Sinteza rezultatelor obţinute în cadrul contractului

Funcţii de scalarizare şi multiplicatori Lagrange în probleme de optimizare

ID_379-13/28.09.2007

-Raport 2009-

Obiectivele contractului pe anul 2009 (conform Anexei IIa) au fost:

- Construirea şi studiul unor probleme duale prin intermediul funcţiei de scalarizare
- Studiul mărginirii mulţimii multiplicatorilor lui Lagrange
- Elaborarea rezultatelor legate de teza de doctorat.

In cadrul obiectivului "Construirea şi studiul unor probleme duale prin intermediul funcţiei de scalarizare" (cf. Anexei IIa) s-au studiat mai multe relaţii de dualitate între diverse funcţii asociate unor mulţimi din spaţii local convexe. Acest studiu, dezvoltat in lucrarea [12], este motivat de faptul că în Economia matematică astfel de funcţii sunt considerate frecvent iar rezultatele obţinute sunt de multe ori imprecise, cu condiţii prea tari sau cu demonstraţii complicate. Mai jos prezentăm acele rezultate care se referă la funcţiile de scalarizare.

In continuare (X, τ) este un spaţiu local convex separat Hausdorff şi netrivial iar X^* este dualul lui topologic înzestrat cu topologia $w^* := \sigma(X^*, X)$. Astfel X^* devine la rândul său un spaţiu local convex separat Hausdorff al cărui dual topologic este chiar X. Pentru $x \in X$ şi $x^* \in X^*$ notăm $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$. Notaţiile şi noţiunile relative la submulţimi $A \subset X$ şi funcţii $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sunt cele uzuale. Mulţimii $A \subset X$ îi asociem mai multe funcţii. Primele două sunt

$$\sigma_A, \varsigma_A : X^* \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \sigma_A(x^*) := \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle, \quad \varsigma_A(x^*) := \inf_{x \in A} \langle x, x^* \rangle,$$

cu convenţiile $\sup \emptyset := -\infty$ şi $\inf \emptyset := \infty$; deci $\sigma_\emptyset = -\infty$ şi $\varsigma_\emptyset = +\infty$. Funcţia σ_A este funcţia support a lui A. Este evident că $\varsigma_A(x^*) = -\sigma_A(-x^*)$ pentru $x^* \in X^*$. Lui $A \subset X$ îi asociem şi funcţiile $\mu_A, \vartheta_A, \nu_A, \theta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definite prin

$$\mu_A(x) := \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}, \quad \vartheta_A(x) := \sup \{\lambda > 0 \mid \lambda x \in A\},$$
$$\nu_A(x) := \sup \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}, \quad \theta_A(x) := \inf \{\lambda > 0 \mid \lambda x \in A\};$$

deci $\mu_\emptyset = \theta_\emptyset = +\infty$ şi $\nu_\emptyset = \vartheta_\emptyset = -\infty$. μ_A este funcţionala Minkowski. Funcţiile de intrare şi ieşire ale lui Shephard sunt de tipul ν_A şi μ_A cu A submulţime a lui $\mathbb{R}^n_+$. Pentru unele proprietăţi ale lui μ_A şi ν_A a se vedea [10]. In [2] se spune că θ_A is măsura extinsă a lui Farrell. Au loc:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{0 \vee \vartheta_A(x)}, \ 0 \vee \vartheta_A(x) = \frac{1}{\mu_A(x)}, \ \theta_A(x) = \frac{1}{0 \vee \nu_A(x)}, \ 0 \vee \nu_A(x) = \frac{1}{\theta_A(x)}$$

cu convenţia $1/0 := \infty$. Având $A \subset X$ şi $k \in X \setminus \{0\}$ considerăm funcţiile de scalarizare $\varphi_{A,k}, \psi_{A,k} : X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\varphi_{A,k}(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in tk - A\}, \quad \psi_{A,k}(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x \in tk + A\}.$$

Avem că

$$\psi_{A,k}(x) = -\varphi_{-A,-k}(x) = -\varphi_{A,k}(-x) \quad \forall x \in X.$$

De aceea este suficient să studiem numai una dintre aceste funcţii. Un studiu detaliat al funcţiei $\varphi_{A,k}$ pentru A închisă cu $A = A + \mathbb{R}_+ k$ este făcut în [6, Section 2.3]; alte proprietăţi ale $\varphi_{A,k}$ sunt stabilite în [11]. Este ştiut că

$$\varphi_{A,k}(x + tk) = \varphi_{A,k}(x) + t, \quad \psi_{A,k}(x + tk) = \psi_{A,k}(x) + t \quad \forall x \in X, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dacă $A + \mathbb{R}_+ k$ este închisă atunci

$$A + \mathbb{R}_+ k = \{x \in X \mid \varphi_{A,k}(-x) \leq 0\} = \{x \in X \mid \psi_{A,k}(x) \geq 0\}.$$

In "production analysis" condiţia $A = A + \mathbb{R}_+ k$ nu este asigurată. De aceea următoarele rezultate sunt utile.

Propoziţia 1 *Presupunem că* $A \subset X$ *este închisă,* $K \subset X$ *şi* $k \in X \setminus \{0\}$. *Dacă*

$$A = (A + \mathbb{R}_+ k) \cap K, \tag{1}$$

atunci

$$A = \{x \in K \mid \psi_{A,k}(x) \geq 0\} = \{x \in K \mid \varphi_{A,k}(-x) \leq 0\}. \tag{2}$$

Propoziţia 2 *Fie* $k \in X \setminus \{0\}$ *şi* $A_i \subset X$ *satisfăcând (1) pentru orice* $i \in I$ $(\neq \emptyset)$. *Atunci* $A := \cap_{i \in I} A_i$ *şi* $A' := \cup_{i \in I} A_i$ *satisfac de asemenea (1).*

Propoziţia 3 *Fie* $I \neq \emptyset$ *şi* $A_i \subset X$ *pentru orice* $i \in I$. *Atunci*

$$\psi_{\cup_{i \in I} A_i, k} = \sup_{i \in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cup_{i \in I} A_i, k} = \inf_{i \in I} \varphi_{A_i,k}, \quad \psi_{\cap_{i \in I} A_i, k} \leq \inf_{i \in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cap_{i \in I} A_i, k} \geq \sup_{i \in I} \varphi_{A_i,k}.$$

In plus, dacă $K \subset X$ *este închisă şi* $(A_i + \mathbb{R}_+ k) \cap K = A_i$ *pentru orice* $i \in I$, *atunci*

$$\psi_{\cap_{i \in I} A_i, k} = \inf_{i \in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cap_{i \in I} A_i, k} = \sup_{i \in I} \varphi_{A_i,k}. \tag{3}$$

In particular, dacă $A_i = A_i + \mathbb{R}_+ k$ *pentru orice* $i \in I$ *atunci (3) are loc.*

In [5, Rels. (18), (19)] se consideră relaţiile de dualitate

$$\varsigma_A(x^*) = \inf_x \left(\langle x, x^* \rangle - \psi_A(x) \cdot \langle k, x^* \rangle \right), \quad \psi_A(x) = \inf_{x^*} \frac{\langle x, x^* \rangle - \varsigma_A(x^*)}{\langle k, x^* \rangle} \tag{4}$$

pentru $X = \mathbb{R}^n$ fără a se menţiona de unde sunt luaţi x şi x^*. In contextul din [5] A $(= L(y))$ este convexă (inclusă în $\mathbb{R}^n_+$) şi k $(= g_x)$ este din $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. In continuare vom stabili relaţii precise de tipul (4).

Propoziţia 4 *Fie* $x^* \in X^*$ *cu* $\langle k, x^* \rangle \geq 0$ *şi* $\emptyset \neq A \subset B \subset X$. *Atunci*

$$\varsigma_A(x^*) = \inf_{x \in B} \left(\langle x, x^* \rangle - \psi_{A,k}(x) \cdot_h \langle k, x^* \rangle \right), \tag{5}$$

$$\sigma_A(x^*) = \sup_{x \in B} \left(\langle x, x^* \rangle + \psi_{A,-k}(x) \cdot_e \langle k, x^* \rangle \right). \tag{6}$$

Propoziţia 5 *Presupunem că* A *este închisă şi convexă. Dacă* $-k \notin A_\infty$ *atunci*

$$\psi_{A,k}(x) = \inf\{\langle x, x^* \rangle - \varsigma_A(x^*) \mid x^* \in X^*,\ \langle k, x^* \rangle = 1\} \quad \forall x \in X, \tag{7}$$

iar dacă $k \notin A_\infty$ *atunci*

$$\psi_{A,-k}(x) = \inf\{\sigma_A(x^*) - \langle x, x^* \rangle \mid x^* \in X^*,\ \langle k, x^* \rangle = 1\} \quad \forall x \in X. \tag{8}$$

Inspirându-ne din [5], pentru $T \subset X \times Y$ considerăm mulţimile

$$P(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in T\}, \quad L(y) := \{x \in X \mid (x, y) \in T\}$$

pentru $x \in X$ şi $y \in Y$. De asemenea, pentru $x^* \in X^*$ şi $y^* \in Y^*$, considerăm şi mulţimile

$$\overline{P}(x^*) := \{y \mid \exists x \in X:\ y \in P(x),\ \langle x, x^* \rangle \leq 1\} = \cup \{P(x) \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1\} \subset \mathrm{Pr}_Y(T), \tag{9}$$

$$\overline{L}(y^*) := \{x \mid \exists y \in Y:\ x \in L(y),\ \langle y, y^* \rangle \geq 1\} = \cup \{L(y) \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1\} \subset \mathrm{Pr}_X(T). \tag{10}$$

Propoziţia 6 *Presupunem că* T *este o mulţime nevidă, închisă şi convexă astfel încât* $0 \in P(x)$ *pentru orice* $x \in \mathrm{Pr}_X(T)$. *Atunci*

$$L(y) = \cap \left\{ \overline{L}(y^*) \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1 \right\} \quad \forall y \in Y. \tag{11}$$

Dacă în plus $k \in \ker T_\infty$ *(adică* $(k, 0) \in T_\infty$*) atunci*

$$\psi_{L(y),k} = \inf \left\{ \psi_{\overline{L}(y^*),k} \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1 \right\} \quad \forall y \in Y. \tag{12}$$

Propoziţia 7 *Presupunem că $T \subset X \times Y$ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Atunci*

$$P(x) = \cap \left\{ \overline{P}(x^*) \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \right\} \quad \forall x \in \ker T_\infty. \tag{13}$$

In plus, presupunem că mulţimea închisă $F \subset Y$ şi $l \in Y \setminus \{0\}$ sunt astfel încât

$$P_Y(T) \subset F \quad \textit{and} \quad [(x, y) \in T,\ t \geq 0,\ y - tl \in F] \Longrightarrow (x, y - tl) \in T. \tag{14}$$

Atunci

$$\psi_{P(x),-l} = \inf \left\{ \psi_{\overline{P}(x^*),-l} \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \right\} \quad \forall x \in \ker T_\infty. \tag{15}$$

Luând $A := \{x \in \mathcal{X} \mid u(x) \geq u\}$ şi $B := \mathcal{X}$, Propoziţia 4 extinde [7, Prop. 2.4] deoarece $b(x, u) = \psi_{A,g}(x)$; de asemenea extinde şi [7, Prop. 4.1]. Intr-adevăr, cu notaţiile din [7], avem că $\pi(p) = \sigma_{\mathcal{Y}}(p)$ şi $\sigma(g; y) = \varphi_{-\mathcal{Y},g}(y)$. Prin urmare, din (6) obţinem că pentru $g \cdot p > 0$, $A := -\mathcal{Y}$, $k := g$ şi $x^* := p$,

$$\pi(p) = \sigma_{\mathcal{Y}}(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(\langle x, p \rangle + \psi_{\mathcal{Y},-g}(x) \cdot \langle g, p \rangle \right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left(x \cdot p - \sigma(g; y) g \cdot p \right),$$

adică concluzia [7, Prop. 4.1].

In mai multe lucrări referitoare la "production analysis" o tehnologie este o mulţime nevidă $T \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ cu $n, m \geq 1$ satisfăcând axiomele (see [1, p. 353]):

(A1) T este închisă; (A2) $(x, y) \in T$, $(x', y') \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ şi $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$ implică $(x', y') \in T$ (aici $x' \geq x$ înseamnă că $x' - x \in \mathbb{R}^n_+$ şi $y' \leq y$ înseamnă că $y - y' \in \mathbb{R}^m_+$); (A3) $(0, y) \in T$ implică $y = 0$; (A4) $(0, 0) \in T$; (A5) T este convexă.

Uneori în loc de axioma (A2) se utilizează una mai slabă: (A2') $(x, y) \in T$, $s \in [1, \infty[$ şi $t \in [0, 1]$ implică $(sx, y) \in T$ şi $(x, ty) \in T$.

Utilizând rezultatele precedente se obţin majoritatea rezultatelor din [5] în condiţii precise. Acestea se referă la funcţiile

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{D}_T(x, y; -g_x, g_y) := \psi_{T,(g_x,-g_y)}(x, y), \\
\overrightarrow{D}_o(x, y; g_y) := \psi_{P(x),-g_y}(y), \quad \overrightarrow{D}_i(x, y; -g_x) := \psi_{L(y),g_x}(x), \\
I\overrightarrow{D}_o(w', y; g_y) := \psi_{\overline{P}(w'),-g_y}(y), \quad I\overrightarrow{D}_i(x, p'; -g_x) := \psi_{\overline{L}(p'),g_x}(x), \\
\Pi(p, w) := \sigma_T(-w, p), \quad R(x, p) := \sigma_{P(x)}(p), \quad C(y, w) := \varsigma_{L(y)}(w), \\
IR(w', p) := \sigma_{\overline{P}(w')}(p), \quad IC(p', w) := \varsigma_{\overline{L}(p')}(w).
\end{gathered}$$

În cadrul obiectivului "Studiul mărginirii mulţimii multiplicatorilor lui Lagrange" am realizat un studiu al comportamentului topologic al mulţimii multiplicatorilor Lagrange pentru diferite probleme vectoriale pe spaţii normate finit şi infinit dimensionale. Studiul, cuprins în lucrarea [4], a fost structurat pe două direcţii fiind considerat atât cazul problemelor în care datele sunt funcţii diferenţiabile cât şi cazul problemelor "nenetede" guvernate de multifuncţii.

În prima parte a articolului mai sus menţionat, ne ocupăm de problema de optimizare vectorială

$$(\mathcal{P}) \qquad \min f(x) \quad \text{cu} \quad g(x) \in -Q,$$

unde X, Y şi Z sunt spaţii vectoriale normate, $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ sunt funcţii vectoriale iar Q este un con convex închis din Z. Pe spaţiul Y considerăm ordinea parţială dată de un con convex şi închis K, prin echivalenţa $y_1 \leq_K y_2$ dacă şi numai dacă $y_2 - y_1 \in K$. Conul dual al lui K este

$$K^* := \{y^* \in Y^* \mid y^*(k) \geq 0,\ \forall k \in K\},$$

unde Y^* este dualul topologic al lui Y. Prin M notăm mulţimea punctelor fezabile ale problemei($\mathcal{P}$), i.e., $M := \{x \in X \mid g(x) \in -Q\}$.

In anumite situaţii vom presupune:

(A_K) $\operatorname{int} K \neq \emptyset$,

(A_Q) $\operatorname{int} Q \neq \emptyset$.

Un punct fezabil $\overline{x}$ se numeşte minim Pareto pentru $(\mathcal{P})$ dacă nu există un alt punct fezabil x al lui $(\mathcal{P})$ a.î. $f(x) - f(\bar{x}) \in -(K \setminus \{0\})$. În eventualitatea în care K are interior nevid punctul $\bar{x}$ se numeşte minim slab al problemei $(\mathcal{P})$ dacă nu există un alt punct fezabil x cu $f(x) - f(\bar{x}) \in -\operatorname{int} K$.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Z$ două multifuncţii. Să considerăm problema

$$(\mathcal{P}_1) \quad \min F(x), \text{ cu } x \in S \subset X,$$

Definiţia 8 *Un punct* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *se numeşte punct de minim pentru problema* $(\mathcal{P}_1)$ *dacă*

$$(F(S) - \overline{y}) \cap -K = \{0\}.$$

Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ utilizăm următoarea definiţie.

Definiţia 9 *Un punct* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *se numeşte minim slab al problemei* $(\mathcal{P}_1)$ *dacă*

$$(F(S) - \overline{y}) \cap -\operatorname{int} K = \emptyset.$$

Vom considera de asemenea cazul în care mulţimea punctelor fezabile ale lui $(\mathcal{P}_1)$ va fi descrisă explicit cu ajutorul multifuncţilor:

$$(\mathcal{P}_2) \quad \min F(x), \text{ cu } x \in X, \ 0 \in G(x) + Q.$$

O variantă simplificată a problemei $(\mathcal{P}_2)$ în care G este o funcţie este

$$(\mathcal{P}_2') \quad \min F(x), \text{ cu } x \in X, \ g(x) \leq_Q 0.$$

Definiţiile soluţiilor pentru $(\mathcal{P}_2)$ sunt obţinute înlocuind S cu $\{x \in X \mid 0 \in G(x) + Q\} = G^{-1}(-Q)$. Analog pentru $(\mathcal{P}_2')$.

În afara situaţiei în care vom considera conuri cu interior nevid, vom lucra cu o clasă mai generală de conuri numite dual-compacte. Aceste conuri au fost introduse de către Ng şi Zheng în [9]. Astfel, conul K se numeşte dual-compact dacă există o mulţime compactă $C \subset Y$ a.î.

$$K^* \subset \{y^* \in Y^* \mid \|y^*\| \leq \sup_{y \in C} y^*(y)\}.$$

De fapt, am arătat că această proprietate este echivalentă cu existenţa unei mulţimi finite $P := \{y_1, y_2, ..., y_p\} \subset Y$ $(p \in \mathbb{N})$a.î.

$$K^* \subset \{y^* \in Y^* \mid \|y^*\| \leq \max_{y_i \in P} y^*(y_i)\}. \tag{16}$$

Pentru prima parte luăm cazul soluţiilor slabe ale problemei cu funcţii în care presupunem:

(A_f) funcţia $f : X \to Y$ este de clasă C^1 pe X.

(A_g) funcţia $g : X \to Z$ este de clasă C^1 pe X.

Notăm cu $\nabla f(x)$ derivata Fréchet a lui f în $x \in X$ şi prin $T_B(M, z)$ conul tangent Bouligand la $M \subset X$ în $z \in M$. Reamintim relaţia de definiţie a acestui con:

$$\begin{aligned} T_B(M, z) := \{u \in X \mid \exists (t_n) \subset (0, \infty), t_n \downarrow 0, \\ \exists (u_n) \subset X, u_n \to u, \forall n \in \mathbb{N}, z + t_n u_n \in M\}. \end{aligned}$$

Mai întâi prezentăm o metodă de obţinere a multiplicatorilor Lagrange pentru $(\mathcal{P})$.

Propoziţia 10 *Presupunem* (A_K) *şi* (A_f). *Dacă* $\overline{x} \in M$ *este punct de minim slab pentru* $(\mathcal{P})$, *atunci* $\nabla f(\overline{x})(u) \notin -\operatorname{int} K$ *pentru orice* $u \in T_B(M, \overline{x})$.

Pentru a determina o formula de calcul a conului tangent la mulţimea punctelor fezabile $M = \{x \in X \mid g(x) \in -Q\}$ este nevoie de utilizarea condiţiei de a exista un element $\overline{u} \in X$ cu $\nabla g(\overline{x})(\overline{u}) \in -\operatorname{int} Q$. Această condiţie de tip **Mangasarian-Fromovitz** se notează pe scurt în continuare cu (MF).

Propoziţia 11 *Presupunem (A_Q) and (A_g). Mai mult presupunem că $g(\overline{x}) \in -Q$ şi are loc relaţia (MF) în $\bar{x}$. Atunci,*

$$\{u \in X \mid \nabla g(\overline{x})(u) \in -Q\} \subset T_B(M, \overline{x}).$$

Mai mult, dacă $g(\overline{x}) = 0$ atunci

$$T_B(M, \overline{x}) = \{u \in X \mid \nabla g(\overline{x})(u) \in -Q\}.$$

Corollary 12 *Presupunem că (A_K), (A_Q), (A_f) şi (A_g). Dacă $\overline{x} \in M$ este punct de minim slab pentru $(\mathcal{P})$ şi există $\overline{u} \in X$ cu $\nabla g(\overline{x})(\overline{u}) \in -\operatorname{int} Q$, atunci $\nabla f(\overline{x})(u) \notin -\operatorname{int} K$ pentru orice $u \in X$ cu $\nabla g(\overline{x})(u) \in -Q$.*

Propoziţia 13 *Presupunem (A_K), (A_Q), (A_f) şi (A_g). Fie $\overline{x} \in M$ punct de minim slab pentru $(\mathcal{P})$ a.î. are loc condiţia (MF) în $\bar{x}$. Atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi $z^* \in Q^*$ a.î.*

$$y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + z^* \circ \nabla g(\overline{x}) = 0. \tag{17}$$

În rezultatul de mai sus, fixăm $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi considerăm

$$L_{y^*} := \{z^* \in Q^* \mid (17) \quad \text{are loc}\}.$$

Să observăm mai întâi că (MF) este echivalentă cu următoarea condiţie de regularitate (RC):

$$z^* \in Q^*, z^* \circ \nabla g(\overline{x}) = 0 \Longrightarrow z^* = 0.$$

Pentru a obţine un rezultat privind mărginirea lui L_{y^*} avem nevoie de o ipoteză asupra spaţiului Z :

(A_Z) bila unitate închisă a lui Z^* este w^*-secvenţial compactă.

Theorem 14 *Presupunem (A_Z), (A_f), (A_g) şi că Q este dual compact. Fie $y^* \in K^* \setminus \{0\}$. Dacă are loc (RC) atunci L_{y^*} este mărginită în normă. Invers, dacă L_{y^*} este nevidă şi mărginită atunci are loc condiţia (RC).*

Observăm ca mulţimea L_{y^*} este convexă, deci în ipoteza (MF), ea este w^* compactă.

Are loc următorul rezultat global.

Corollary 15 *Presupunem (A_Z), (A_K), (A_Q), (A_f) şi (A_g). Presupunem că $\overline{x} \in M$ este punct de minim slab pentru $(\mathcal{P})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) are loc (MF);

(ii) are loc (RC);

(iii) există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î. L_{y^*} este nevidă şi mărginită.

Condiţii simalare pot fi obţinute pentru probleme cu constrângeri mixte i.e având în plus constrângerea $h(x) = 0$, unde h este o funcţie netedă ce acţionează între X şi un spaţiu normat W.

Discutăm acum pe scurt problemele $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2')$ şi $(\mathcal{P}_2)$. Cum aceste probleme sunt nenetede, reamintim, în cadrul spaţiilor Asplund, obiectele de diferenţiabilitate generalizată de tip Mordukhovich.

Definiţia 16 *Fie X un spaţiu Asplund, $S \subset X$ o submulţime nevidă şi $x \in S$. Conul Mordukhovich la S în x este*

$$N(S, x) := \{x^* \in X^* \mid \exists x_n \xrightarrow{S} x, x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*, x_n^* \in N_F(S, x_n)\},$$

unde prin $N_F(S, z)$ se notează conul normal Fréchet la S într-un punct $z \in S$, dat prin

$$N_F(S, z) := \{x \in X^* \mid \limsup_{u \in S, u \to z} \frac{x^*(u - z)}{\|u - z\|} \leq 0\}.$$

Definiţia 17 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie. Coderivata Fréchet a lui F în $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este multifuncţia $\hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$:*

$$\hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) = \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_F(\operatorname{Gr} F, (\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie. Coderivata mixtă a lui F în $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este $D_M^* : Y^* \rightrightarrows X^*$:

$$D_M^* F(\bar{x}, \bar{y})(\bar{y}^*) = \limsup_{(x,y) \to (\bar{x}, \bar{y}), y^* \to \bar{y}^*} \hat{D}^* F(x, y)(y^*).$$

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie. Coderivata normală a lui F în $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este $D_N^* : Y^* \rightrightarrows X^*$:

$$D_N^* F(\bar{x}, \bar{y})(\bar{y}^*) = \limsup_{(x,y) \to (\bar{x}, \bar{y}), y^* \xrightarrow{w^*} \bar{y}^*} \hat{D}^* F(x, y)(y^*).$$

Multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$ se numeşte N-regulată în $(\bar{x}, \bar{y})$ dacă

$$D^*_N F(\bar{x}, \bar{y}) = \hat{D}^* F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Prezentăm unele condiţii de optimalitate pentru $(\mathcal{P}_1)$ şi $(\mathcal{P}'_2)$.

Theorem 18 *[9, Corollary 4.1], [3, Corollary 3.4] Presupunem că X, Y sunt spaţii Asplund, $(\overline{x}, \overline{y})$ este minim Pareto pentru $(\mathcal{P}_1)$ şi F este pseudo-Lipschitz în $(\overline{x}, \overline{y})$. Dacă K este dual compact, atunci există $y^* \in K^*$, $\|y^*\| = 1$ a.î.*

$$0 \in D^*_N F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + N(S, \overline{x}).$$

Theorem 19 *[9, Theorem 4.3] Presupunem că X, Y, Z sunt spaţii Asplund şi $(\overline{x}, \overline{y})$ este minim Pareto pentru $(\mathcal{P}'_2)$. Dacă F este pseudo-Lipschitz în $(\overline{x}, \overline{y})$, g este local Lipschitz şi K, Q sunt dual compacte, atunci există $y^* \in K^*$ şi $z^* \in Q^*$ cu $\|y^*\| + \|z^*\| = 1$ a.î.*

$$0 \in D^*_N F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + D^*_N g(\overline{x})(z^*). \tag{18}$$

Elementele y^*şi z^* sunt multiplicatorii Lagrage pentru problema noastră. Întrebarea ce apare în contextul discuţiei noastere este în ce condiţii mulţimea

$$L_{y^*} = \{z^* \in Q^* \mid (18) \text{ are loc}\}$$

este nevidă şi mărginită pentru un element $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ fixat. Răspunsul este dat de rezultatele următoare.

Theorem 20 *Fie X, Y, Z spaţii reflexive şi $(\overline{x}, \overline{y})$ un punct de minim Pareto pentru $(\mathcal{P}'_2)$. Presupunem căt F este pseudo-Lipschitz şi N - regulată în $(\overline{x}, \overline{y})$, g este de clasă C^1 în jurul lui $\overline{x}$, K şi Q sunt dual compacte şi are loc următoarea condiţie de calificare:*

$$z^* \in Q^*, z^* \circ \nabla g(\overline{x}) = 0 \Rightarrow z^* = 0. \tag{19}$$

Atunci există $y^* \in K^*, \|y^*\| = 1$ a.î L_{y^*} este nevidă şi mărginită.

Theorem 21 *Fie X, Y, Z spaţii reflexive şi $(\overline{x}, \overline{y})$ un punct de minim Pareto pentru $(\mathcal{P}'_2)$. Presupunem că F este pseudo-Lipschitz şi N - regulată în $(\overline{x}, \overline{y})$, g este local Lipschitz în $\overline{x}$ şi N - regulată în $(\overline{x}, g(\overline{x}))$. Dacă K şi Q sunt dual compacte şi are loc următoarea condiţie de calificare:*

$$z^* \in Q^*, 0 \in D^*_N g(\overline{x})(z^*) \Rightarrow z^* = 0 \tag{20}$$

atunci există $y^* \in K^*, \|y^*\| = 1$ a.î L_{y^*} este nevida şi mărginită.

Cazul problemei $(\mathcal{P}_2)$ se discută folosind acelaşi model: se deduc condiţii de existenţă a multiplicatorilor şi apoi se impune o condiţie de calificare de tip Mangasarian-Fromowitz pentru a deduce mărginitea mulţimii acestor multiplicatori. Din cauza dificultăţilor de natură tehnică ce apar, acest caz este considerat pe spaţii finit dimensionale.

Theorem 22 *Fie $(\bar{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ punct de minim Pareto pentru $(\mathcal{P}_2)$. Presupunem că F este pseudo-Lipschitz în $(\bar{x}, \overline{y})$ iar $G(\bar{x})$ este compactă. Presupunem de asemenea că aplicaţia $x \mapsto G(x) \cap (-Q)$ este inferior semicontinuă în $\bar{x}$ şi că are loc condiţia: pentru orice $y \in G(\bar{x}) \cap (-Q)$,*

$$N(-Q, y) \cap \ker D^*_N G(\bar{x}, y) = \{0\}. \tag{21}$$

Atunci există $y^* \in K^*$ cu $||y^*|| = 1$, $\hat{y} \in G(\bar{x}) \cap (-Q)$ şi $z^* \in N(-Q, \hat{y})$ a.î.

$$0 \in D^*_N F(\bar{x}, \overline{y})(y^*) + D^*_N G(\bar{x}, \hat{y})(z^*). \tag{22}$$

Fie $y^* \in K^*$ cu $||y^*|| = 1$. Considerăm mulţimea:

$$L^{\circ}_{y^*} = \{z^* \in \mathbb{R}^k \mid \exists \hat{y} \in G(\bar{x}) \cap (-Q), \quad \text{cu} \quad z^* \in N(-Q, \hat{y}) \quad \text{a.i} \quad (22) \quad \text{are loc}\}.$$

Theorem 23 *Fie* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *punct de minim Pareto pentru* $(\mathcal{P}_2)$. *Presupunem că* F *este pseudo-Lipschitz în* $(\bar{x}, \bar{y})$, G *este pseudo-Lipschitz pentru orice* $(\bar{x}, y)$ *cu* $y \in G(\bar{x})$ *iar* $G(\bar{x})$ *este compactă. Presupunem de asemenea că aplicaţia* $x \mapsto G(x) \cap (-Q)$ *este iferior semicontinuă în* $\bar{x}$ *şi că pentru orice* $y \in G(\bar{x}) \cap (-Q)$,

$$N(-Q, y) \cap \ker D_N^* G(\bar{x}, y) = \{0\}. \tag{23}$$

Atunci există $y^* \in K^*$ *cu* $||y^*|| = 1$ *a.î.* $L_{y^*}^{\circ}$ *este nevidă şi mărginită.*

În cadrul obiectivului "Elaborarea rezultatelor legate de teza de doctorat prevăzută la paragraful 10.4.1.2.2. în propunerea de proiect" dl. doctorand R. Strugariu a obţinut unele rezultate ce vor fi incluse în teză şi care sunt trimise spre publicare.

References

[1] R. G. Chambers, Y. Chung, R. Färe, *Profit, directional distance functions, şi Nerlovian efficiency*, J. Optim. Theory Appl. 98 (1998), 351–364.

[2] L. Cherchye, T. Kuosmanen, T. Post, *Why convexify? An assessment of convexity axioms in DEA*, Working paper, Helsinki School of Economics, 2000.

[3] M. Durea, *Estimations of the Lagrange multipliers' norms in set-valued optimization*, Pacific J. Optim. 2 (2006), 487–499.

[4] M. Durea, J. Dutta, C. Tammer, *Bounded sets of Lagrange multipliers for vector optimization problems in infinite dimension*, J. Math. Anal. Appl. 348 (december 2008), 589-606.

[5] R. Färe, D. Primont, *Directional duality theory*, Economic Theory 29 (2006), 239–247.

[6] A. Göpfert, C. Tammer, H. Riahi, C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, CMS Books in Mathematics 17, Springer, New York (2003).

[7] D. G. Luenberger, *New optimality principlespentru economic efficiency şi equilibrium,* J. Optim. Theory Appl. 75 (1992), 221–264.

[8] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications*, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vols. 330, 331, Berlin, 2006.

[9] K. F. Ng, X. Y. Zheng, *The Fermat rule for multifunctions on Banach spaces, Math. Program.* Ser. A, 104 (2005), 69–90.

[10] J.-P. Penot, C. Zălinescu, *Harmonic sum şi duality*, J. Convex Anal. 7 (2000), 95–114.

[11] C. Tammer, C. Zălinescu, *Lipschitz properties of the scalarization function şi applications*, Optimization DOI: 10.1080/02331930801951033.

[12] C. Zălinescu, *Duality results involving functions associated to nonempty subsets of locally convex spaces*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. VOL. 103 (2), 2009, pp. 219–234.

Director de contract,
prof. dr. Constantin Zălinescu