

**Sinteza rezultatelor obținute în cadrul contractului
Funcții de scalarizare și multiplicatori Lagrange în probleme de
optimizare**

ID_379-13/28.09.2007

-Raport 2008-

Obiectivele contractului pe anul 2008 (conform Anexei IIa) au fost:

- Punerea în evidență a unor proprietăți locale de continuitate și lipschitzianitate a funcției de scalarizare
- Obținerea de rezultate de existență pentru multiplicatorii Lagrange pentru probleme vectoriale nenetede
- Studiul literaturii în tematica tezei de doctorat prevăzută la paragraful 10.4.1.2.2 în propunerea de proiect

În cadrul obiectivului “Punerea în evidență a unor proprietăți locale de continuitate și lipschitzianitate a funcției de scalarizare” (cf. Anexei IIa) s-au studiat unele proprietăți locale de continuitate și lipschitzianitate pentru funcția de scalarizare și s-a pus în evidență o aplicație la stabilirea unor condiții de optimalitate pentru o problemă de optimizare vectorială neconvexă utilizând subdiferențiale de tip Clarke sau Mordukhovich; rezultatele obținute sunt conținute în articolul [10] și sunt în curs de apariție în revista (cotată ISI) Optimization. De asemenea, în legătură cu tematica acestui contract, s-au continuat preocupările noastre legate de Analiza Convexă, iar în lucrarea [8] apărută în SIAM Journal on Optimization (cotată ISI) s-au pus în evidență formule pentru subdiferențiala unui supremum de funcții convexe fără condiții de calificare. În continuare prezentăm succint aceste rezultate.

Fie Y un spațiu local convex, $K \subset Y$ un con convex și închis, $A \subset Y$ o mulțime nevidă și închisă astfel încât $Y \neq A = A - K$. Condiția $A = A - K$ arată că $K \subset -A_\infty$ unde

$$A_\infty := \{u \in X \mid x + tu \in A \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

este conul de recesie a lui A ; A_∞ este un con convex și închis. Dacă A este și convexă atunci $A_\infty = \bigcap_{t>0} t(A - a)$ pentru un (orice) $a \in A$. Considerăm de asemenea $k^0 \in K \setminus (-K)$ și funcția de scalarizare

$$\varphi_A := \varphi_{A, k^0} : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi_A(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 + A\}, \quad (1)$$

unde, ca de obicei, $\inf \emptyset := \infty$ (și $\sup \emptyset := -\infty$). Pentru mai multe proprietăți ale funcției φ_A a se vedea [5, Section 2.3]. În [5, Th. 2.3.1] s-a arătat că φ_A este continuă. În rezultatul următor caracterizăm continuitatea lui φ_A într-un punct.

Propoziția 1 φ_A este (superior semi-) continuă în $y_0 \in Y$ dacă și numai dacă $y_0 - (\varphi_A(y_0), \infty) \cdot k^0 \subset \text{int } A$.

Propoziția 2 Presupunem că φ_A este continuă în $y_0 \in \text{bd } A$. Atunci $\varphi_A(y_0) = 0$.

Când A este convexă, după cum s-a observat mai sus, φ_A este convexă. Într-o astfel de situație din continuitatea lui φ_A într-un punct din interiorul domeniului se obține locala lipschitzianitate a lui φ_A pe interiorul domeniului. În plus, dacă $A = -K$ și $k^0 \in \text{int } K$ atunci φ_A este o funcție continuă și subliniară, și deci φ_A este Lipschitz continuă.

Recent în cazul $Y = \mathbb{R}^m$ și $K = \mathbb{R}_+^m$ Bonnissseau–Crettez [1] au obținut continuitatea Lipschitz a lui φ_A în jurul punctului $y \in \text{bd } A$ când $-k^0$ este în interiorul conului tangent în sensul lui Clarke a lui A în y . Lipschitzianitatea globală a lui φ_A poate fi corelată cu un rezultat al Gorokhovich–Gorokhovich [7] stabilit în spații normate.

Teorema 3 (i) *Are loc relația*

$$\varphi_A(y) \leq \varphi_A(y') + \varphi_{-K}(y - y') \quad \forall y, y' \in Y. \quad (2)$$

- (ii) *Dacă $k^0 \in \text{int } K$ atunci φ_A este finită și Lipschitz pe Y .*
- (iii) *Dacă $y_2 \leq_K y_1$ atunci $\varphi_A(y_2) \leq \varphi_A(y_1)$.*
- (iv) *Dacă $A - (K \setminus \{0\}) \subset \text{int } A$ atunci φ_A este proprie și*

$$y_2 - y_1 \in -(K \setminus \{0\}), \quad y_1 \in \text{dom } \varphi_A \Rightarrow \varphi_A(y_2) < \varphi_A(y_1).$$

Teorema 3 arată că [1, Prop. 7] are loc în orice spațiu local convex cu o concluzie mai tare: $\sigma(\cdot, g)$ este Lipschitz continuă.

Desigur, în condițiile Teoremei 3 (i) avem că $-k^0 \in \text{int } A_\infty$ deoarece $K \subset -A_\infty$. De fapt are loc și reciproca Teoremei 3 (i). Mai precis are loc următorul rezultat.

Propoziția 4 *Funcția φ_A este finită și lipschitziană dacă și numai dacă $-k^0 \in \text{int } A_\infty$.*

Dacă $\text{int } K \neq \emptyset$ și $k^0 \notin \text{int } K$ atunci φ_{-K} nu este (numai) cu valori finite și deci nu este Lipschitz continuă. Este restricția funcției φ_{-K} la domeniu ei Lipschitz continuă? Luând $K = \mathbb{R}_+^2$ și $k^0 = (1, 0)$, avem că $\varphi_{-K}(y_1, y_2) = y_1$ pentru $y_2 \leq 0$, $\varphi_{-K}(y_1, y_2) = \infty$ pentru $y_2 > 0$, și deci $\varphi_{-K}|_{\text{dom } \varphi_{-K}}$ este Lipschitz continuă. Pe de altă parte, luând $K := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid v, w \geq 0, u^2 \leq vw\}$ și $k^0 := (0, 0, 1)$ atunci

$$\varphi_{-K}(x, y, z) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } y > 0 \text{ sau } [y = 0 \text{ și } x \neq 0], \\ z & \text{dacă } x = y = 0, \\ z - x^2/y & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

Este clar că restricția lui φ_{-K} la domeniu ei nu este continuă în $(0, 0, 0) \in \text{dom } \varphi_{-K}$ iar restricția lui φ_{-K} la interiorul domeniului ei nu este Lipschitz continuă. Totuși φ_{-K} este local lipschitziană pe interiorul domeniului ei. Ultima proprietate este o proprietate generală a lui φ_A în cazul în care A este convexă.

Propoziția 5 *Presupunem că A este convexă, are interior nevid și nu conține drepte paralele cu k^0 . Atunci φ_A este local lipschitziană pe $\text{int}(\text{dom } \varphi_A) = \mathbb{R}k^0 + \text{int } A$.*

Să observăm că dacă A nu este convexă și $y \in \text{int}(\text{dom } \varphi_A)$ putem avea situații în care φ_A nu este continuă în y sau φ_A este continuă dar nu este Lipschitz continuă pe vreo vecinătate a lui y . Pentru aceasta considerăm $K := \mathbb{R}_+^2$, $k^0 := (1, 0)$ și $A_1 := ((-\infty, 0] \times (-\infty, 1]) \cup ([0, 1] \times (-\infty, 0])$, respectiv $A_2 := \{(a, b) \mid a \in (0, \infty), b \leq -a^2\} \cup ((-\infty, 0] \times (-\infty, 1])$. Atunci

$$\varphi_{A_1, k^0}(u, v) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } v > 1, \\ u & \text{dacă } 0 < v \leq 1, \\ u - 1 & \text{dacă } v \leq 0, \end{cases} \quad \varphi_{A_2, k^0}(u, v) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } v > 1, \\ u & \text{dacă } 0 < v \leq 1, \\ u - \sqrt{-v} & \text{dacă } v \leq 0. \end{cases}$$

Este clar că $(0, 0) \in \text{int}(\text{dom } \varphi_{A_1})$ dar φ_{A_1} nu este continuă în $(0, 0)$, și $(0, 0) \in \text{int}(\text{dom } \varphi_{A_2})$, φ_{A_2} este continuă în $(0, 0)$ dar φ_{A_2} nu este Lipschitz continuă în jurul lui $(0, 0)$. În ceea ce privește continuitatea Lipschitz a lui φ_A în jurul unui punct $y \in \text{dom } \varphi_A$, în spații finit dimensionale aceasta poate fi obținută utilizând noțiunea de epi-lipschitzianitate a unei mulțimi introdusă de Rockafellar [9]. Extindem această noțiune în contextul nostru. Spunem că mulțimea $A \subset Y$ este epi-Lipschitz în $\bar{y} \in A$ în direcția $v \in Y \setminus \{0\}$ dacă există $\varepsilon > 0$ și o vecinătate V_0 a lui 0 din Y astfel încât

$$\forall y \in (\bar{y} + V_0) \cap A, \quad \forall w \in v + V_0, \quad \forall \lambda \in [0, \varepsilon] : y + \lambda w \in A. \quad (3)$$

Să observăm că (3) are loc pentru $v = 0$ dacă și numai dacă $\bar{y} \in \text{int } A$. În plus, dacă $\bar{y} \in \text{int } A$ atunci A este epi-Lipschitz în $\bar{y} \in A$ în orice direcție.

Teorema 6 Fie Y spațiu local convex separat și $y_0 \in Y$ astfel încât $\varphi_A(y_0) \in \mathbb{R}$. Atunci φ_A este finită și lipschitziană pe o vecinătate V a lui y_0 dacă și numai dacă A este epi-Lipschitz în $\bar{y} := y_0 - \varphi_A(y_0)k^0$ în direcția $-k^0$.

Următorul rezultat este similar Propoziției 2.

Corolarul 7 Fie Y spațiu local convex separat și $\bar{y} \in \text{bd } A$. Dacă A este epi-Lipschitz în \bar{y} în direcția $-k^0$ atunci $\varphi_A(\bar{y}) = 0$.

Corolarul 8 Fie $\dim Y < \infty$ și $\bar{y} \in \text{bd } A$. Atunci φ_A este finită și lipschitziană pe o vecinătate a lui \bar{y} dacă și numai dacă $-k^0 \in \text{int } T_C(A, \bar{y})$, unde $T_C(A, \bar{y})$ este conul tangent a lui Clarke la A în \bar{y} .

Ca aplicație considerăm problema de optimizare vectorială (VP) dată prin

$$V - \min f(x), \quad \text{s.t. } x \in C,$$

unde X și Y sunt spații Asplund, $\{0\} \neq K \subset Y$ este un con convex și închis (care induce o ordine parțială pe Y), $f : X \rightarrow Y$ și $C \subseteq X$. Rezultatele de bază obținute sunt următoarele:

Teorema 9 Presupunem că X și Y sunt spații Asplund, $f : X \rightarrow Y$ este strict lipschitziană, $C \subset X$ este închisă și $x_0 \in C$.

(i) Dacă x_0 este o soluție propriu eficientă pentru (VP) atunci există $v^* \in Y^*$ astfel încât $\langle y, v^* \rangle > 0$ pentru orice $y \in K \setminus \{0\}$ și

$$0 \in \partial_M(v^* \circ f)(x_0) + N_M(C, x_0). \quad (4)$$

In plus, dacă f este strict diferențiabilă în x_0 atunci

$$(f'(x_0))^* v^* \in -N_M(C, x_0). \quad (5)$$

(ii) Dacă x_0 este o soluție slab eficientă pentru (VP) atunci există $v^* \in Y^* \setminus \{0\}$ astfel încât $\langle y, v^* \rangle \geq 0$ pentru orice $y \in K$ și (4) are loc. In plus, dacă f este strict diferențiabilă în x_0 atunci (5) are loc.

Din lucrarea [8] cităm rezultatul principal, pentru alte detalii a se vedea lucrarea atașată.

Teorema 10 Fie $\{f_t \mid t \in T\}$ o familie nevidă de funcții convexe $f_t : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ și $f := \sup_{t \in T} f_t$, unde X este un spațiu local convex separat Hausdorff. Presupunem că

$$\text{cl } f = \sup\{\text{cl } f_t \mid t \in T\}.$$

Atunci pentru orice $x \in X$ și orice $\alpha > 0$ are loc

$$\partial f(x) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}_x, \varepsilon > 0} \text{cl} \left(\text{co} \left(\bigcup_{t \in T_\varepsilon(x)} \partial_{\alpha\varepsilon} f_t(x) \right) + N_{L \cap \text{dom } f}(x) \right),$$

unde $\mathcal{F}_x := \{L \subset X \mid L \text{ este subspațiu finit dimensional cu } x \in L\}$ și $T_\varepsilon(x) := \{t \in T \mid f_t(x) \geq f(x) - \varepsilon\}$.

In cadrul obiectivului ‘‘Obținerea de rezultate de existență pentru multiplicatorii Lagrange pentru probleme vectoriale nenetede’’ am realizat un studiu al problemelor vectoriale pe spații normate infinit dimensionale. Studiul a fost structurat pe două direcții fiind considerat cu prioritate cazul în care relațiile de ordine sunt date prin intermediul conurilor cu interior vid (lucrarea [4]) și apoi situația în care conurile de ordine au interior nevid (lucrările [2], [3]). Precizăm că lucrările [2], [3] sunt deja publicate, în timp ce lucrarea [4] este acceptată spre publicare, toate cele trei reviste fiind cotate ISI. Mai jos prezentăm succint conținutul acestor lucrări.

Scopul lucrării [4] a fost obținerea unor rezultate de existență pentru multiplicatori Lagrange asociați soluțiilor optimale în sens Pareto ale unor probleme de optimizare vectorială în cazul special în care ordinea parțială pe spațiul de sosire este dată de un con convex cu interior vid. Menționăm că în acest caz nu se poate defini noțiunea de soluție Pareto slabă și deci nu se poate face apel la rezultatele existente pentru astfel de soluții. În cazul conurilor cu interior nevid, problema existenței multiplicatorilor Lagrange pentru soluții slabe poate fi studiată utilizând funcționale de scalarizare ale căror proprietăți de continuitate depind în mod esențial de condiția de interioritate amintită. În cazul abordat în lucrarea menționată am utilizat o altă funcție de scalarizare numită funcția de “distanță orientată”, însă am fost nevoiți să lucrăm cu un concept de soluție Pareto aproximativă pentru problemele pe care le considerăm. În cazul convex am lucrat direct cu soluții tari, chiar dacă interiorul conului este vid deși, și în acest caz, sunt necesare unele ipoteze de regularitate asupra imaginii mulțimii punctelor fezabile.

Cadrul este următorul: X, Y sunt spații Banach reale iar $K \subset Y$ este un con închis, convex, punctat cu interior vid care induce pe Y o relație de ordine parțială notată \leq_K și dată prin $y_1 \leq_K y_2$ dacă și numai dacă $y_2 - y_1 \in K$. Pentru un număr $\varepsilon > 0$ și un element $x \in X$, notăm bila deschisă de centru x și rază ε prin $B(x, \varepsilon)$. Mulțimea $K^* := \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \geq 0, \forall y \in K\}$ este conul dual al lui K . Fie $A \subset Y$ o mulțime nevidă; punctul $\bar{a} \in A$ se numește punct de minim Pareto al lui A în raport cu K dacă $(A - \bar{a}) \cap -K = \{0\}$. Mulțimea tuturor acestor puncte se notează prin $\text{Min}(A \mid K)$. Fie $f : X \rightarrow Y$ și $S \subset X$ o mulțime nevidă; un punct $\bar{x} \in S$ se numește punct de minim Pareto a lui f pe S în raport cu K dacă $f(\bar{x})$ este minim Pareto al lui $f(S)$ în raport cu K . Fie $e \in K$ cu $\|e\| = 1$. Dacă $\varepsilon > 0$, spunem că $\bar{a} \in A$ este un (ε, e) -Pareto minim al lui A în raport cu K dacă $(A - \bar{a}) \cap (-K - \varepsilon e) = \emptyset$ și mulțimea acestor puncte se notează $(\varepsilon, e) - \text{Min}(A \mid K)$. Ca mai sus, pentru o funcție $f : X \rightarrow Y$ și o mulțime nevidă $S \subset X$, un punct $\bar{x} \in S$ se numește (ε, e) -Pareto minim al lui f pe S în raport cu K dacă $f(\bar{x})$ este un (ε, e) -Pareto minim al lui $f(S)$ în raport cu K .

Pentru o mulțime nevidă $A \subset Y$, $A \neq Y$, funcția distanța orientată $\Delta_A : Y \rightarrow \mathbb{R}$ este dată prin $\Delta_A(y) = d_A(y) - d_{Y \setminus A}(y)$, unde d_A notează funcția distanța la mulțimea A . În cazul considerat de noi, i.e., $\text{int } K = \emptyset$ are loc relația $\Delta_{-K - \varepsilon e}(y) = d_{-K - \varepsilon e}(y)$ și, mai mult, subdiferențiala acestei funcții convexe satisface relația $\partial \Delta_{-K - \varepsilon e}(y) \subset K^*$ pentru orice $y \in Y$. Rezultatul de scalarizare este următorul.

Teorema 11 *Fie $\varepsilon > 0$, $e \in K$, $\|e\| = 1$. Dacă $\bar{y} \in A \subset Y$ este un punct (ε, e) -Pareto minim al lui A în raport cu K , atunci \bar{y} este o ε -soluție a problemei*

$$\min_{y \in A} \Delta_{-K - \varepsilon e}(y - \bar{y}).$$

Așa cum am spus, în cazul convex, putem aborda direct soluțiile Pareto.

Teorema 12 *Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție K -convexă și $S \subset X$ o mulțime convexă și închisă. Presupunem că f este continuu diferențiabilă și $f(S)$ are interior nevid. Fie \bar{x} un punct de minim Pareto al lui f pe S în raport cu K . Atunci există $v \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.*

$$0 \in \nabla f(\bar{x})^* v + N(S, \bar{x}), \quad (6)$$

unde $N(S, \bar{x})$ notează conul normal la mulțimea S în punctul \bar{x} .

În cazul general, utilizăm două subdiferențiale bine cunoscute: subdiferențiala Mordukhovich (notată ∂_M) pentru cazul problemelor cu constrângeri geometrice și subdiferențiala proximală (notată ∂_P) pentru cazul problemelor fără constrângeri.

Teorema 13 *Fie X, Y spații Asplund, $S \subset Y$ nevidă și închisă iar $f : X \rightarrow Y$ o funcție strict Lipschitz pe S . Dacă \bar{x} este un (ε, e) -Pareto minim al lui f pe S în raport cu K , atunci există $x \in B(\bar{x}, \sqrt{\varepsilon}) \cap S$ și $y^* \in S_{Y^*} \cap K^*$ a.î.*

$$0 \in \partial_M(y^* \circ f)(x) + \sqrt{\varepsilon} U_{X^*} + N_{\partial_M}(S, x).$$

Teorema 14 Fie X, Y spații Hilbert și $f : X \rightarrow Y$ o funcție local Lipschitz. Presupunem că $\varepsilon > 0$ și $e \in K$, $\|e\| = 1$. Dacă $\bar{x} \in X$ este un (ε, e) -Pareto minim al lui f pe X în raport cu K , atunci există $x \in B(\bar{x}, \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon})$ și $y^* \in S_{Y^*} \cap K^*$ a.î.

$$0 \in \partial_P(y^* \circ f)(x) + \frac{5}{3}\sqrt{\varepsilon}U_{X^*}.$$

Ultima secțiune a articolului conține mai multe aplicații ale rezultatelor de mai sus în probleme de echilibru sau probleme vectoriale de control aproximativ.

Lucrarea [2] abordează problema existenței multiplicatorilor lui Lagrange pentru probleme diferite: în loc de funcții lucrăm cu multifuncții și considerăm două tipuri de soluții, soluții slabe și soluții ferme. În locul subdiferențialelor considerate în cazul funcțiilor, în cazul multifuncțiilor considerăm coderivate. Astfel, cu notațiile de mai sus, considerăm o multifuncție F de la X la Y , o mulțime nevidă și închisă $S \subset X$ și problema asociată

$$(P_1) \min F \text{ cu } x \in S.$$

Presupunem că $\text{int } K \neq \emptyset$. Un punct $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ se numește soluție slabă a problemei (P_1) dacă $\bar{x} \in S$ și $(F(S) - \bar{y}) \cap -\text{int } K = \emptyset$. Dacă Z este un spațiu normat ordonat parțial de un con convex închis punctat Q cu interior nevid și $G : X \rightrightarrows Z$ o multifuncție, considerăm problema cu constrângeri:

$$(P_2) \min F \text{ cu } x \in G^{-1}(-Q).$$

Soluțiile slabe pentru această problemă se definesc înlocuind mai sus $S = G^{-1}(-Q)$.

Teorema 15 Fie $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ și $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap -Q$. Dacă (\bar{x}, \bar{y}) este soluție slabă pentru (P_2) atunci

$$T_B((F \times G)(X) + K \times Q, (\bar{y}, \bar{z})) \cap (-\text{int } K \times (-\text{int } Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset$$

și

$$T_B^2((F \times G)(X) + K \times Q, (\bar{y}, \bar{z}), (k, q)) \cap (-\text{int } K \times (-\text{int } Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset, \\ \forall (k, q) \in -K \times (-Q - \mathbb{R}_+\bar{z}),$$

unde T_B, T_B^2 notează mulțimile tangente în sens Bouligand de ordinul întâi și respectiv de ordinul al doilea.

Definim $\bar{F} : X \rightrightarrows Y$ prin $\bar{F}(x) = F(x) + K$ și $\bar{G} : X \rightrightarrows Z$ prin $\bar{G}(x) = G(x) + Q$ pentru orice $x \in X$.

Teorema 16 Fie $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ și $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap -Q$. Dacă (\bar{x}, \bar{y}) este soluție slabă a lui (P_2) atunci

$$D_B(\bar{F} \times \bar{G})(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(X) \cap (-\text{int } K \times (-\text{int } Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset$$

pentru orice $(x, k, q) \in X \times -K \times (-Q - \mathbb{R}_+\bar{z})$

$$D_B^2(\bar{F} \times \bar{G})(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x, k, q)(X) \cap (-\text{int } K \times (-\text{int } Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset,$$

unde D_B, D_B^2 notează coderivatele în sens Bouligand de ordinul întâi și respectiv de ordinul al doilea.

Cu scopul de a stabili unele reciproce ale acestor rezultate considerăm următoarea noțiune: un punct $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ se numește soluție fermă locală de ordin $\alpha > 0$ pentru (P_1) dacă există $\gamma > 0$ și o vecinătate U a lui \bar{x} a.î. pentru orice $x \in U \cap S$ și $y \in F(x)$ are loc $\Delta(y - \bar{y}, -K) \geq \gamma \|x - \bar{x}\|^\alpha$.

Teorema 17 Presupunem că X, Y, Z sunt finit dimensionale, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$ și $\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap -Q$. Presupunem că F și G sunt calme în (\bar{x}, \bar{y}) și respectiv (\bar{x}, \bar{z}) . Dacă

$$D_B(F \times B)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(X \setminus \{0\}) \cap (-K \times (-Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset$$

atunci (\bar{x}, \bar{y}) este soluție fermă locală de ordin 1 pentru (P_2) . Dacă

$$D_B^2(F \times G)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(0, 0, 0)(X \setminus \{0\})(-K \times (-Q - \mathbb{R}_+\bar{z})) = \emptyset$$

pentru orice $(x, k, q) \in X \times -K \times (-Q - \mathbb{R}_+\bar{z})$, atunci (\bar{x}, \bar{y}) este soluție fermă locală de ordin 2 a lui (P_2) .

Teorema 18 Presupunem că X, Y sunt finit dimensionale și F are grafic local închis în jurul lui $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr } F$. Fie $e \in \text{int } K$. Dacă (\bar{x}, \bar{y}) este soluție fermă locală de ordin 1 pentru (P_1) cu $S := X$ atunci există $\mu > 0$ a.î.

$$\mu D_{X^*} \subset D^*F(\bar{x}, \bar{y})(\{y^* \in Y^* \mid y^*(e) = 1\}),$$

unde D^* notează coderivata normală.

În lucrarea [3] considerăm problema existenței multiplicatorilor Lagrange pentru soluții Pareto. Ipotezele suplimentare față de rezultatele din [4] vizează conul de ordine iar demonstrațiile folosesc așa-numitele conuri de dilatare. O mulțime convexă B se numește bază a conului K dacă $0 \notin \text{cl } B$ și $K = \text{cone } B$, unde cl notează închiderea topologică iar $\text{cone } B := [0, \infty)B$ este conul generat de B . O mulțime $A \subset Y$ se numește (slab) asimptotic compactă dacă există o vecinătate (slabă) U a lui 0 a.î. $U \cap [0, 1]A$ este relativ compactă. În această lucrare, din dorința de a lucra pe spații Banach generale considerăm conul normal aproximativ și obiectele derivate: subdiferențiala aproximativă, coderivata aproximativă notate N_a, ∂_a, D_a^* .

Teorema 19 Fie $A \subset Y$ o mulțime închisă și $\bar{y} \in \text{Min}(A \mid K)$. Presupunem că $\text{cone}(A - \bar{y})$ este (slab) închisă și K admite o bază (slab) închisă B . Dacă $\text{cone}(A - \bar{y})$ sau B este (slab) asimptotic compactă atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $e \in K \setminus \{0\}$ există $y^* \in Y^*$ cu $y^*(e) = 1$, $\inf_{b \in B} y^*(b) \geq \varepsilon \|y^*\|$ și $-y^* \in N_a(A, \bar{y})$.

Teorema 20 Fie f o funcție locally Lipschitz și $S \subset X$ o mulțime închisă. Fie \bar{x} este un punct de minim Pareto pentru f pe S . Presupunem că $\text{cone}(f(C) - f(\bar{x}))$ este (slab) închis, K admite o bază (slab) închisă B și $\text{cone}(f(C) - f(\bar{x}))$ sau B este (slab) asimptotic compactă. Atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $e \in K \setminus \{0\}$ există $y^* \in Y^*$ cu $y^*(e) = 1$ și $\inf_{b \in B} y^*(b) \geq \varepsilon \|y^*\|$ care satisface

$$0 \in \partial_a \langle y^*, f \rangle(\bar{x}) + N_a(C, \bar{x}).$$

Articolul se încheie cu câteva aplicații precum și cu o discuție privind cadrul de aplicabilitate al rezultatelor teoretice obținute.

În cadrul obiectivului “Studiul literaturii în tematica tezei de doctorat prevăzută la paragraful 10.4.1.2.2 în propunerea de proiect” dl doctorand R. Strugariu a studiat probleme legate de teza de doctorat, mai precis a studiat mai multe lucrări ale lui D.Y. Gao, inclusiv cartea [6], precum și alte articole consacrate dualității Ekeland.

Bibliografie

- [1] J.-M. Bonnisseau, B. Crettez, On the characterization of efficient production vectors, Economic Theory 31 (2007), 213–223.
- [2] M. Durea, Optimality conditions for weak and firm efficiency in set-valued optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 344 (2008), 1018–1028.

- [3] M. Durea, J. Dutta, *Lagrange multipliers for Pareto minima in general Banach spaces*, Pacific Journal of Optimization, 4 (2008), 447-463.
- [4] M. Durea, J. Dutta, Chr. Tammer, *Lagrange multipliers for ε -Pareto solutions in vector optimization with non solid cones in Banach spaces*, Journal of Optimization Theory and Applications, acceptată.
- [5] A. Göpfert, C. Tammer, H. Riahi, C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC 17, Springer, New York (2003).
- [6] D.Y. Gao, *Duality principles in nonconvex systems. Theory, methods and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).
- [7] V.V. Gorokhovich, S.Ya. Gorokhovich, *A criterion of the global epi-Lipschitz property of sets (Russian)*, Izv. Akad. Nauk Belarusi, Ser. Fiz.-Mat. Nauk 1995, No.1 (1995), 118-120.
- [8] A. Hantoute, M.A. Lopez, C. Zălinescu, *Subdifferential calculus rules in convex analysis: A unifying approach via pointwise supremum functions*, SIAM J. Optim. 19 (2008), 863-882.
- [9] R.T. Rockafellar, *Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in \mathbb{R}^n* , Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 3 (1979), 145-154.
- [10] C. Tammer, C. Zălinescu, *Lipschitz properties of the scalarization function and applications*, Optimization (to appear, online: DOI: 10.1080/02331930801951033).