \cdot \max\{0, \|x\| - \rho\} \quad \forall\, x \in X$*;*

c) $f^*(x^*) \leq f^*(0) + \rho\|x^*\| \quad \forall\, x^* \in \dfrac{\lambda - \inf f}{2\rho} \cdot U^*$.

Au loc următoarele implicaţii: a) $\Rightarrow$ *b)* $\Leftrightarrow$ *c).*

Soluţie. a) $\Rightarrow$ b) Presupunem că are loc a). Fie $x_0 \in X$ arbitrar astfel ca $f(x_0) < \lambda$. Fie $x \in X$; este clar că b) are loc pentru $\|x\| \leq \rho$. Fie deci $\|x\| > \rho$. Avem că $f(x) > \lambda$. Dacă $f(x) = \infty$ inegalitatea b) are loc. Fie deci $f(x) \in \mathbb{R}$. Dacă $f(tx + (1-t)x_0) < \lambda$ pentru orice $t \in]0,1[$ atunci $\|tx + (1-t)x_0\| \leq \rho$ pentru orice $t \in]0,1[$, şi deci $\|x\| \leq \rho$, absurd. Prin urmare există $t_1 \in]0,1[$ astfel ca $f(t_1 x + (1-t_1)x_0) \geq \lambda$. Din Teorema 2.1.8, (vii), avem că există $t_2 \in]0,1[$ astfel ca $f(t_2 x + (1-t_2)x_0) < \lambda$. Cum aplicaţia $]0,1[\ni t \mapsto f(tx + (1-t)x_0)$ este convexă, aceasta este continuă. Deci există $\bar{t} \in]0,1[$ astfel ca

$$\lambda = f(\bar{t}x + (1-\bar{t})x_0) \leq \bar{t}f(x) + (1-\bar{t})f(x_0).$$

Însă

$$\bar{t}\|x\| - (1-\bar{t})\|x_0\| \leq \|\bar{t}x + (1-\bar{t})x_0\| \leq \rho,$$

şi deci $\bar{t} \leq (\rho + \|x_0\|)/(\|x\| + \|x_0\|)$. Prin urmare

$$\lambda \leq \bar{t}\,(f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \leq \frac{\rho + \|x_0\|}{\|x\| + \|x_0\|} \cdot (f(x) - f(x_0)) + f(x_0).$$

Astfel

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\geq \quad f(x_0) + \frac{\|x\| + \|x_0\|}{\rho + \|x_0\|} \cdot (\lambda - f(x_0)) = \frac{\|x\| - \rho}{\rho + \|x_0\|} \cdot (\lambda - f(x_0)) + \lambda \\ &\geq \quad \frac{\|x\| - \rho}{2\rho} \cdot (\lambda - f(x_0)) + \lambda. \end{aligned}$$

Cum $f(x_0)$ poate fi luat oricât de aproape de $\inf f$, obţinem că

$$f(x) \geq \lambda + \frac{\|x\| - \rho}{2\rho} \cdot (\lambda - \inf f) \geq \inf f + \frac{\|x\| - \rho}{2\rho} \cdot (\lambda - \inf f),$$

ceea ce arată că are loc concluzia şi în acest caz.

b) $\Rightarrow$ c) Considerăm $\mu := (\lambda - \inf f)/(2\rho)$ şi $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) := \mu \max\{0, \|x\| - \rho\}$; g este o funcţie convexă şi continuă. Deşi pentru calculul lui g^* se pot aplica formulele pentru conjugate stabilite în Capitolul 2, vom proceda direct.

$$\begin{aligned} g^*(x^*) &= \sup_{x \in X} (\langle x, x^* \rangle - \mu \max\{0, \|x\| - \rho\}) \\ &= \max\left\{ \sup_{\|x\| \leq \rho} \langle x, x^* \rangle, \sup_{\|x\| \geq \rho} [\langle x, x^* \rangle - \mu(\|x\| - \rho)] \right\} \\ &= \max\left\{ \rho\|x^*\|, \sup_{\|x\| \geq \rho} (\langle x, x^* \rangle - \mu\|x\|) + \mu\rho \right\}. \end{aligned}$$

Însă $\sup_{\|x\| \geq \rho}(\langle x, x^* \rangle - \mu\|x\|) = \infty$ dacă $\|x^*\| > \mu$, iar dacă $\|x^*\| \leq \mu$ atunci

$$\langle x, x^* \rangle - \mu\|x\| \leq \|x\| \cdot (\|x^*\| - \mu) \leq \rho(\|x^*\| - \mu),$$

şi deci
$$\sup_{\|x\|\geq\rho} (\langle x, x^*\rangle - \mu\|x\|) + \mu\rho \leq \rho \cdot \|x^*\|.$$
Prin urmare
$$g^*(x^*) = \max\{\rho \cdot \|x^*\|, I_{\mu U^*}(x^*)\}.$$
Deoarece $f \geq \inf f + g$, iar $\inf f = -f^*(0)$, prin conjugare obţinem că $f^* \leq f^*(0) + g^*$, adică c) are loc.

c) $\Rightarrow$ b) Din c) obţinem că $f^* \leq f^*(0) + g^*$. Cum $g^{**} = g$, prin conjugare obţinem că b) are loc.

Exerciţiul 25 *Fie X un spaţiu normat şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie convexă, i.s.c. şi proprie. Au loc următoarele:*

a) $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| > 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f^*)$*; în acest caz*
$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \sup\{\mu > 0 \mid f^* \textit{ este mărginită superior pe } \mu U^*\}.$$

b) $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \in \operatorname{Fr}(\operatorname{dom} f^*)$.

c) $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| < 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \notin \overline{\operatorname{dom} f^*}$*; în acest caz*
$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = -d(0, \operatorname{dom} f^*).$$

Soluţie. a) Echivalenţa menţionată este stabilită în Exerciţiul 23.

Fie $\mu > 0$ astfel ca $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| > \mu$. Există $\rho > 0$ astfel ca $f(x) > \mu \cdot \|x\|$ pentru $\|x\| > \rho$. Cum f este convexă, i.s.c. şi proprie, f este mărginită inferior pe μU^*, şi deci există $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \geq \mu\|x\| + \gamma$ pentru orice $x \in X$. Ca în Exerciţiul 23, obţinem că $f^* \leq I_{\mu U^*} - \gamma$. Prin urmare f^* este mărginită superior pe μU^*. Deoarece $\mu \in]0, \liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\|[$ este arbitrar, obţinem inegalitatea "$\leq$" din relaţia de dovedit.

Presupunem acum că $\mu > 0$ şi f^* este mărginită superior pe μU^*. Prin urmare există $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca $f^* \leq I_{\mu U^*} - \gamma$. Trecând la conjugată, obţinem că $f(x) \geq \mu\|x\| + \gamma$ pentru orice $x \in X$, şi deci $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| \geq \mu$. Am obţinut astfel că şi inegalitatea "$\geq$" din relaţia de dovedit are loc.

Înainte de a trece la demonstrarea celorlalte două puncte, să observăm că dacă $\mu > 0$, iar
$$g : X \to \overline{\mathbb{R}},\; g(x) := f(x) + \mu\|x\|,$$
atunci, utilizând Teorema 2.7.3, avem că
$$g^*(0) = \min\{f^*(x^*) + I_{\mu U^*}(-x^*) \mid x^* \in X^*\} = \min\{f^*(x^*) \mid x^* \in \mu U^*\}.$$
Fie $\mu > 0$ astfel ca $\liminf_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\| > -\mu$. Ca mai sus obţinem că există $\gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \geq -\mu\|x\| + \gamma$, adică $g(x) := f(x) + \mu\|x\| \geq \gamma$, pentru orice $x \in X$. Prin urmare $0 \in \operatorname{dom} g^*$. Din relaţia de mai sus obţinem că există $x^* \in \mu U^* \cap \operatorname{dom} f^*$, şi deci $d(0, \operatorname{dom} f^*) \leq \mu$, ceea ce arată că
$$-d(0, \operatorname{dom} f^*) \geq \min\left\{0, \liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|}\right\}.$$

Fie acum $(x_n^*) \subset \operatorname{dom} f^*$ astfel ca $\|x_n^*\| \to d(0, \operatorname{dom} f^*)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, din inegalitatea Young-Fenchel, avem că

$$f(x) \geq \langle x, x_n^* \rangle - f^*(x_n^*) \geq -\|x\| \cdot \|x^*\| - f^*(x_n^*) \quad \forall x \in X,$$

şi deci, împărţind prin $\|x\|$ şi trecând la limită inferioară pentru $\|x\| \to \infty$, avem că

$$\liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \geq -\|x_n^*\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trecând acum la limită, obţinem că

$$\liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \geq -d(0, \operatorname{dom} f^*).$$

Am obţinut astfel că

$$\min \left\{ 0, \liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} \right\} = -d(0, \operatorname{dom} f^*). \qquad (*)$$

Demonstrăm acum celelalte două puncte rămase.

b) Dacă $\liminf_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| = 0$, din (*), avem că $0 \in \overline{\operatorname{dom} f^*}$, iar din a) avem că $0 \notin \operatorname{int}(\operatorname{dom} f^*)$. Deci $0 \in \operatorname{Fr}(\operatorname{dom} f^*)$. Invers, dacă $0 \in \operatorname{Fr}(\operatorname{dom} f^*)$ atunci $0 \notin \operatorname{int}(\operatorname{dom} f^*)$, şi deci din a) avem că $\liminf_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| \leq 0$, iar din faptul că $d(0, \operatorname{dom} f^*) = 0$ şi relaţia de mai sus obţinem că $\liminf_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| = 0$.

c) Dacă $\liminf_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| < 0$, din (*), obţinem egalitatea din c) şi faptul că $0 < d(0, \operatorname{dom} f^*)$, adică $0 \notin \overline{\operatorname{dom} f^*}$. Invers, dacă $0 \notin \overline{\operatorname{dom} f^*}$, atunci $d(0, \operatorname{dom} f^*) > 0$; din relaţia (*) rezultă că $\liminf_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| < 0$.

Exerciţiul 26 *Fie $p \in]1, \infty[$ şi*

$$f : \ell^p \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad f\left((x_n)_{n \geq 1}\right) := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n|x_n|^n.$$

Să se arate că funcţia f este finită, convexă şi continuă pe ℓ^p. În plus să se demonstreze că $\liminf_{\|y\| \to \infty} f^*(y)/\|y\| = 1$.

Soluţie. Fie $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^p$; atunci $x_n \to 0$, şi deci există $n_0 \geq 1$ astfel ca $|x_n| \leq 1/2$ pentru $n \geq n_0$. Cum seria $\sum_{n \geq 1} n/2^n$ este convergentă şi $n|x_n|^n \leq n/2^n$ pentru $n \geq n_0$, avem că seria $\sum_{n \geq 1} n|x_n|^n$ converge; prin urmare $x \in \operatorname{dom} f$.

Este evident că aplicaţia $\ell^p \ni x = (x_n)_{n \geq 1} \mapsto n|x_n|^n \in \mathbb{R}$ este funcţie convexă. Rezultă deci că aplicaţia

$$f_n : \ell^p \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} k|x_k|^k,$$

este convexă. Cum $f(x) = \lim f_n(x)$ pentru orice $x \in \ell^p$, din Teorema 2.1.2 (iii), obţinem că f este convexă.

Fie $\rho \in]0, 1[$ şi $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \rho U$. Atunci $|x_n| \leq \rho$ pentru orice $n \geq 1$. Rezultă că

$$f(x) \leq \sum\nolimits_{n \geq 1} n\rho^n \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \rho U.$$

Funcţia f fiind convexă, utilizând Teorema 2.2.6, obţinem că f este continuă pe $\operatorname{dom} f = \ell^p$.

Deoarece $f(e_n) = n$, unde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, 1 fiind pe poziţia n, obţinem că f este nemărginită pe ρU pentru orice $\rho \geq 1$. Aplicând Exerciţiul 25 a) pentru funcţia $f^* : \ell^q = (\ell^p)^* \to \overline{\mathbb{R}}$, unde $q = p/(p-1)$, obţinem că $\liminf_{\|y\| \to \infty} f^*(y)/\|y\| = 1$, deoarece $(f^*)^* = f$.

Exerciţiul 27 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $K \subset X$ un con convex închis. Pentru fiecare element $x \in X$ notăm prin $P_K(x)$ proiecţia lui x pe K; aceasta există şi este unică. Considerăm $K^- := -K^+ = \{y \in X \mid \langle x, y\rangle \le 0 \ \forall x \in K\}$. Atunci*

$$\forall x \in X \ : \ x = P_K(x) + P_{K^-}(x) \ \text{ şi } \ \langle P_K(x), P_{K^-}(x)\rangle = 0.$$

Invers, dacă $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in K$, $x_2 \in K^-$ şi $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, atunci $x_1 = P_K(x)$ şi $x_2 = P_{K^-}(x)$.

Soluţie. Fie $x \in X$ şi $x_1 \in K$. Din Teorema 2.10.3 (vi) avem că

$$\begin{aligned} x_1 = P_K(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_1, x_1 - y\rangle \ge 0 \ \ \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_1, x_1\rangle \ge \langle x - x_1, y\rangle \ \ \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x - x_1, x_1\rangle \ge 0 \ge \langle x - x_1, y\rangle \ \ \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_1 \in K^-, \ \langle x - x_1, x_1\rangle = 0. \end{aligned}$$

Fie deci $x_1 = P_K(x)$. Din caracterizarea de mai sus avem că

$$x_2 := x - x_1 \in K^-, \ \ x - x_2 = x_1 \in (K^-)^- = K \ \text{ şi } \ \langle x - x_2, x_2\rangle = \langle x_1, x - x_2\rangle = 0.$$

Din aceeaşi caracterizare rezultă că $x_2 = P_{K^-}(x)$. Deci concluzia are loc.

Presupunem acum că $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in K$, $x_2 \in K^-$ şi $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Atunci $x_1 \in K$, $x - x_1 \in K^-$ şi $\langle x - x_1, x_1\rangle = 0$. Prin urmare, din caracterizarea de mai sus, avem că $x_1 = P_K(x)$, şi deci $x_2 = P_{K^-}(x)$.

Exerciţiul 28 *Fie X, Y spaţii Hilbert, $C \subset X$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operator surjectiv. Considerăm problema*

$$(P) \qquad \min \ \tfrac{1}{2}\|Ax\|^2, \quad x \in C.$$

O soluţie $\bar{x}$ a problemei (P) se numeşte funcţie spline din C asociată operatorului A.

a) Să se arate că dacă $C + \ker A$ este mulţime închisă atunci (P) are soluţii.

b) Să se arate că $\bar{x} \in C$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $\bar{v} := A^*A\bar{x}$ satisface relaţia $\langle \bar{x}, \bar{v}\rangle = \min\{\langle x, \bar{v}\rangle \mid x \in C\}$.

Soluţie. a) Fie $\widetilde{C} := A(C)$; este evident că $\widetilde{C}$ este mulţime convexă, iar din Consecinţa 1.8.2 avem că $\widetilde{C}$ este şi închisă. Cum funcţia $Y \ni y \mapsto \frac{1}{2}\|y\|^2 + I_{\widetilde{C}}(y)$ este convexă, i.s.c. şi coercivă, iar spaţiul Y este reflexiv, din Teorema 2.5.1 (ii) avem că există $\bar{y} \in \widetilde{C}$ astfel ca $\frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2 \le \frac{1}{2}\|y\|^2$ pentru orice $y \in \widetilde{C}$. Luând $\bar{x} \in C$ astfel ca $\bar{y} = A\bar{x}$, obţinem că $\bar{x}$ este soluţie pentru (P). (Existenţa lui $\bar{y}$ este dată şi de Teorema 1.9.1 referitoare la cea mai bună aproximare în spaţii Hilbert.)

b) Fie $\bar{x} \in C$ şi $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{2}\|Ax\|^2$. Din Teorema lui Pshenichnyi-Rockafellar avem că $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $\partial f(\bar{x}) \cap (-N(C, \bar{x})) \neq \emptyset$. Cum $\partial(\frac{1}{2}\| \ \|^2)(y) = \{y\}$ pentru $y \in Y$, din Teorema 2.7.4 avem că $\partial f(x) = \{A^* Ax\}$ pentru $x \in X$. Prin urmare $\bar{x}$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă $A^* A\bar{x} \in -N(C, \bar{x})$, adică $\langle \bar{x}, \bar{v}\rangle \leq \langle x, \bar{v}\rangle$ pentru orice $x \in C$, unde $\bar{v} = A^* A\bar{x}$.

Exerciţiul 29 *Fie X, Y spaţii Hilbert, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, mulţimea*

$$C := \{x \in X \mid \langle x, \varphi_i\rangle \leq \alpha_i \ \forall i,\ 1 \leq i \leq k\},$$

presupusă nevidă, şi $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operator surjectiv. Considerăm problema

$$(P) \qquad \min \ \tfrac{1}{2}\|Ax\|^2, \quad x \in C.$$

Să se arate că (P) are soluţii optime. Presupunem în plus că există $\tilde{x} \in X$ astfel că $\langle \tilde{x}, \varphi_i\rangle < \alpha_i$ pentru orice i, $1 \leq i \leq k$. Să se arate că $\bar{x} \in C$ este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă există $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k} \subset \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lambda_i \geq 0,\ \lambda_i(\langle \bar{x}, \varphi_i\rangle - \alpha_i) = 0 \ \ \forall i,\ 1 \leq i \leq k, \quad \text{şi} \quad A^* A\bar{x} = \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_k\varphi_k.$$

Soluţie. Din Exerciţiul 7 avem că $\ker A + C$ este mulţime închisă, iar din Exerciţiul 28 a) obţinem că (P) are soluţii optime. Presupunem că există $\tilde{x}$ cu proprietatea din enunţ. Prin urmare este satisfăcută condiţia Slater pentru problema

$$\min \ \tfrac{1}{2}\|Ax\|^2, \quad \langle x, \varphi_i\rangle - \alpha_i \leq 0,\ 1 \leq i \leq k,$$

şi deci, aplicând Consecinţa 2.8.1, obţinem concluzia dorită.

Exerciţiul 30 *Fie X spaţiu normat şi f_0, $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ două funcţii convexe şi proprii. Considerăm*

$$v := \inf\{f_0(x) \mid f_1(x) \leq 0\}, \qquad v^* := \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{x\in X} \left(f_0(x) + \lambda f_1(x)\right),$$

cu convenţia $0 \cdot \infty = \infty$. Presupunem că $v \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$v^* = v \ \Leftrightarrow \ \inf\{f_1(x) \mid f_0(x) \leq v - \varepsilon\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0.$$

Soluţie. Considerând funcţia $F : X \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, u) := f_0(x)$ dacă $f_1(x) \leq u$ şi $F(x, u) := \infty$ dacă $f_1(x) > u$, iar $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţia marginală asociată lui F, avem că h este funcţie convexă, descrescătoare, $h(0) = v \in \mathbb{R}$ şi $h^{**}(0) = v^*$. Din Teorema 2.6.2 (iv), avem că $v^* = v$ dacă şi numai dacă h este i.s.c. în 0. Luând în considerare şi faptul că h este descrescătoare, obţinem

$$\begin{aligned}
v^* = v \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall u \in [-\delta, \delta] \ :\ h(u) > v - \varepsilon\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ h(\delta) > v - \varepsilon\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ [f_1(x) \leq \delta \ \Rightarrow \ f_0(x) > v - \varepsilon]\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ [f_0(x) \leq v - \varepsilon \ \Rightarrow \ f_1(x) > \delta]\\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ :\ \inf\{f_1(x) \mid f_0(x) \leq v - \varepsilon\} > 0,
\end{aligned}$$

adică are loc concluzia.

Exerciţiul 31 *Fie X spaţiu Hilbert şi a_1, a_2, a_3 trei elemente din X necoliniare (adică nesituate pe o aceeaşi dreaptă). Să se arate că există un unic element $\bar{x} \in X$ astfel ca*

$$\|\bar{x}-a_1\|+\|\bar{x}-a_2\|+\|\bar{x}-a_3\| \leq \|x-a_1\|+\|x-a_2\|+\|x-a_3\| \quad \forall x \in X.$$

În plus $\bar{x} \in \operatorname{conv}\{a_1,a_2,a_3\}$; punctul $\bar{x}$ se numeşte punctul lui Toricelli pentru triunghiul de vârfuri a_1, a_2, a_3.

Soluţie. Considerăm funcţia $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x-a_1\|+\|x-a_2\|+\|x-a_3\|$. Este evident că funcţia f este convexă şi continuă, iar $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, adică f este coercivă. Funcţia f este chiar strict convexă. Într-adevăr, pentru x, $y \in X$, avem că $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ dacă şi numai dacă există λ, $\mu \geq 0$, $\lambda+\mu > 0$, astfel ca $\lambda x = \mu y$ (adică x, y se află pe o semidreaptă cu vârful în origine). Folosind acest fapt, dacă există $x, y \in X$, $x \neq y$ şi $\lambda \in]0,1[$ astfel ca $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ atunci a_1, a_2 şi a_3 se găsesc pe dreapta determinată de x şi y, absurd. Prin urmare există un unic element $\bar{x} \in X$ astfel ca $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in X$. În plus $\bar{x}$ este caracterizat de relaţia $0 \in \partial f(\bar{x})$. Însă

$$\partial f(x) = \begin{cases} \sum_{1\leq i\leq 3} \|x-a_i\|^{-1}(x-a_i) & \text{dacă} \quad x \notin \{a_1,a_2,a_3\}, \\ \sum_{1\leq i\leq 3,\, i\neq j} \|x-a_i\|^{-1}(x-a_i) + U & \text{dacă} \quad x = a_j. \end{cases}$$

Notăm $e_i := (\bar{x}-a_i)/\|\bar{x}-a_i\|$ în cazul în care $\bar{x} \neq a_i$. Dacă $\bar{x} \notin \{a_1,a_2,a_3\}$, din relaţia $e_1+e_2+e_3 = 0$ obţinem că

$$\bar{x} = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{3} \frac{1}{\|\bar{x}-a_i\|}\right)^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^{3} \frac{a_i}{\|\bar{x}-a_i\|},$$

şi deci $\bar{x} \in \operatorname{conv}\{a_1,a_2,a_3\}$. Dacă $\bar{x} \in \{a_1,a_2,a_3\}$ atunci $\bar{x} \in \operatorname{conv}\{a_1,a_2,a_3\}$. Deci concluzia are loc.

Din condiţia $0 \in \partial f(\bar{x})$ obţinem că $\bar{x} = a_3$ dacă şi numai dacă $e_1+e_2 \in U$, ceea ce este echivalent cu $\langle e_1,e_2\rangle \leq -\frac{1}{2}$, adică $\angle(a_1,a_3,a_2) \geq 120^\circ$. Presupunem că $\bar{x} \notin \{a_1,a_2,a_3\}$. Atunci $e_1+e_2+e_3 = 0$, şi deci $\langle e_i,e_j\rangle = -\frac{1}{2}$ pentru $i \neq j$. Deci $\angle(a_i,\bar{x},a_j) = 120^\circ$ pentru $i \neq j$. În acest fel am obţinut proprietăţile cunoscute ale punctului lui Toricelli.

Exerciţiul 32 *Să se determine soluţiile optime (atunci când există) şi valoarea problemei*

$$(P_i^\mu) \qquad \min \int_0^1 \left(tx + \mu\sqrt{1+x^2}\right) dt, \ x \in X_i,$$

pentru fiecare $\mu \in [0,\infty[$ şi $i \in \{1,2,3,4\}$, unde

$$X_1 := C[0,1], \qquad X_2 := L^1(0,1),$$

$$X_3 := \left\{x \in C[0,1] \;\middle|\; \int_0^1 x\,dt = 0\right\}, \quad X_4 := \left\{x \in L^1(0,1) \;\middle|\; \int_0^1 x\,dt = 0\right\}.$$

Soluţie. Pentru fiecare $\mu \geq 0$ şi $i \in \{1,2,3,4\}$ considerăm funcţia

$$f_\mu : X_i \to \mathbb{R}, \quad f_\mu(x) := \int_0^1 \left(tx + \mu\sqrt{1+x^2}\right) dt.$$

Din Exerciţiile 11 şi 12 avem că f_μ este convexă şi de clasă $\mathcal{C}^2$ pe X_1 şi X_3, iar pe X_2 şi X_4 este G-diferenţiabilă. În fiecare caz avem că

$$\nabla f_\mu(x)(u) = \int_0^1 \left(tu + \mu\frac{xu}{\sqrt{1+x^2}}\right) dt \quad \forall\, x,\, u \in X_i.$$

În plus

$$v(P_1^\mu) \geq v(P_2^\mu), \qquad v(P_3^\mu) \geq v(P_4^\mu).$$

Fie $i = 2$ şi $\mu \geq 0$. Funcţia de minimizat fiind convexă şi G-diferenţiabilă, $x_\mu \in X_2$ este soluţie pentru (P_2^μ) dacă şi numai dacă $\nabla f_\mu(x_\mu) = 0$. Este evident că $\nabla f_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in X_2$. Fie deci $\mu > 0$. Condiţia $\nabla f_\mu(x_\mu) = 0$ revine la

$$\int_0^1 \left(t + \mu\frac{x_\mu}{\sqrt{1+x_\mu^2}}\right) u\, dt \quad \forall\, u \in X_2,$$

care, evident, este echivalentă cu fiecare din relaţiile următoare:

$$\mu\frac{x_\mu(t)}{\sqrt{1+(x_\mu(t))^2}} + t = 0 \text{ a.p.t. } t \in [0,1], \qquad x_\mu(t) = \frac{-t}{\sqrt{\mu^2 - t^2}} \text{ a.p.t. } t \in [0,1].$$

Funcţia x_μ de mai sus este în X_2 dacă şi numai dacă $\mu \geq 1$. Prin urmare pentru $\mu \geq 1$ problema (P_2^μ) are o singură soluţie optimă, x_μ, iar pentru $\mu < 1$ problema (P_2^μ) nu are soluţii optime.

Să determinăm $v(P_2^\mu)$ în cazul $\mu \in [0,1[$. Pentru fiecare $\alpha \in]0,1[$ şi $\beta \in]1,\infty[$ considerăm funcţia

$$x_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \in [0, 1-\alpha], \\ -\frac{\beta}{\alpha}(t-1+\alpha) & \text{dacă} \quad t \in]1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

Un calcul elementar ne arată că

$$f_\mu(x_{\alpha,\beta}) = \mu(1-\alpha) + \alpha\beta\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}} + \frac{\mu}{2\beta^2}\ln\left(\beta + \sqrt{1+\beta^2}\right)\right).$$

Pentru $\mu \in [0,1[$ avem că $f_\mu(x_{n^{-1},n^2}) \to -\infty$, şi deci $v(P_2^\mu) = -\infty$.

Fie acum $i = 1$. Cum $x_{n^{-1},n^2} \in X_1$, obţinem că $v(P_1^\mu) = -\infty$ pentru $\mu \in [0,1[$. Reluând calculele din cazul $i = 2$ obţinem că (P_1^μ) are soluţie optimă, dacă şi numai dacă $\mu > 1$. În plus soluţia optimă este unică, şi anume este funcţia x_μ determinată mai sus. Prin urmare $v(P_1^\mu) = v(P_2^\mu)$ pentru $\mu > 1$. Pentru $\mu = 1$ am văzut deja că $v(P_1^1) \geq v(P_2^1)$. Luând funcţia

$$x_1^n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_1^n(t) := \begin{cases} x_1(t) & \text{dacă} \quad t \in [0, 1-\frac{1}{n}], \\ x_1(1-\frac{1}{n}) & \text{dacă} \quad t \in]1-\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

pentru $n \in \mathbb{N}^*$, observăm că $x_1^n \in X_1$ şi $\lim_{n\to\infty} f_1(x_1^n) = f_1(x_1)$ (se poate utiliza Teorema lui Lebesgue). Prin urmare avem că $v(P_1^1) = v(P_1^2)$.

Fie $i = 3$. La fel ca în cazul $i = 2$, y_μ este soluţie optimă pentru (P_3^μ) dacă şi numai dacă $\nabla f_\mu(y_\mu) = 0$. Pentru $\mu = 0$ aceasta nu este posibil, şi deci (P_3^0) nu are soluţii optime. Fie $\mu > 0$ şi y_μ soluţie optimă pentru (P_3^μ). Condiţia $\nabla f_\mu(y_\mu) = 0$ revine la

$$\int_0^1 \left(t + \mu \frac{y_\mu}{\sqrt{1 + y_\mu^2}} \right) u \, dt \quad \forall\, u \in X_3.$$

Folosim următorul rezultat: Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $x \in C[a, b]$; dacă $\int_a^b x(t)u(t)\, dt = 0$ pentru orice funcţie $u \in C[a, b]$ cu $\int_a^b u(t)\, dt = 0$, atunci x este constantă. Într-adevăr, fie $c := \left(\int_a^b x(t)\, dt \right) / (b - a)$ şi $u := x - c$; din ipoteză obţinem că

$$\int_a^b (x(t) - c)^2 \, dt \;=\; \int_a^b (x(t) - c) u(t)\, dt = 0,$$

şi deci $x(t) = c$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\mu \frac{y_\mu(t)}{\sqrt{1 + (y_\mu(t))^2}} + t = \alpha \quad \forall\, t \in [0, 1],$$

de unde obţinem că

$$y_\mu(t) = \frac{\alpha - t}{\sqrt{\mu^2 - (\alpha - t)^2}} \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Pentru ca $y_\mu \in C[0, 1]$ trebuie ca $\mu > |\alpha - t|$ pentru orice $t \in [0, 1]$, adică $1 - \mu < \alpha < \mu$. Rezultă că $\mu > \frac{1}{2}$. În acest caz, $y_\mu \in X_3$ dacă şi numai dacă $\alpha = \frac{1}{2}$. Prin urmare pentru $\mu \le \frac{1}{2}$ problema (P_3^μ) nu are soluţii optime, iar pentru $\mu > \frac{1}{2}$ problema (P_3^μ) are o singură soluţie optimă, şi anume

$$y_\mu : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad y_\mu(t) = \frac{\frac{1}{2} - t}{\sqrt{\mu^2 - (\frac{1}{2} - t)^2}}.$$

Procedând în mod asemănător, dar utilizând de această dată următorul rezultat: Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, şi $x \in L_\infty(a, b)$; dacă $\int_a^b x(t)u(t)\, dt = 0$ pentru orice funcţie $u \in L_1(a, b)$ cu proprietatea că $\int_a^b u(t)\, dt = 0$, atunci x este constantă a.p.t. pe $[a, b]$ (demonstraţia este similară celei a rezultatului analog amintit mai sus), obţinem că (P_4^μ) are soluţie optimă, şi aceasta este y_μ definită mai sus, dacă şi numai dacă $\mu \ge \frac{1}{2}$.

Fie acum $\mu < \frac{1}{2}$; pentru $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\beta \in]0, \infty[$, fie

$$y_{\alpha,\beta} : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad y_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} \beta & \text{dacă} \quad t \in [0, \alpha], \\ 0 & \text{dacă} \quad t \in]\alpha, 1 - \alpha[, \\ -\beta & \text{dacă} \quad t \in [1 - \alpha, 1]. \end{cases}$$

Avem că $y_{\alpha,\beta} \in X_4$ şi

$$f(y_{\alpha,\beta}) = \alpha\beta \left(2\mu \sqrt{1 + \beta^{-2}} - 1 + \alpha \right) + \mu(1 - 2\alpha).$$

Obţinem că $f_\mu(y_{n^{-1}, n^2}) \to -\infty$, ceea ce arată că $v(P_4^\mu) = -\infty$ pentru $\mu < \frac{1}{2}$. Având în vedere că pentru orice $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{1}{2}[\times]0, \infty[$ funcţia $y_{\alpha,\beta}$ se poate aproxima punctual printr-un şir $(y_{\alpha,\beta,k})_{k \in N} \subset X_3$ astfel ca $|y_{\alpha,\beta,k}| \le |y_{\alpha,\beta}|$, utilizând eventual teorema lui Lebesgue, obţinem de asemenea că $v(P_3^\mu) = -\infty$ pentru $\mu < \frac{1}{2}$. Aproximând în mod asemănător $y_{1/2}$ se obţine că $v(P_3^{1/2}) = v(P_4^{1/2})$. Calcule elementare ne conduc la

$$v(P_1^\mu) = v(P_2^\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă} \quad \mu \in [0,1[, \\ \frac{\mu^2}{2} \arcsin \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 1} & \text{dacă} \quad \mu \in [1, \infty[, \end{cases}$$

şi

$$v(P_3^\mu) = v(P_4^\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă} \quad \mu \in [0, \frac{1}{2}[, \\ \mu^2 \arcsin \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} & \text{dacă} \quad \mu \in [\frac{1}{2}, \infty[. \end{cases}$$

Soluţia este completă.

Exerciţiul 33 *Fie problema de optimizare (convexă)*

$$(P) \qquad \max \int_0^1 x(t)\,dt, \quad x \in X,\ x(0) = x(1) = 0,\ \int_0^1 \sqrt{1 + (x'(t))^2}\,dt \le L,$$

unde $L > 0$ *este fixat, iar* $X = C^1[0,1] := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid x$ *derivabilă,* x' *continuă*$\}$ *sau* $X = AC[0,1] := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid\ x$ *absolut continuă*$\}$. *Să se determine soluţiile optime ale problemei* (P) *, atunci când există, şi valoarea ei, folosind eventual o problemă duală.*

Soluţie. Reamintim că $x \in AC[0,1]$ dacă şi numai dacă x este derivabilă a.p.t. pe $[0,1]$ şi $x' \in L^1(0,1)$. Observăm că pentru $x \in X$, $\int_0^1 x(t)\,dt = -\int_0^1 tx'(t)\,dt$. Având în vedere acest fapt, problemei (P) îi asociem problemele

$$(P_i) \qquad \min \int_0^1 tx(t)\,dt, \quad x \in X_i,\ \int_0^1 \sqrt{1 + (x(t))^2}\,dt \le L,$$

$i \in \{3,4\}$, unde spaţiile X_3 şi X_4 au fost introduse în Exerciţiul 32. Observăm că dacă $X = C^1[0,1]$ atunci $v(P) = -v(P_3)$ şi x este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă x' este soluţie pentru (P_3), iar dacă $X = AC[0,1]$ atunci $v(P) = -v(P_4)$ şi x este soluţie pentru (P) dacă şi numai dacă x' este soluţie pentru (P_4).

Considerând pentru $i \in \{3,4\}$ funcţiile

$$f, g : X_i \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -\int_0^1 tx(t)\,dt, \quad g(x) := \int_0^1 \sqrt{1 + (x(t))^2}\,dt,$$

problemele (P_i) devin

$$(P_i) \qquad \min\ f(x) \quad x \in X_i,\ g(x) \le L.$$

Funcţia f este liniară, iar g este convexă şi G-diferenţiabilă, cu $\nabla g(x)(u) = \int_0^1 xu/\sqrt{1+x^2}\,dt$ pentru x, $u \in X_i$ (vezi Exerciţiile 11 şi 12). Deci (P_i), $i \in \{3,4\}$, sunt probleme convexe.

Dacă $L < 1$ atunci, pentru fiecare $i \in \{3,4\}$, problema (P_i) nu are soluţii admisibile, iar dacă $L = 1$ atunci (P_i) are o singură soluţie admisibilă, $x = 0$, care este şi soluţie optimă.

Fie deci $L > 1$ şi $i = 4$. Cum $g(0) = 1 < L$, condiţia Slater este îndeplinită pentru problema convexă (P_4). Prin urmare soluţia admisibilă $x \in X_4$ $(g(x) \le L)$ este soluţie optimă pentru (P_4) dacă şi numai dacă există $\lambda \ge 0$ astfel ca

$$\lambda(g(x) - L) = 0, \quad \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0.$$

Să observăm că dacă $\lambda = 0$ atunci $\nabla f(x) = 0$, ceea ce evident nu este adevărat. Fie $x \in X_4$ soluţie optimă pentru (P_4); din cele de mai sus rezultă că $g(x) = L$ şi există $\lambda > 0$ astfel ca $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$, adică

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{1+x^2}} + t \right) u\,dt = 0 \quad \forall\, u \in X_4.$$

După cum am văzut în rezolvarea Exerciţiului 32, relaţia de mai sus este posibilă numai în cazul $\lambda \geq 1$, iar singura funcţie care satisface această relaţie este

$$y_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad y_\lambda(t) = \frac{\frac{1}{2} - t}{\sqrt{\lambda^2 - (\frac{1}{2} - t)^2}}.$$

Din condiţia ca $g(y_\lambda) = L$ obţinem că $2\lambda \arcsin \frac{1}{2\lambda} = L$. Funcţia $]0,1] \ni t \mapsto \frac{1}{t} \arcsin t \in \mathbb{R}$ este o funcţie strict crescătoare având imaginea $]1, \pi/2]$. Cum în cazul programării convexe condiţia necesară este şi suficientă, obţinem că pentru $L \in]1, \pi/2]$ problema (P_4) are soluţia unică y_λ, unde $2\lambda \arcsin \frac{1}{2\lambda} = L$. Soluţia (unică) a problemei (P) este în acest caz funcţia

$$x : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x(t) := \sqrt{\lambda^2 - (t - \tfrac{1}{2})^2} - \sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}} \ \forall t \in [0,1], \tag{$*$}$$

cu λ definit mai sus.

Pentru $L > \pi/2$ problema (P_4) (deci şi (P)) nu are soluţii.

Pentru a calcula valoarea problemei (P_4) asociem problema duală acesteia. Utilizând Teoremei 2.8.3 obţinem că $v(P_4) = v(D_4)$ (şi (D_4) are soluţii optime), unde

$$(D_4) \qquad \max \ \inf_{x \in X_4} (f(x) + \lambda(g(x) - L)), \quad \lambda \geq 0.$$

Ţinând seama de rezultatul obţinut la rezolvarea Exerciţiului 32,

$$v(D_4) = \max \left\{ \lambda^2 \arcsin \tfrac{1}{2\lambda} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - \tfrac{1}{4}} - \lambda L \;\middle|\; \lambda \geq \tfrac{1}{2} \right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_L^2 - \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} L \lambda_L,$$

unde λ_L este soluţia unică a ecuaţiei $2\lambda \arcsin \frac{1}{2\lambda} = L$ în cazul $L \in]1, \pi/2]$.

Pentru $i = 3$ o rezolvare similară ne arată că (P_3) are soluţie unică pentru $L \in]1, \pi/2[$, având aceeaşi expresie ca şi pentru $i = 4$, iar pentru $L \geq \pi/2$ problema nu are soluţii optime. În plus $v(P_3) = v(P_4)$ pentru orice $L > 1$.

În concluzie, problema (P) are soluţie unică pentru $L \in]1, \pi/2[$ în cazul $X = C^1[0,1]$, respectiv pentru $L \in]1, \pi/2]$ în cazul $X = AC[0,1]$, dată de formula $(*)$, şi nu are soluţii optime pentru $L \geq \pi/2$, respectiv $L > \pi/2$. În plus

$$v(P) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_L^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} L \lambda_L & \text{dacă} \quad L \in]1, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{\pi - 4L}{8} & \text{dacă} \quad L \in]\frac{\pi}{2}, \infty[, \end{cases}$$

unde λ_L este soluţia unică a ecuaţiei $2\lambda \arcsin \frac{1}{2\lambda} = L$ în cazul $L \in]1, \pi/2]$.

Exerciţiul 34 *Să se găsească soluţiile problemei*

$$(Q) \quad \max \ \int_0^1 x(t)\,dt, \ x \in C^1[0,1], \ x(0) = x(1) = 0, \ \int_0^1 \sqrt{1 + (x'(t))^2}\,dt = L,$$

unde $L > 0$ este fixat. (Problema (Q) se mai numeşte problema reginei Dido; este o problemă variaţională izoperimetrică neparametrică.)

Soluţie. Ca şi pentru problema (P) din Exerciţiul 33, (Q) nu are soluţii admisibile pentru $L < 1$, iar pentru $L = 1$ are o singură soluţie admisibilă care este şi soluţie optimă.

Fie $L \in]1, \pi/2[$. Deoarece $v(\text{P}) \geq v(\text{Q})$, iar pentru x definit în $(*)$ (de la soluţia Ex. 33) avem că x este admisibil pentru (Q) şi $f(x) = v(\text{P})$ (notaţiile fiind cele din rezolvarea Exerciţiului 33), obţinem că x este soluţie optimă pentru (Q). De altfel x este soluţie unică pentru (Q) deoarece dacă (Q) ar mai avea o soluţie $\tilde{x}$ atunci $\tilde{x}$ ar fi soluţie şi pentru (P) deoarece $v(\text{P}) = v(\text{Q})$.

Fie acum $L \geq \pi/2$. Presupunem că (Q) are soluţia x. Este clar că $x \neq 0$, şi deci $\nabla g(x) \neq 0$. Prin urmare $\nabla f(x)$ este surjectiv. Utilizând Teorema 3.3.3 obţinem existenţa unui $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$. Cum $\nabla f(x) \neq 0$, $\lambda \neq 0$. Raţionând ca în soluţia Exerciţiului 33 obţinem că x are expresia din $(^*)$ (din soluţia Ex. 33) în cazul $\lambda > 0$, şi opusa aceleia în cazul $\lambda < 0$, contrazicând faptul că $L \geq \pi/2$. Deci (Q) nu are soluţii în acest caz.

Exerciţiul 35 *Să se determine curbele netede şi închise de lungime $L > 0$ care mărginesc suprafeţe plane de arie maximă (problemă variaţională izoperimetrică parametrică).*

Soluţie. Problema dată revine la a rezolva problema de programare matematică

$$\max \ \tfrac{1}{2}\int_0^1 (xy' - yx')\,dt, \quad x,\, y \in C^1[0,1],\ x(0) = x(1),\ y(0) = y(1),\ \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = L,$$

sau echivalent

$$(P) \qquad \min \ \int_0^1 x'y\,dt, \quad x, y \in X,\ \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = L,$$

unde $X := \{x \in C^1[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $\|x\| := \max\{|x'(t)| \mid t \in [0,1]\}$. X este spaţiu Banach. Fie

$$f,\, g : X \times X \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \int_0^1 x'y\,dt, \quad g(x,y) := \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Funcţiile f şi g sunt de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $X \times X$ respectiv $X \times X \setminus \{(0,0)\}$, şi

$$\nabla f(x,y)(u,v) = \int_0^1 (yu' + x'v)\,dt = \int_0^1 (yu' - xv')\,dt,\ \ \nabla g(x,y)(u,v) = \int_0^1 \frac{x'u' + y'v'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,dt.$$

Desigur, $\operatorname{Im}(\nabla g(x,y)) = \mathbb{R}$, adică $\nabla g(x,y)$ este surjectiv, pentru orice $(x,y) \in X \times X$, $(x,y) \neq (0.0)$. Cum orice soluţie admisibilă (x,y) este nenulă, putem aplica Teorema 3.3.3 pentru soluţia optimă (x,y) a problemei (P) (presupunând că aceasta există). Deci există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $\nabla f(x,y) + \mu \nabla g(x,y) = 0$, sau echivalent

$$\int_0^1 \left(\frac{\mu x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + y \right) u'\,dt + \int_0^1 \left(\frac{\mu y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - x \right) v'\,dt = 0 \ \ \forall\, u,\, v \in X.$$

Să observăm că $\mu \neq 0$ deoarece $\nabla f(x,y) \neq 0$ pentru $(x,y) \neq (0,0)$. Luând pe rând $v = 0$ şi $u = 0$ în relaţia de mai sus, utilizând apoi rezultatul referitor la relaţii de tipul "$\int_a^b xu\,dt = 0$ pentru orice u cu $\int_a^b u = 0$", demonstrat la rezolvarea Exerciţiului 32, obţinem că există $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\frac{\mu x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + y = \alpha, \quad \frac{\mu y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - x = -\beta \ \text{ pe } \ [0,1].$$

Prin urmare $(x-\beta)^2 + (y-\alpha)^2 = \mu^2$ pe $[0,1]$. Cum $x(0) = y(0) = 0$, avem că $\alpha^2 + \beta^2 = \mu^2$. Să observăm că dacă (x,y) este soluţie admisibilă pentru (P) atunci $(\tilde{x}, \tilde{y})$ este soluţie admisibilă pentru (P) şi $f(x,y) = f(\tilde{x}, \tilde{y})$, unde

$$\tilde{x} := x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad \tilde{y} := x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Alegând convenabil pe φ putem presupune că $\alpha = 0$ şi $\beta > 0$. Să considerăm cazul în care $\mu > 0$; atunci $\mu = \beta$. Prin urmare avem că

$$\frac{\beta x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = -y, \quad \frac{\beta y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x - \beta, \quad (x-\beta)^2 + y^2 = \beta^2. \tag{$\circ$}$$

Deoarece $x(0) = 0$, există $\gamma_1 \in]0,1]$ maximal astfel ca $x(t) < \beta$ pentru orice $t \in [0, \gamma_1[$. Din a doua relaţie din ($^\circ$) obţinem că $y' < 0$ pe $[0, \gamma_1[$, şi deci y este strict descrescătoare pe $[0, \gamma_1]$. Prin urmare $y(t) < y(0) = 0$ pentru orice $t \in]0, \gamma_1]$. Din prima relaţie din ($^\circ$) obţinem că $x' > 0$ pe $]0, \gamma_1[$, de unde x este strict crescătoare pe $[0, \gamma_1]$. Prin urmare $x(\gamma_1) > 0$, ceea ce arată că $\gamma_1 < 1$. Din maximalitatea lui γ_1 obţinem că $x(\gamma_1) = \beta$ şi deci $y(\gamma_1) = -\beta < 0$.

Raţionând în acelaşi mod obţinem că există $\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4 \in]\gamma_1, 1]$ astfel ca $\gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4$, x este strict crescătoare pe $[\gamma_1, \gamma_2]$ (deci pe $[0, \gamma_2]$) şi strict descrescătoare pe $[\gamma_2, \gamma_4]$, y este strict crescătoare pe $[\gamma_1, \gamma_3]$ şi strict descrescătoare pe $[\gamma_3, \gamma_4]$, iar $x(\gamma_2) = x(\gamma_4) = 0$, $x(\gamma_3) = \beta$, $-y(\gamma_1) = y(\gamma_3) = \beta$, $y(\gamma_2) = y(\gamma_4) = 0$.

În cazul în care $\gamma_4 < 1$ se continuă procedeul obţinându-se $\gamma_5,\ \gamma_6,\ \gamma_7,\ \gamma_8 \in]\gamma_4, 1]$ cu proprietăţi similare elementelor $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4$. Dacă $\gamma_8 < 1$ acest procedeu se continuă.

Funcţia

$$\varphi : [0, \gamma_4] \to [-\pi, \pi], \quad \varphi(t) := \begin{cases} -\arccos \frac{x(t)-\beta}{\beta} & \text{dacă} \quad t \in [0, \gamma_2], \\ \arccos \frac{x(t)-\beta}{\beta} & \text{dacă} \quad t \in]\gamma_2, \gamma_4], \end{cases}$$

este strict crescătoare şi derivabilă cu derivata continuă. În plus

$$x(t) = \beta \cos \varphi(t) + \beta, \quad y(t) = \beta \sin \varphi(t) \quad \forall\, t \in [0, \gamma_4].$$

Utilizând formulele de mai sus, avem că

$$\int_0^{\gamma_4} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 2\pi\beta, \quad \int_0^{\gamma_4} x'y\, dt = -\pi\beta^2.$$

Dacă procedeul descris mai sus pentru obţinerea numerelor γ_k s-ar continua de un număr n de ori cu $n > L/(2\pi\beta)$ am obţine că

$$L = \int_0^{\gamma_4} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt + \cdots + \int_{\gamma_{4n-4}}^{\gamma_{4n}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt + \int_{g_{4n}}^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt \geq 2n\pi\beta > L,$$

absurd. Deci procedeul se poate repeta de un număr n ($\in \mathbb{N}^*$) de ori ($\gamma_{4n} = 1$) şi $L = 2n\pi\beta$. Dacă $n > 1$ atunci

$$f(x, y) = -n\pi\beta^2 = -\frac{L^2}{4n\pi} > -\frac{L^2}{4\pi} = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

unde $\bar{x}(t) := \frac{L}{2\pi}(1 + \cos 2\pi t)$, $\bar{y}(t) := \frac{L}{2\pi} \sin 2\pi t$, $t \in [0,1]$, contrazicând faptul că (x, y) este soluţie optimă. Deci $n = 1$. Am obţinut astfel că

$$x(t) = \frac{L}{2\pi}\left(1 + \cos \varphi(t)\right), \quad y(t) = \frac{L}{2\pi} \sin \varphi(t) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Dacă $\mu < 0$, facând un raţionament complet analog celui de mai sus, se obţine că $f(x, y) > 0$, şi deci (x, y) nu este soluţie optimă pentru (P).

Este clar că soluţia problemei (P) nu este unică.

Note bibliografice

Capitolul 1

Rezultatele din Secţiunea 1.1 prezentate fără demonstraţii sunt clasice şi se găsesc în toate cărţile de topologie. Se poate consulta, de exemplu, O. Costinescu [13], inclusiv pentru teorema lui Tihonov. Teoremele lui Baire sunt prezentate după L. Schwartz [48]. Pentru funcţii semicontinue se poate consulta A. Precupanu [41]. Principiul variaţional al lui Ekeland [20] este prezentat după cartea J.P. Aubin - H. Frankowska [1].

Aproape toate rezultatele din Secţiunile 1.3 – 1.10 sunt clasice şi pot fi găsite în cărţile: R. Cristescu [14], N. Gheorghiu [24], R.B. Holmes [30], T. Precupanu [43]. Pentru demonstraţia teoremei lui James se pot consulta [30] sau [43]. Teorema lui Robinson-Ursescu este prezentată sub forma dată de S. Robinson [44]; C. Ursescu [53] a stabilit acest rezultat în condiţii mult mai generale. Consecinţa 1.8.2 este dovedită în [56] pentru spaţii Fréchet (spaţii local convexe complete şi metrizabile). Teorema 1.8.11, fără punctele (ii) şi (iii), se găseşte în cartea lui K. Yosida [54]. Rezultatele cantitative de la punctele (ii) şi (iii) sunt probabil cunoscute, însă nu putem indica nici o referinţă precisă pentru ele. Pentru diferenţiabilitate în spaţii normate se poate consulta cartea lui T.M. Flett [23]. Teorema 1.10.10 este o generalizare a Teoremei lui Aubin - Frankowska.

Capitolul 2

Cele mai multe din rezultatele acestui capitol sunt standard şi pot fi găsite în cărţile autorilor V. Barbu - T. Precupanu [5], R.T. Rockafellar [45] (pentru spaţii finit dimensionale), I. Ekeland - R. Temam [21], R.B. Holmes [29]. Pentru comentarii istorice recomandăm aceste cărţi. Vom face referiri la acele rezultate care nu se găsesc în aceste cărţi. Astfel Teorema 2.2.2 a fost stabilită de J.P. Crouzeix [15] în spaţii finit dimensionale, iar pentru rezultatul referitor la locala lipschitzianitate a funcţiilor convexe în spaţii local convexe se poate consulta [56]. Teorema 2.4.4 este demonstrată în [45] în spaţii finit dimensionale şi formulată de J.B. Hiriart-Urruty [26] în cazul general, iar Teorema

2.4.7, punctele (i) şi (iii), sunt stabilite în [57]. Rezultate de tipul celor din Teorema 2.4.8, punctele (iv), (v), (vi) şi Teorema 2.4.9 se pot găsi în cărţile autorilor J. Diestel [18], I. Ciorănescu [11], respectiv [58], în forme chiar mai generale.

Utilizarea sistematică a funcţiilor de perturbare pentru obţinerea formulelor de dualitate, pentru funcţii conjugate, subdiferenţiale şi condiţii de optimalitate a fost începută de R.T. Rockafellar [47]. Autorul acestui curs a continuat utilizarea acestui procedeu în [59] (şi alte lucrări) pentru obţinerea unor astfel de rezultate, precum şi a formulelor pentru ε–subdiferenţiale, în cazul funcţiilor cu valori vectoriale. Aceasta a permis, de exemplu, reobţinerea unor rezultate stabilite de S.S. Kutateladze [32], [33], [34] cu demonstraţii mult mai simple. Condiţiile foarte generale în care se obţin aceste formule în curs au la bază lucrările [59], [60]. Formula pentru $\partial_\varepsilon h(y)$ din Teorema 2.6.3 a fost stabilită de M. Moussaoui - A. Seeger [39], iar cea pentru $\partial_\varepsilon h^*(y^*)$, precum şi Teorema 2.6.4, sunt stabilite aici pentru prima dată. Consecinţele 2.6.1 – 2.6.4 pot fi găsite în articolele [39], [28], [27]. Rezultatul de la punctul (ii) din Consecinţa 2.6.6 ($n = 2$) se poate găsi în [55]. Condiţia (i') din Teorema 2.6.5 pentru $Y_0 = Y$ este echivalentă cu condiţia (4.2') din [59] (deoarece X este spaţiu normat); fără cerinţa ca θ să fie mărginită (adică (i)), această condiţie este introdusă de R.T. Rockafellar [47]. Condiţiile (i) din Teoremele 2.7.1 – 2.7.4 sunt folosite, în mod explicit, de D. Azé [2] pentru A operator dens definit cu grafic închis. Formula pentru $(f_1 \nabla f_2)^*$ din Consecinţa 2.7.6 se poate găsi în [49]; A. Seeger şi M. Volle au obţinut formulele (2.47) şi (2.48) în cazul în care f_1 şi f_2 sunt continue în $\bar{x}_1$ respectiv $\bar{x}_2$.

Teoremele lui Borwein, Brøndsted - Rockafellar şi Bishop - Phelps din Secţiunea 2.9 sunt prezentate după cartea lui R. Phelps [40], iar Teorema lui Simons şi demonstraţia Teoremei lui Rockafellar după lucrările lui S. Simons [50, 51]. Remarcăm că în multe cărţi se preferă să se demonstreze teorema lui Rockafellar [46] în spaţii reflexive, utilizând un rezultat referitor la operatori maximal monotoni. În [40] este demonstrată formula din Teorema 2.9.5 numai pentru x din domeniul funcţiei f. Rezultatele din Secţiunea 2.10 sunt clasice şi pot fi găsite în cărţile autorilor R.B. Holmes [29], T. Precupanu [43].

Capitolul 3

Rezultatele referitoare la conurile tangente ale lui Bouligand, Clarke şi Ursescu din Secţiunea 3.1 sunt prezentate, în principal, după monografia autorilor J.P. Aubin - H. Frankowska [1]. Pentru un studiu mai aprofundat şi aplicaţii ale conului tangent în sensul lui Clarke se poate consulta monografia lui F.H. Clarke [12]. Tot după [1] sunt prezentate Teorema lui Aubin - Frankowska şi formulele pentru conuri tangente din Teorema 3.2.3.

Condiţiile necesare de minim şi cele suficiente sunt bine cunoscute în spaţii finit dimensionale; se pot consulta cărţile autorilor M.R. Hestenes [25], M.S. Bazaraa - C.M. Shetty [6], M. Bianchi [7]. Noi am căutat să le obţinem ca aplicaţii ale rezultatelor de analiză convexă utilizând rezultatele generale date de Teoremele 3.3.1 şi 3.3.2. Rezultatele din Secţiunea 3.4 sunt stabilite de I. Ekeland [20]. Noţiunea de mulţime aproximată de un con este introdusă de H. Maurer - J. Zowe [36].

Exerciţii

Problemele propuse sunt, în general, rezultate cunoscute sau rezultate ajutătoare stabilite în diverse lucrări. Astfel Exerciţiul 2 este din [37], Exerciţiul 4 din [16], Exerciţiul 15 din [17] (acolo, într-o prezentare mai completă), Exerciţiile 17 şi 30 din [22], Exerciţiile 19 şi 25 c) din [9], Exerciţiul 20 din [5], Exerciţiul 21 este din [58], implicaţia a) $\Rightarrow$ c) din Exerciţiul 22 este rezultatul central din [52], în timp ce implicaţia b) $\Rightarrow$ a) din acelaşi exerciţiu se găseşte în [19], echivalenţele e) $\Leftrightarrow$ f) şi g) $\Leftrightarrow$ h) din Exerciţiul 23 sunt din [58], Exerciţiul 24, implicaţia a) $\Rightarrow$ c), într-o formă mai slabă, din [3], Exerciţiile 28, 29 şi, parţial, Exerciţiul 7 din [35], Exerciţiul 27 este un rezultat clasic din [38], iar Exerciţiile 34 şi 35 sunt rezultate clasice din calculul variaţiilor (a se vedea [10]).

Bibliografie

[1] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis,* Birkäuser, Basel, 1990.

[2] D. Azé, *Duality for the sum of convex functions in general normed spaces,* Preprint, University of Perpignan, 1993.

[3] D. Azé, A. Rahmouni, *On primal-dual stability in convex optimization,* Preprint, University of Perpignan, 1993.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Warsovie, 1932.

[5] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces,* Publishing House of Roumanian Academy and Reidel Publishing Comp., 1986.

[6] M.S. Bazaraa, C.M. Shetty, *Nonlinear programming theory and algorithms,* Wiley, New York, 1979.

[7] M. Bianchi, *Introduzione alla teoria dell'ottimizzazione,* G. Giappichelli, Torino, 1989.

[8] J.M. Borwein, *A note on ε-subgradients and maximal monotonicity,* Pac. J. Math. 103(1982), 307–314.

[9] J.M. Borwein, J.D. Vanderwerff, *Convergence of Lipschitz regularization of convex functions,* Preprint, Simon Fraser University, Burnaby, 1993.

[10] L. Cesari, *Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations,* Springer, New York, 1983.

[11] I. Ciorănescu, *Aplicaţii de dualitate în analiza funcţională neliniară,* Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1974.

[12] F.H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis,* John Wiley & Sons, New York, Chichister, Brisbane, Toronto, Singapore, 1983.

[13] O. Costinescu, *Elemente de topologie generală,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[14] R. CRISTESCU, *Spaţii liniare topologice,* Editura Acaddemiei R.S.R., Bucureşti, 1974.

[15] J.-P. CROUZEIX, *Conditions for convexity of quasiconvex functions,* Math. Oper. Res. 5(1980), 120–125.

[16] J.-P. CROUZEIX, *Continuity and differentiability properties of quasi-convex functions on $\mathbb{R}^n$,* in S. Schaible, W.T. Ziemba, eds., "Generalized Concavity in Optimization and Economics", Academic Press, 1981, pp. 109–130.

[17] J.-P. CROUZEIX, J.A. FERLAND, S. SCHAIBLE, *Generalized convexity on affine subspaces with an application to potential functions,* Math. Program. 56(1992), 223–232.

[18] J. DIESTEL, *Geometry of Banach spaces,* Lecture Notes in Math., vol. 485, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[19] A.L. DONTCHEV, T. ZOLEZZI, *Well-posed optimization problems,* Lecture Notes Math. 1543, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[20] I. EKELAND, *On the variational principle,* J. Math. Anal. Appl. 47(1974), 324–353.

[21] I. EKELAND, R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod, Gauthier-Villars, 1974.

[22] I.I. EREMIN, N.N. ASTAFIEV, *Introduction to the theory of linear and convex programming* (în l. rusă), Nauka, Moscova, 1976.

[23] T.M. FLETT, *Differential analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[24] N. GHEORGHIU, *Introducere în analiza funcţională,* Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1974.

[25] M.R. HESTENES, *Optimization theory. The finite dimensional case,* Wiley, New-York, 1975.

[26] J.-B. HIRIART-URRUTY, *ε-subdifferential calculus,* in "Convex Analysis and Optimization", J.-P. Aubin, R.B. Vinter (Eds.), Research Notes in Math. vol. 57, Pitman, pp. 43–92, 1982.

[27] J.-B. HIRIART-URRUTY, M. MOUSSAOUI, A. SEEGER, M. VOLLE, *Subdifferential calculus without qualification conditions, using approximate subdifferentials: a survey,* Preprint, Department of Mathematics, University of Avignon (June 1993).

[28] J.-B. HIRIART-URRUTY, R.R. PHELPS, *Subdifferential calculus, using ε–subdifferentials*, Preprint, University of Toulouse (1992).

[29] R.B. Holmes, *A course on optimization and best approximation,* Lecture Notes in Oper. Res. and Math. Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[30] R.B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications,* Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[31] R.C. James, *Characterizations of reflexivity,* Studia Math. 23(1964), 205–216.

[32] S.S. Kutateladze, *Formulas for computing subdifferentials,* (în l. rusă) Dokl. Akad. Nauk SSSR 232(4)(1977), 770–772.

[33] S.S. Kutateladze, *Convex operators,* (în l. rusă) Uspehi Mat. Nauk 34(1)-(1979), 167–196.

[34] S.S. Kutateladze, *Convex ε-programming,* q(în l. rusă) Dokl. Akad. Nauk SSSR 245(5)(1979), 1048–1050.

[35] P.J. Laurent, *Approximation et optimisation,* Hermann, Paris, 1972.

[36] H. Maurer, J. Zowe, *First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems,* Math. Program. 16 (1979), 98–110.

[37] B. Mordukhovich, *Complete characterization of openness metric regularity and Lipschitz properties of multifunctions,* Tran. Am. Math. Soc. 340(1993), 1–35.

[38] J.J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France 93(1965), 273–299.

[39] M. Moussaoui, A. Seeger, *Sensitivity analysis of optimal value functions of convex parametric programs with possibly empty solution sets,* Preprint, Department of Mathematics, University of Avignon (March 1992).

[40] R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability,* Lecture Notes in Math., vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[41] A. Precupanu, *Analiză matematică. Funcţii reale,* Editura Didactică, Bucureşti, 1976.

[42] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice,* Editura Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1993.

[43] T. Precupanu, *Spaţii liniare topologice şi elemente de analiză convexă,* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1992.

[44] S.M. Robinson, *Regularity and stability for convex multivalued functions,* Math. Oper. Res. 1(1976), 130–143.

[45] R.T. Rockafellar, *Convex analysis,* Princeton University Press, 1970.

[46] R.T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings,* Pac. J. Math. 33(1970), 209–216.

[47] R.T. Rockafellar, *Conjugate duality and optimization,* SIAM Publications, Philadelphia, 1974.

[48] L. Schwartz, *Analyse Mathématique I,* Hermann, Paris, 1967.

[49] A. Seeger, M. Volle, *On a convolution operation obtained by adding level sets: classical and new results,* Preprint, Department of Mathematics, University of Avignon (1993).

[50] S. Simons, *Swimming below icebergs,* Set-Valued Analysis 2(1994), 327–337.

[51] S. Simons, *Subtangents with controlled slope,* Nonlinear Anal. TMA 22(1994), 1373–1389.

[52] V. Soloviov, *Duality for nonconvex optimization and its applications,* Anal. Math. 19(1993), 297–315.

[53] C. Ursescu, *Multifunctions with closed convex graphs,* Czech. Math. J. 25(1975), 438–441.

[54] K. Yosida, *Functional analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[55] M. Volle, *Sur quelques formules de dualité convexe et non convexe,* Preprint, Department of Mathematics, University of Avignon (1992).

[56] C. Zălinescu, *A generalization of the Farkas lemma and applications to convex programming,* J. Math. Anal. Appl. 66(1978), 651–678.

[57] C. Zălinescu, *On an abstract control problem,* Numer. Funct. Anal. Optimization 2(1980), 531–542.

[58] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions,* J. Math. Anal. Appl. 95(1983), 344–374.

[59] C. Zălinescu, *Duality for vectorial nonconvex optimization by convexification and applications,* An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, N. Ser., Sect. Ia Mat. 29(3)-(1983), 15–34.

[60] C. Zălinescu, *Solvability results for sublinear functions and operators,* Z. Oper. Res. Ser. A 31(1987), 79–101.

Index

Notaţii

$\overline{A}$	—	aderenţa mulţimii $A \subset (X, \tau)$
$A + B$	—	mulţimea $\{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$
$AC[0,1]$	—	spaţiul funcţiilor absolut continue pe $[0,1]$
Af	—	funcţia definită prin $(Af)(y) = \inf\{f(x) \mid Ax = y\}$
A^+	—	mulţimea $\{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle \geq 0\ \ \forall x \in A\}$
A°	—	mulţimea $\{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle \geq -1\ \ \forall x \in A\}$
$A^\perp$	—	mulţimea $\{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle = 0\ \ \forall x \in A\}$
$A^{\circ\circ},\ A^{++},\ A^{\perp\perp}$	—	mulţimile $(A^\circ)^\circ,\ (A^+)^+$, respectiv $(A^\perp)^\perp$
$\operatorname{aff} A$	—	înfăşurătoarea afină a mulţimii A
$\operatorname{aint} A$	—	interiorul algebric al mulţimii A
$\operatorname{aint}_M A$	—	interiorul algebric al mulţimii A în raport cu subspaţiul liniar M
a.p.t.	—	aproape peste tot
$B(x, \varepsilon)$	—	mulţimea $\{y \in (X, d) \mid d(y, x) < \varepsilon\}$
$B_X,\ B$	—	mulţimea $B(0,1)$ într-un spaţiu normat X
B^*	—	mulţimea B_{X^*}, X^* fiind dualul spaţiului normat X
$\mathcal{C}^1$	—	clasa funcţiilor diferenţiabile pe o mulţime, cu diferenţiala continuă
$\mathcal{C}^2$	—	clasa funcţiilor diferenţiabile de ordin II pe o mulţime, cu diferenţiala de ordin II continuă
$C(A, a)$	—	conul $\overline{\operatorname{con}}\,(A - a)$
$C[0,1]$	—	spaţiul normat al funcţiilor continue pe $[0,1]$
$\operatorname{cl} A$	—	aderenţa mulţimii $A \subset (X, \tau)$
$\operatorname{con} A$	—	înfăşurătoarea conică a mulţimii A
$\overline{\operatorname{con}}\, A$	—	mulţimea $\overline{\operatorname{con} A}$
$\operatorname{conv} A$	—	înfăşurătoarea convexă a mulţimii A
$\overline{\operatorname{conv}}\, A$	—	mulţimea $\overline{\operatorname{conv} A}$
$\overline{\operatorname{conv}}\, f$	—	înfăşurătoarea convexă i.s.c. a funcţiei f
$D(x, \varepsilon)$	—	mulţimea $\{y \in (X, d) \mid d(y, x) \leq \varepsilon\}$
d	—	metrică
$df(a),\ d^1 f(a)$	—	diferenţiala funcţiei f în a
$d^2 f(a)$	—	diferenţiala de ordin II a funcţiei f în a
$\operatorname{diam} A$	—	numărul $\sup\{d(x, y) \mid x,\, y \in A\}$ pentru mulţimea $A \subset (X, d)$
$\operatorname{dom} f$	—	mulţimea $\{x \in X \mid f(x) < \infty\}$ pentru funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\operatorname{dom} G$	—	mulţimea $\{x \in X \mid G(x) < \infty\}$ pentru operatorul $G : X \to Y^\bullet$
$\operatorname{dom} \mathcal{R}$	—	mulţimea $\operatorname{Pr}_X(\mathcal{R})$ pentru relaţia $\mathcal{R} \subset X \times Y$
$d(x, A)$	—	numărul $\inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$
$\operatorname{ech} A$	—	înfăşurătoarea echilibrată a mulţimii A
$\operatorname{epi} f$	—	mulţimea $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ pentru funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\operatorname{epi} G$	—	mulţimea $\{(x, y) \in X \times Y \mid G(x) \leq y\}$ pentru operatorul $G : X \to Y^\bullet$
$\operatorname{Fr} A$	—	mulţimea $\operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$
$f\vert_A$	—	restricţia funcţiei $f : X \to Y$ la mulţimea $A \subset X$
$\overline{f}$	—	înfăşurătoarea i.s.c. a funcţiei f
$f'(t)$	—	derivata funcţiei f în t

$f''(t)$	— derivata de ordin II a funcţiei f în t
$f'_+(t_0)$	— derivata la dreapta a funcţiei f în t_0
$f'_-(t_0)$	— derivata la stânga a funcţiei f în t_0
$f'_+(a,\cdot)$	— derivata direcţională a funcţiei f în a
$f'_\varepsilon(x_0;\cdot)$	— ε-derivata direcţională a funcţiei f în x_0
f^*	— $f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x \in X\}$
f^{**}	— $(f^*)^*$
$f_1 \square \cdots \square f_n$	— $f_1 \square \cdots \square f_n(x) = \inf\{f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in X,$ $x_1 + \cdots + x_n = x\}$
$f_1 \nabla \cdots \nabla f_n$	— $f_1 \nabla \cdots \nabla f_n(x) = \inf\{\max\{f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\} \mid x_1, \ldots, x_n \in X,$ $x_1 + \cdots + x_n = x\}$
$\operatorname{gr} T$	— mulţimea $\{(x, T(x)) \mid x \in X\}$ pentru funcţia $T : X \to Y$
$H_{\varphi,\alpha}$	— mulţimea $\{x \in X \mid \langle x, \varphi\rangle = \alpha\}$
$H^<_{\varphi,\alpha}$	— mulţimea $\{x \in X \mid \langle x, \varphi\rangle < \alpha\}$
$H^>_{\varphi,\alpha}$	— mulţimea $\{x \in X \mid \langle x, \varphi\rangle > \alpha\}$
$H^\geq_{\varphi,\alpha}$	— mulţimea $\{x \in X \mid \langle x, \varphi\rangle \geq \alpha\}$
$H^\leq_{\varphi,\alpha}$	— mulţimea $\{x \in X \mid \langle x, \varphi\rangle \leq \alpha\}$
I_A	— funcţia definită prin $I_A(x) = 0$ dacă $x \in A,\ I_A(x) = \infty$ dacă $x \notin A$
Id_E	— funcţia de la E la E definită prin $Id_E(x) = x$
$\operatorname{Im} T$	— mulţimea $\{T(x) \mid x \in X\}$ pentru operatorul $T : X \to Y$
$\operatorname{Im} \mathcal{R}$	— mulţimea $\mathrm{Pr}_Y(\mathcal{R})$ pentru relaţia $\mathcal{R} \subset X \times Y$
$\inf g$	— numărul $\inf_{x\in X} g(x)$, unde $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\operatorname{int} A$	— interiorul mulţimii $A \subset (X, \tau)$
i.s.c.	— inferior semicontinuu
$\ker \varphi$	— mulţimea $\{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$ pentru $\varphi \in X'$
$L^1(0,1)$	— spaţiul (claselor) funcţiilor integrabile Lebesgue pe $]0, 1[$
$L(X,Y)$	— spaţiul operatorilor liniari $T : X \to Y$
$\mathcal{L}(X,Y)$	— mulţimea operatorilor liniari şi continui de la X la Y
$\mathcal{L}^2(X;Y)$	— mulţimea aplicaţiilor biliniare şi continue de la $X \times X$ la Y
$\mathcal{L}^2(X_1, X_2; Y)$	— mulţimea aplicaţiilor biliniare şi continue de la $X_1 \times X_2$ la Y
$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n$	— numărul $\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq m} \lambda_n \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru $(\lambda_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$
$\liminf_{x\to a} f(x)$	— numărul $\sup_{V\in\mathcal{V}(a)} \inf_{x\in V} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru $f : (X,\tau) \to \overline{\mathbb{R}}$
$\liminf_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$	— mulţimea $\left\{v \in Y \;\middle|\; \lim_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d(v, \mathcal{R}(x)) = 0\right\}$ pentru $\mathcal{R} \subset X \times Y$
$\limsup_{x\to a} f(x)$	— numărul $\inf_{V\in\mathcal{V}(a)} \sup_{x\in V} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ pentru $f : (X,\tau) \to \overline{\mathbb{R}}$
$\limsup_{x\to\bar{x}} \mathcal{R}(x)$	— mulţimea $\left\{v \in Y \;\middle|\; \liminf_{\operatorname{dom}\mathcal{R}\ni x\to\bar{x}} d(v, \mathcal{R}(x)) = 0\right\}$ pentru $\mathcal{R} \subset X \times Y$
$\operatorname{lin} A$	— înfăşurătoarea liniară a mulţimii A
$\mathbb{N}$	— mulţimea numerelor naturale
$\mathbb{N}^*$	— mulţimea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$N(A,a)$	— conul $-(C(A,a))^+$ pentru $a \in A$
$\mathrm{niv}_\lambda f$	— mulţimea $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$
$P_C(x)$	— mulţimea $\{\bar{c} \in C \mid d(x,\bar{c}) \leq d(x,c)\ \forall\, c \in C\}$
$\mathcal{P}$	— familie de seminorme

Pr	—	funcţia de la X la X/X_0 definit prin $\mathrm{Pr}(x) = \hat{x}$ (clasa lui x)
Pr_X	—	funcţia de la $X \times Y$ la X definit prin $\mathrm{Pr}_X(x, y) = x$
p_A	—	funcţia definită prin $p_A(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda A\}$
$\mathbb{R}$	—	mulţimea numerelor reale
$\mathbb{R}_+$	—	intervalul $[0, \infty[$
$\overline{\mathbb{R}}$	—	mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathcal{R},\ \mathcal{R}^{-1}$	—	relaţie, şi relaţia sa inversă: $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$
$\mathcal{R}(A)$	—	mulţimea $\{y \in Y \mid\ \exists x \in A\ :\ (x, y) \in \mathcal{R}\}$
$\mathcal{R}^{-1}(B)$	—	mulţimea $\{x \in X \mid\ \exists y \in B\ :\ (x, y) \in \mathcal{R}\}$
$\mathrm{raint}\, A$	—	interiorul relativ algebric al mulţimii A
$\mathrm{ric}\, A$	—	mulţimea $\mathrm{raint}\, A$ dacă $\mathrm{aff}\, A$ este închisă, respectiv $\emptyset$ dacă $\mathrm{aff}\, A$ nu este închisă
S_X, S	—	mulţimea $U_X \setminus B_X$
S^*	—	mulţimea S_{X^*}
$S(f, C)$	—	mulţimea $\{\bar{x} \in C \mid f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall\, x \in C\}$
$S(P)$	—	mulţimea $S(f, C)$ pentru problema $\min\ f(x),\ \ x \in C$
$S_\varepsilon(f, C)$	—	mulţimea $\{\bar{x} \in C \mid f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon\ \forall\, x \in C\}$
$S_\varepsilon(P)$	—	mulţimea $S_\varepsilon(f, C)$ pentru problema $\min\ f(x),\ \ x \in C$
$\mathcal{S} : X \rightsquigarrow Y$	—	aplicaţie multivocă de la X la Y
s.s.c.	—	superior semicontinuu
T^*	—	operatorul $T^* : Y^* \to X^*$ definit prin $T^* y^* = y^* \circ T$
$T_B(M, \bar{x})$	—	mulţimea $\left\{u \in X \ \middle|\ \liminf_{t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - \bar{x})\right) = 0\right\}$
$T_C(M, \bar{x})$	—	mulţimea $\left\{u \in X \ \middle|\ \lim_{M \ni x \to \bar{x}, t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - x)\right) = 0\right\}$
$T_U(M, \bar{x})$	—	mulţimea $\left\{u \in X \ \middle|\ \lim_{t \downarrow 0} d\left(u, t^{-1}(M - \bar{x})\right) = 0\right\}$
$(t_n) \to 0+$	—	$(t_n) \subset]0, \infty[,\ t_n \to 0$
$U_X,\ U$	—	mulţimea $D(0, 1)$ în spaţiul normat X
U^*	—	mulţimea U_{X^*}
$\mathcal{V}_\tau(x),\ \mathcal{V}(x)$	—	sistemul vecinătăţilor lui x faţă de topologia τ
$V(x; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon)$	—	mulţimea $\{y \in X \mid p_1(y - x) < \varepsilon, \ldots, p_n(y - x) < \varepsilon\}$
$v(f, C)$	—	numărul $\inf\{f(x) \mid x \in C\}$
$v(P)$	—	$v(f, C)$ pentru problema $\min\ f(x),\ \ x \in C$
w	—	topologia $\sigma(X, X^*)$ pe spaţiul local convex (normat) X
w^*	—	topologia $\sigma(X^*, X)$ pe dualul X^* al spaţiului local convex (normat) X
X'	—	spaţiul $L(X, \mathbb{R})$
X^*	—	spaţiul $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$
X/X_0	—	spaţiul cât al lui X în raport cu subspaţiul X_0
(X, d)	—	spaţiu metric
$(X, Y, \boldsymbol{F})$	—	sistem dual
$(X, \langle\, , \rangle)$	—	spaţiu cu produs scalar sau prehilbertian
$(X, \mathcal{P})$	—	spaţiu local convex
$(X, \mathcal{P})^*$	—	dualul topologic al unui spaţiu local convex
(X, τ)	—	spaţiu topologic
$(x_n) \to x,\ x_n \to x,\ x = \lim x_n$	—	şirul (x_n) converge la x

$x_n \xrightarrow{w} x$	— şirul (x_n) converge la x în raport cu topologia w
$x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$	— şirul (x_n) converge la x în raport cu topologia w^* în X^*
$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},\ (x_{n_k})$	— subşir al şirului (x_n)
$[x,y[$	— mulţimea $\{(1-\lambda)x+\lambda y \mid \lambda\in[0,1[\}$
$[x,y]$	— mulţimea $\{(1-\lambda)x+\lambda y \mid \lambda\in[0,1]\}$
$]x,y[$	— mulţimea $\{(1-\lambda)x+\lambda y \mid \lambda\in]0.1[\}$
$\langle x,y\rangle$	— elementul $\boldsymbol{F}(x,y)$ dacă $(X,Y,\boldsymbol{F})$ este sistem dual sau produsul scalar al elementelor x, y dacă X este spaţiu prehilbertian
$\angle(x,y)$	— numărul arccos $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$
$Y^\bullet$	— mulţimea $Y\cup\{\infty\}$
$y_1\le_Q y_2,\ y_1\le y_2$	— faptul că $y_2-y_1\in Q$, unde $Q\subset Y$ este con convex
$0\cdot f$	— funcţia $I_{\mathrm{dom}\, f}$
$\|T\|$	— norma operatorului liniar T
$\|x\|$	— norma elementului x
$\|\ \|$	— normă
$\|\varphi\|$	— norma funcţionalei liniare φ
$\nabla f(a)$	— gradientul sau diferenţiala funcţiei f în a
$\nabla^2 f(a)$	— diferenţiala de ordin II a funcţiei f în a
$\nabla_x f(a,b)$	— gradientul sau diferenţiala funcţiei f în (a,b) în raport cu variabila x
∂f	— subdiferenţiala funcţiei f
$\partial f(x)$	— subdiferenţiala funcţiei f în x
$\partial_\varepsilon f$	— ε-subdiferenţiala funcţiei f
$\partial_\varepsilon f(x)$	— ε-subdiferenţiala funcţiei f în x
$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)$	— derivata funcţiei f de variabile s, t în raport cu s
φ_A	— funcţia definită prin $\varphi_A(x)=\inf\{t \mid (x,t)\in A\}$ pentru $A\subset X\times\mathbb{R}$
λA	— mulţimea $\{\lambda a \mid a\in A\}$
$\prod_{i\in I}X_i$	— mulţimea $\left\{x: I\to\bigcup_{i\in I}X_i \,\middle|\, x(i)\in X_i\ \forall\, i\in I\right\}$
$\prod_{i\in I}\tau_i$	— topologia pe produsul cartezian al spaţiilor (X_i,τ_i)
$\sigma(X,Y)$	— topologia pe X generată de familia de seminorme $\{\lvert\boldsymbol{F}(\cdot,y)\rvert \mid y\in Y\}$, unde $(X,Y,\boldsymbol{F})$ este un sistem dual
τ-i.s.c.	— τ-inferior semicontinuu
$\tau,\ \sigma$	— topologii
τ_0	— topologia uzuală pe $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, respectiv $\mathbb{R}^k$
τ_d	— topologia generată de metrica d
$\tau_{\mathcal{P}}$	— topologia generată de familia de seminorme $\mathcal{P}$
τ_{X_0}	— topologia $\{D\cap X_0 \mid D\in\tau\}$ pe X_0, unde $X_0\subset X$, iar τ este topologie pe X
$\tau\preceq\sigma$	— $\tau\subset\sigma$
$\tau_1\times\tau_2$	— produsul topologiilor τ_1 şi τ_2
$\forall$	— oricare ar fi, pentru orice
$\exists$	— există (cel puţin un)
$:=,\ =:$	— $a:=b,\ b=:a$ înseamnă că a este prin definiţie egal cu b
▌	— sfârşitul unei demonstraţiei sau al unei teoreme fără demonstraţie

CONSTANTIN ZĂLINESCU, **Programare matematică în spaţii normate infinit dimensionale** *(Mathematical programming in infinite dimensional normed linear spaces),* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1995, p. 250.

Contents

Redactor : PETRE MOCANU
Tehnoredactor : ELENA MATEESCU ?

Bun de tipar : 1 februarie 1995. Format 16/70×100.
Coli de tipar : 15,75.
C.Z. pentru biblioteci mari : $\left\{ \begin{array}{l} ?????? \ : ???.?? \\ ???.?? \ : ???.??? \end{array} \right.$
C.Z. pentru biblioteci mici : – ??

Tipografia ?