Sinteza rezultatelor obţinute în cadrul contractului

Funcţii de scalarizare şi multiplicatori Lagrange în probleme de optimizare

ID_379-13/28.09.2007

-Raport 2007–2010-

Obiectivele contractului (conform Anexei IIa) au fost:

1a Punerea in evidenţă a unor proprietăţi locale de continuitate si lipschitzianitate a funcţiei de scalarizare: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

1b Obţinerea de rezultate de existenţă pentru multiplicatorii Lagrange pentru probleme vectoriale nenetede: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

2a Construirea şi studiul unor probleme duale prin intermediul funcţiei de scalarizare: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

2b Studiul mărginirii mulţimii multiplicatorilor lui Lagrange: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

3a Construirea si studierea unor funcţii cu proprietăţi asemănătoare funcţiei de scalarizare cu valori in spaţii vectoriale: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

3b Obţinerea de rezultate numerice privind soluţiile unor probleme vectoriale nenetede: documentare, elaborarea si valorificarea rezultatelor

3c Studiul literaturii, elaborarea si valorificarea rezultatelor legate de teza de doctorat prevăzută la paragraful 10.4.1.2.2 in propunerea de proiect.

In total au fost elaborate 11 lucrari stiintifice (referintele [13], [18], [20], [21], [17], [3], [6], [5], [4], [7], [8]), toate in reviste cotate ISI.

In cadrul obiectivelor 1a, 2a şi 3a s-au studiat unele proprietăţi locale de continuitate şi lipschitzianitate pentru funcţia de scalarizare, s-a pus în evidenţă o aplicaţie la stabilirea unor condiţii de optimalitate pentru o problemă de optimizare vectorială neconvexă utilizând subdiferenţiale de tip Clarke sau Mordukhovich (rezultatele obţinute fiind conţinute în articolul [18]), s-au studiat relaţii de dualitate între diverse funcţii asociate unor mulţimi din spaţii local convexe (rezultatele obţinute fiind conţinute în articolele [20], [21]). De asemenea s-au continuat preocupările noastre legate de Analiza Convexă; în lucrarea [13] s-au pus în evidenţă formule pentru subdiferenţiala unui supremum de funcţii convexe fără condiţii de calificare. In continuare prezentăm succint rezultate.

Fie Y spaţiu local convexe separat, $K \subset Y$ un con convex şi închis, $A \subset Y$ o mulţime nevidă şi închisă astfel încât $Y \neq A = A - K$. Condiţia $A = A - K$ arată că $K \subset -A_\infty$ unde

$$A_\infty := \{u \in X \mid x + tu \in A \ \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

este conul de recesie a lui A; A_∞ este un con convex şi închis. Dacă A este şi convexă atunci $A_\infty = \cap_{t>0} t(A-a)$ pentru un (orice) $a \in A$. Considerăm de asemenea $k^0 \in K \setminus (-K)$ şi funcţia de scalarizare

$$\varphi_A := \varphi_{A,k^0} : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \varphi_A(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 + A\}, \tag{1}$$

unde, ca de obicei, $\inf \emptyset := \infty$ (şi $\sup \emptyset := -\infty$). Pentru mai multe proprietăţi ale funcţiei φ_A a se vedea [12, Section 2.3]. In [12, Th. 2.3.1] s-a arătat că φ_A este continuă dacă $A - (0, \infty)k^0 \subset \operatorname{int} A$. In rezultatul următor caracterizăm continuitatea lui φ_A într-un punct.

Propoziţia 1 *φ_A este (superior semi-) continuă în $y_0 \in Y$ dacă şi numai dacă $y_0 - (\varphi_A(y_0), \infty) \cdot k^0 \subset \operatorname{int} A$.*

Propoziţia 2 *Presupunem că φ_A este continuă în $y_0 \in \operatorname{bd} A$. Atunci $\varphi_A(y_0) = 0$.*

Când A este convexă φ_A este convexă. Intr-o astfel de situaţie din continuitatea lui φ_A într-un punct din interiorul domeniului se obţine locala lipschitzianitate a lui φ_A pe interiorul domeniului. In plus, dacă $A = -K$ şi $k^0 \in \operatorname{int} K$ atunci φ_A este o funcţie continuă şi subliniară, şi deci φ_A este Lipschitz continuă.

Teorema 3 (i) *Are loc relaţia*

$$\varphi_A(y) \leq \varphi_A(y') + \varphi_{-K}(y - y') \quad \forall y, y' \in Y.$$

(ii) *Dacă* $k^0 \in \operatorname{int} K$ *atunci* φ_A *este finită şi Lipschitz pe* Y.
(iii) *Dacă* $y_2 \leq_K y_1$ *atunci* $\varphi_A(y_2) \leq \varphi_A(y_1)$.
(iv) *Dacă* $A - (K \setminus \{0\}) \subset \operatorname{int} A$ *atunci* φ_A *este proprie şi*

$$y_2 - y_1 \in -(K \setminus \{0\}),\ y_1 \in \operatorname{dom} \varphi_A \Rightarrow \varphi_A(y_2) < \varphi_A(y_1).$$

Teorema 3 arată că [1, Prop. 7] are loc în orice spaţiu local convex cu o concluzie mai tare: $\sigma(\cdot, g)$ este Lipschitz continuă. Desigur, în condiţiile Teoremei 3 (i) avem că $-k^0 \in \operatorname{int} A_\infty$ deoarece $K \subset -A_\infty$. De fapt are loc şi reciproca Teoremei 3 (i). Mai precis are loc următorul rezultat.

Propoziţia 4 *Funcţia* φ_A *este finită şi lipschitziană dacă şi numai dacă* $-k^0 \in \operatorname{int} A_\infty$.

Un alt rezultat este următorul.

Propoziţia 5 *Presupunem că* A *este convexă, are interior nevid şi şi nu conţine drepte paralele cu* k^0. *Atunci* φ_A *este local lipschitziană pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} \varphi_A) = \mathbb{R}k^0 + \operatorname{int} A$.

Să observăm că dacă A nu este convexă şi $y \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \varphi_A)$ putem avea situaţii în care φ_A nu este continuă în y sau φ_A este continuă dar nu este Lipschitz continuă pe vreo vecinătate a lui y. Spunem că mulţimea $A \subset Y$ este epi-Lipschitz în $\overline{y} \in A$ în direcţia $v \in Y \setminus \{0\}$ dacă există $\varepsilon > 0$ şi o vecinătate V_0 a lui 0 din Y astfel încât

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists V_0 \in \mathcal{V}_Y(0),\ \forall y \in (\overline{y} + V_0) \cap A,\ \forall w \in v + V_0,\ \forall \lambda \in [0, \varepsilon] : y + \lambda w \in A. \tag{2}$$

Să observăm că (2) are loc pentru $v = 0$ dacă şi numai dacă $\overline{y} \in \operatorname{int} A$. In plus, dacă $\overline{y} \in \operatorname{int} A$ atunci A este epi-Lipschitz în $\overline{y} \in A$ în orice direcţie.

Teorema 6 *Fie* Y *spaţiu local convex separat şi* $y_0 \in Y$ *astfel încât* $\varphi_A(y_0) \in \mathbb{R}$. *Atunci* φ_A *este finită şi lipschitziană pe o vecinătate* V *a lui* y_0 *dacă şi numai dacă* A *este epi-Lipschitz în* $\overline{y} := y_0 - \varphi_A(y_0)k^0$ *în direcţia* $-k^0$.

Următorul rezultat este similar Propoziţiei 2.

Corolarul 7 *Fie* Y *spaţiu local convex separat şi* $\overline{y} \in \operatorname{bd} A$. *Dacă* A *este epi-Lipschitz în* $\overline{y}$ *în direcţia* $-k^0$ *atunci* $\varphi_A(\overline{y}) = 0$.

Corolarul 8 *Fie* $\dim Y < \infty$ *şi* $\overline{y} \in \operatorname{bd} A$. *Atunci* φ_A *este finită şi lipschitziană pe o vecinătate a lui* $\overline{y}$ *dacă şi numai dacă* $-k^0 \in \operatorname{int} T_C(A, \overline{y})$, *unde* $T_C(A, \overline{y})$ *este conul tangent a lui Clarke la* A *în* $\overline{y}$.

In continuare (X, τ) este un spaţiu local convex separat Hausdorff şi netrivial iar X^* este dualul lui topologic înzestrat cu topologia $w^* := \sigma(X^*, X)$. Mulţimii $A \subset X$ îi asociem mai multe funcţii. Primele două sunt

$$\sigma_A, \varsigma_A : X^* \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \sigma_A(x^*) := \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle, \quad \varsigma_A(x^*) := \inf_{x \in A} \langle x, x^* \rangle. \tag{3}$$

Funcţia σ_A este funcţia support a lui A. Este evident că $\varsigma_A(x^*) = -\sigma_A(-x^*)$ pentru $x^* \in X^*$. Lui $A \subset X$ îi asociem şi funcţiile $\mu_A, \vartheta_A, \nu_A, \theta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definite prin

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &:= \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}, \quad \vartheta_A(x) := \sup \{\lambda > 0 \mid \lambda x \in A\}, \\ \nu_A(x) &:= \sup \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}, \quad \theta_A(x) := \inf \{\lambda > 0 \mid \lambda x \in A\}; \end{aligned}$$

deci $\mu_\emptyset = \theta_\emptyset = +\infty$ şi $\nu_\emptyset = \vartheta_\emptyset = -\infty$. μ_A este funcţionala Minkowski. Funcţiile de intrare şi ieşire ale lui Shephard sunt de tipul ν_A şi μ_A cu A submulţime a lui $\mathbb{R}^n_+$. Pentru unele proprietăţi ale lui μ_A şi ν_A a se vedea [15]. Au loc:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{0 \vee \vartheta_A(x)},\ 0 \vee \vartheta_A(x) = \frac{1}{\mu_A(x)},\ \theta_A(x) = \frac{1}{0 \vee \nu_A(x)},\ 0 \vee \nu_A(x) = \frac{1}{\theta_A(x)}$$

cu convenţia $1/0 := \infty$. Având $A \subset X$ şi $k \in X \setminus \{0\}$ considerăm funcţiile de scalarizare $\varphi_{A,k}, \psi_{A,k} : X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\varphi_{A,k}(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in tk - A\}, \quad \psi_{A,k}(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x \in tk + A\}. \tag{4}$$

(Deci $\varphi_{A,k}$ este funcţia definită în (1) pentru A înlocuit cu $-A$.) Avem că

$$\psi_{A,k}(x) = -\varphi_{-A,-k}(x) = -\varphi_{A,k}(-x) \quad \forall x \in X.$$

De aceea este suficient să studiem numai una dintre aceste funcţii. Un studiu detaliat al funcţiei $\varphi_{A,k}$ pentru A închisă cu $A = A + \mathbb{R}_+ k$ este făcut în [12, Section 2.3]; alte proprietăţi ale $\varphi_{A,k}$ sunt stabilite în [18]. In "production analysis" condiţia $A = A + \mathbb{R}_+ k$ nu este asigurată. De aceea următoarele rezultate sunt utile.

Propoziţia 9 *Presupunem că $A \subset X$ este închisă, $K \subset X$ şi $k \in X \setminus \{0\}$. Dacă*

$$A = (A + \mathbb{R}_+ k) \cap K, \tag{5}$$

atunci

$$A = \{x \in K \mid \psi_{A,k}(x) \geq 0\} = \{x \in K \mid \varphi_{A,k}(-x) \leq 0\}.$$

Propoziţia 10 *Fie $k \in X \setminus \{0\}$ şi $A_i \subset X$ satisfăcând (5) pentru orice $i \in I$ ($\neq \emptyset$). Atunci $A := \cap_{i\in I} A_i$ şi $A' := \cup_{i\in I} A_i$ satisfac de asemenea (5).*

Propoziţia 11 *Fie $I \neq \emptyset$ şi $A_i \subset X$ pentru orice $i \in I$. Atunci*

$$\psi_{\cup_{i\in I} A_i,k} = \sup_{i\in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cup_{i\in I} A_i,k} = \inf_{i\in I} \varphi_{A_i,k}, \quad \psi_{\cap_{i\in I} A_i,k} \leq \inf_{i\in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cap_{i\in I} A_i,k} \geq \sup_{i\in I} \varphi_{A_i,k}.$$

In plus, dacă $K \subset X$ este închisă şi $(A_i + \mathbb{R}_+ k) \cap K = A_i$ pentru orice $i \in I$, atunci

$$\psi_{\cap_{i\in I} A_i,k} = \inf_{i\in I} \psi_{A_i,k}, \quad \varphi_{\cap_{i\in I} A_i,k} = \sup_{i\in I} \varphi_{A_i,k}. \tag{6}$$

In particular, dacă $A_i = A_i + \mathbb{R}_+ k$ pentru orice $i \in I$ atunci (6) are loc.

In [9, Rels. (18), (19)] se consideră relaţiile de dualitate

$$\varsigma_A(x^*) = \inf_x \left(\langle x, x^* \rangle - \psi_A(x) \cdot \langle k, x^* \rangle\right), \quad \psi_A(x) = \inf_{x^*} \frac{\langle x, x^* \rangle - \varsigma_A(x^*)}{\langle k, x^* \rangle} \tag{7}$$

pentru $X = \mathbb{R}^n$ fără a se menţiona de unde sunt luaţi x şi x^*. In contextul din [9] A ($= L(y)$) este convexă (inclusă în $\mathbb{R}^n_+$) şi k ($= g_x$) este din $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. In continuare vom stabili relaţii precise de tipul (7).

Propoziţia 12 *Fie $x^* \in X^*$ cu $\langle k, x^* \rangle \geq 0$ şi $\emptyset \neq A \subset B \subset X$. Atunci*

$$\varsigma_A(x^*) = \inf_{x\in B} \left(\langle x, x^* \rangle - \psi_{A,k}(x) \cdot_h \langle k, x^* \rangle\right), \quad \sigma_A(x^*) = \sup_{x\in B} \left(\langle x, x^* \rangle + \psi_{A,-k}(x) \cdot_e \langle k, x^* \rangle\right).$$

Propoziţia 13 *Presupunem că A este închisă şi convexă. Dacă $-k \notin A_\infty$ atunci*

$$\psi_{A,k}(x) = \inf\{\langle x, x^* \rangle - \varsigma_A(x^*) \mid x^* \in X^*,\ \langle k, x^* \rangle = 1\} \quad \forall x \in X, \tag{8}$$

iar dacă $k \notin A_\infty$ atunci

$$\psi_{A,-k}(x) = \inf\{\sigma_A(x^*) - \langle x, x^* \rangle \mid x^* \in X^*,\ \langle k, x^* \rangle = 1\} \quad \forall x \in X.$$

Inspirându-ne din [9], pentru $T \subset X \times Y$ considerăm mulţimile

$$P(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in T\}, \quad L(y) := \{x \in X \mid (x, y) \in T\} \tag{9}$$

pentru $x \in X$ şi $y \in Y$. De asemenea, pentru $x^* \in X^*$ şi $y^* \in Y^*$, considerăm şi mulţimile

$$\overline{P}(x^*) := \{y \mid \exists x \in X:\ y \in P(x),\ \langle x, x^* \rangle \leq 1\} = \cup\{P(x) \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1\} \subset \mathrm{Pr}_Y(T), \tag{10}$$

$$\overline{L}(y^*) := \{x \mid \exists y \in Y:\ x \in L(y),\ \langle y, y^* \rangle \geq 1\} = \cup\{L(y) \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1\} \subset \mathrm{Pr}_X(T). \tag{11}$$

Propoziţia 14 *Presupunem că T este o mulţime nevidă, închisă şi convexă astfel încât $0 \in P(x)$ pentru orice $x \in \mathrm{Pr}_X(T)$. Atunci*
$$L(y) = \cap \left\{ \overline{L}(y^*) \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1 \right\} \quad \forall y \in Y.$$
Dacă în plus $k \in \ker T_\infty$ (adică $(k,0) \in T_\infty$) atunci
$$\psi_{L(y),k} = \inf \left\{ \psi_{\overline{L}(y^*),k} \mid \langle y, y^* \rangle \geq 1 \right\} \quad \forall y \in Y.$$

Propoziţia 15 *Presupunem că $T \subset X \times Y$ este o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Atunci*
$$P(x) = \cap \left\{ \overline{P}(x^*) \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \right\} \quad \forall x \in \ker T_\infty.$$
In plus, presupunem că mulţimea închisă $F \subset Y$ şi $l \in Y \setminus \{0\}$ sunt astfel încât
$$P_Y(T) \subset F \quad \textit{and} \quad [(x,y) \in T,\ t \geq 0,\ y - tl \in F] \Longrightarrow (x, y - tl) \in T.$$
Atunci
$$\psi_{P(x),-l} = \inf \left\{ \psi_{\overline{P}(x^*),-l} \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1 \right\} \quad \forall x \in \ker T_\infty.$$

Propoziţia 12 extinde [14, Prop. 2.4] şi [14, Prop. 4.1]. Utilizând rezultatele precedente se obţin majoritatea rezultatelor din [9] în condiţii precise.

Pentru $A \subset X$ cu X spaţiu local convex separat si X^* dualul său topologic notăm $\mathrm{bar}\, A := \mathrm{dom}\, \sigma_A$ conul barieră al lui A. De asemenea considerăm conurile convexe
$$A^+ := \{x^* \in E^* \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\ \forall x \in A\}, \quad A^\# := \{x^* \in E^* \mid \langle x, x^* \rangle > 0\ \forall x \in A \setminus \{0\}\}.$$

In continuare, dacă nu este menţionat altfel, X, Y sunt spaţii local convexe separate şi $k \in X \setminus \{0\}$, $l \in Y \setminus \{0\}$ sunt fixate. Având $T \subset X \times Y$, introducem mulţimile $P(x)$, $L(y)$, $\overline{P}(x^*)$ şi $\overline{L}(y^*)$ ca în (9), (10), (11) (vezi [9] şi [20]).

Fie $\overline{y} \in Y$ şi $\overline{x}^* \in X^*$ fixate şi considerăm $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ cu $(x, \overline{y} + tl) \in T$ şi $\langle x, \overline{x}^* \rangle \leq 1$, precum şi $(\gamma, y^*) \in \mathbb{R}_+ \times Y^*$ cu $\langle l, y^* \rangle > 0$. Utilizând direct definiţiile obţinem următoarele relaţii:
$$\psi_{\overline{P}(x^*),-l}(y) \leq \inf \left\{ \frac{\sigma_T(-\gamma x^*, y^*) + \gamma - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{R}_+,\ y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0 \right\} \quad \forall x^* \in X^*,\ y \in Y, \tag{12}$$
$$\sigma_T(-x^*, y^*) \geq \sup \left\{ \langle y, y^* \rangle - \gamma + \psi_{\overline{P}(\gamma^{-1}x^*),-l}(y) \cdot \langle l, y^* \rangle \mid \gamma \in \mathbb{P},\ y \in Y \right\} \forall x^* \in X^*,\ y^* \in Y^* \text{ cu } \langle l, y^* \rangle > 0, \tag{13}$$
$$\psi_{\overline{L}(y^*),k}(x) \leq \inf \left\{ \frac{\sigma_T(-x^*, \gamma y^*) - \gamma + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{R}_+,\ x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0 \right\} \quad \forall x \in X,\ y^* \in Y^*, \tag{14}$$
$$\sigma_T(-x^*, y^*) \geq \sup \left\{ \gamma - \langle x, x^* \rangle + \psi_{\overline{L}(\gamma^{-1}y^*),k}(x) \cdot \langle k, x^* \rangle \mid \gamma \in \mathbb{P},\ x \in X \right\} \forall x^* \in X^*, y^* \in Y^* \text{ cu } \langle k, x^* \rangle > 0. \tag{15}$$

Este natural să ne întrebăm care sunt elementele pentru care are loc egalitate în (12), (13), (14), respectiv (15). Răspundem acestei întrebări în ceea ce urmează.

Propoziţia 16 *Fie $T \subset X \times Y$ nevidă, $k \in X \setminus \{0\}$ şi $l \in Y \setminus \{0\}$.*

(a) *Presupunem că $x^* \in (\mathrm{Pr}_X(T))^+$ şi $y^* \in Y^*$ este astfel încât $\langle l, y^* \rangle > 0$. Atunci (13) are loc cu egalitate.*

(b) *Presupunem că T este închisă, convexă şi $\mathrm{Pr}_Y(T) \neq \{0\}$, şi $-k \notin \ker T_\infty$. Dacă $x^* \in X^*$ este astfel încât $\langle k, x^* \rangle > 0$ şi $y^* \in (\mathrm{Pr}_Y(T))^\#$, atunci (15) are loc cu egalitate.*

Să observăm că pentru X finit dimensional şi $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este convexă $h^{**}(x) = h(x)$ pentru $x \in {}^i(\mathrm{dom}\, h)$. Utilizând această observaţie pentru $h := f^* \Box A^* g^*$, $A^* : Y^* \to X^*$ fiind adjunctul lui A, cu $f \in \Gamma(X)$, $g \in \Gamma(Y)$ şi $A \in L(X,Y)$, Y fiind un spaţiu normat finit dimensional, obţinem următoarele rezultate.

Propoziţia 17 *Fie X, Y spaţii normate finit dimensionale (netriviale), $l \in Y \setminus \{0\}$, $y \in Y$, $x^* \in X^*$, şi fie $T \subset X \times Y$ o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Considerăm*
$$C := \{(\langle l, v^* \rangle, u^* + tx^*) \mid (u^*, v^*) \in \mathrm{bar}\, T,\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$
Dacă $(1,0) \in {}^iC$, atunci (12) are loc cu egalitate. In plus, dacă există $y_0^* \in Y^*$ cu $\langle l, y_0^* \rangle > 0$ şi $\sigma_T(-x^*, y_0^*) < \infty$ atunci
$$\begin{aligned}\psi_{\overline{P}(x^*),-l}(y) &= \inf \left\{ \frac{\sigma_T(-tx^*, y^*) + t - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid t \in \mathbb{P},\ y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\sigma_T(-x^*, y^*) + 1 - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0 \right\}.\end{aligned}$$

Propoziţia 18 *Fie X, Y spaţii normate finit dimensionale (netriviale), $k \in X \setminus \{0\}$, $x \in X$, $y^* \in Y^*$, şi fie $T \subset X \times Y$ o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Considerăm*

$$C := \{(\langle k, u^* \rangle, v^* - ty^*) \mid (-u^*, v^*) \in \operatorname{bar} T,\ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Dacă $(1,0) \in {}^iC$, atunci (14) are loc cu egalitate. In plus, dacă există $x_0^* \in X^*$ cu $\langle k, x_0^* \rangle > 0$ şi $\sigma_T(-x_0^*, y^*) < \infty$ atunci

$$\begin{aligned}\psi_{\overline{L}(y^*),k}(x) &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, ty^*) - t + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid t \in \mathbb{P},\ x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, y^*) - 1 + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0\right\}.\end{aligned}$$

Considerăm acum cazul unei tehnologii. In continuare $X := \mathbb{R}^n$ şi $Y := \mathbb{R}^m$ sunt înzestrate cu norma euclidiană; în plus, X şi Y sunt identificaţi cu dualele lor şi astfel $(\mathbb{R}^n_+)^+ = \mathbb{R}^n_+$, $(\mathbb{R}^n_+)^\# = \mathbb{R}^n_{++} := \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$.

Presupunem că $T \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ satisface axiomele (A1)–(A5) de mai jos:

(A1) T este închisă; (A2) $(x, y) \in T$, $(x', y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ şi $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$ implică $(x', y') \in T$ (aici $x' \geq x$ înseamnă $x' - x \in \mathbb{R}^n_+$ şi $y' \leq y$ înseamnă $y - y' \in \mathbb{R}^m_+$); (A3) $(0, y) \in T$ implică $y = 0$; (A4) $(0,0) \in T$; (A5) T is convexă.

In acest context, în [9], σ_T este numită funcţia profit şi este notată Π, $\psi_{\overline{P}(x^*),-l}$ este numită "indirect output distance function" şi este notată prin $I\overrightarrow{D}_o(x^*, \cdot; l)$, iar $\psi_{\overline{L}(y^*),k}$ este numită "indirect input distance function" şi este notată prin $I\overrightarrow{D}_i(\cdot, y^*; k)$. In continuare formulăm Propoziţiile 16, 17 şi 18 in cazul tehnologiei T.

Propoziţia 19 *Fie $T \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ satisfăcând axiomele (A1)–(A5).*

(a) *Presupunem că $l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ şi $y^* \in Y^*$ sunt astfel încât $\langle l, y^* \rangle > 0$. Atunci*

$$\sigma_T(-x^*, y^*) = \sup\left\{\langle y, y^* \rangle - \gamma + \psi_{\overline{P}(\gamma^{-1}x^*),-l}(y) \cdot \langle l, y^* \rangle \mid \gamma \in \mathbb{P},\ y \in Y\right\}. \tag{16}$$

(b) *Presupunem că $\operatorname{Pr}_Y(T) \neq \{0\}$ şi $k \in \mathbb{R}^n \setminus (-\mathbb{R}^n_+)$. Dacă $x^* \in X^*$ este astfel încât $\langle k, x^* \rangle > 0$ şi $y^* \in (\operatorname{Pr}_Y(T))^\#$ $(\supset \mathbb{R}^m_{++})$ atunci*

$$\sigma_T(-x^*, y^*) = \sup\left\{\gamma - \langle x, x^* \rangle + \psi_{\overline{L}(\gamma^{-1}y^*),k}(x) \cdot \langle k, x^* \rangle \mid \gamma \in \mathbb{P},\ x \in X\right\}. \tag{17}$$

Notăm că (16) şi (17) sunt practic relaţiile [9, (37)] şi [9, (39)]. Pentru a obţine cazurile particulare ale Propoziţiilor 17 şi 18 trebuie analizată condiţia $(1,0) \in {}^iC$ din aceste rezultate. Ca urmare se obţin:

Propoziţia 20 *Fie $T \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ satisfăcând axiomele (A1)–(A5). Presupunem că $l \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Atunci pentru orice $y \in \mathbb{R}^m$ şi $x^* \in \mathbb{R}^n_{++}$ avem*

$$\begin{aligned}\psi_{\overline{P}(x^*),-l}(y) &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-\gamma x^*, y^*) + \gamma - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{R}_+,\ y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-\gamma x^*, y^*) + \gamma - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{P},\ y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, y^*) + 1 - \langle y, y^* \rangle}{\langle l, y^* \rangle} \mid y^* \in Y^* : \langle l, y^* \rangle > 0\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Propoziţia 21 *Fie $T \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ satisfăcând axiomele (A1)–(A5). Presupunem că $k \in \mathbb{R}^n \setminus (-\mathbb{R}^n_+)$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi $y^* \in \mathbb{R}^m$ avem*

$$\begin{aligned}\psi_{\overline{L}(y^*),k}(x) &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, \gamma y^*) - \gamma + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{R}_+,\ x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, \gamma y^*) - \gamma + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid \gamma \in \mathbb{P},\ x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sigma_T(-x^*, y^*) - 1 + \langle x, x^* \rangle}{\langle k, x^* \rangle} \mid x^* \in X^* : \langle k, x^* \rangle > 0\right\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Notăm că relaţiile (18) şi (19) dau semnificaţii precise relaţiilor [9, (38)] şi [9, (40)].

În cadrul obiectivelor 1b, 2b, 3b am realizat un studiu al problemelor vectoriale pe spaţii normate infinit dimensionale. S-au avut în vedere două direcţii, fiind considerat cu prioritate studiul existenţei multiplicatorilor lui Lagrange. S-au considerat cazurile în care relaţiile de ordine sunt date prin intermediul conurilor cu interior vid şi apoi situaţia în care conurile de ordine au interior nevid şi s-au investigat mai multe tipuri de soluţii (lucrările [3], [6], [5]). Ulterior, s-a realizat un studiu al comportamentului topologic al mulţimii multiplicatorilor Lagrange pentru diferite probleme vectoriale pe spaţii normate finit şi infinit dimensionale (lucrarea [7]). In final, in spiritul Capitolului 6 (intitulat "Applications in numerical variational analysis") al cărţii [2], au fost obţinute mai multe estimari numerice ale ratelor de deschidere pentru multifunctii care se pot obtine pe baza unor condiţii cu coderivate precum şi situaţia soluţiilor stricte ale unor probleme de optimizare particulare (lucrările [4], [8]).

Scopul lucrării [5] a fost obţinerea unor rezultate de existenţă pentru multiplicatori Lagrange asociaţi soluţiilor optimale în sens Pareto ale unor probleme de optimizare vectorială în cazul special în care ordinea parţială pe spaţiul de sosire este dată de un con convex cu interior vid. Menţionăm că în cazul conurilor cu interior nevid, problema existenţei multiplicatorilor Lagrange pentru soluţii slabe poate fi studiată utilizând funcţionale de scalarizare ale căror proprietăţi de continuitate depind în mod esenţial de condiţia de interioritate amintită. În cazul abordat în lucrarea menţionată am utilizat o altă funcţie de scalarizare numită funcţia de “distanţă orientată", însă am lucrat cu un concept de soluţie Pareto aproximativă pentru problemele pe care le considerăm. Cadrul este următorul: X, Y sunt spaţii Banach reale iar $K \subset Y$ este un con închis, convex, punctat cu interior vid care induce pe Y o relaţie de ordine parţială notată $\leq_K$ şi dată prin $y_1 \leq_K y_2$ dacă şi numai dacă $y_2 - y_1 \in K$. Pentru un număr $\varepsilon > 0$ şi un element $x \in X$, notăm bila deschisă de centru x şi rază ε prin $B(x, \varepsilon)$.Mulţimea $K^* := \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \geq 0, \forall y \in K\}$ este conul dual al lui K. Fie $A \subset Y$ o mulţime nevidă; punctul $\overline{a} \in A$ se numeşte punct de minim Pareto al lui A în raport cu K dacă $(A - \overline{a}) \cap -K = \{0\}$. Mulţimea tuturor acestor puncte se notează prin $\mathrm{Min}(A \mid K)$. Fie $f : X \to Y$ şi $S \subset X$ o mulţime nevidă; un punct $\overline{x} \in S$ se numeşte punct de minim Pareto a lui f pe S în raport cu K dacă $f(\overline{x})$ este minim Pareto al lui $f(S)$ în raport cu K. Fie $e \in K$ cu $\|e\| = 1$. Dacă $\varepsilon > 0$, spunem că $\overline{a} \in A$ este un $(\varepsilon, e)-$Pareto minim al lui A în raport cu K dacă $(A - \overline{a}) \cap (-K - \varepsilon e) = \emptyset$ şi mulţimea acestor puncte se notează $(\varepsilon, e) - \mathrm{Min}(A \mid K)$. Ca mai sus, pentru o funcţie $f : X \to Y$ şi o mulţime nevidă $S \subset X$, un punct $\overline{x} \in S$ se numeşte $(\varepsilon, e)-$Pareto minim al lui f pe S în raport cu K dacă $f(\overline{x})$ este un $(\varepsilon, e)-$Pareto minim al lui $f(S)$ în raport cu K.

Pentru o mulţime nevidă $A \subset Y$, $A \neq Y$, funcţia distanţa orientată $\Delta_A : Y \to \mathbb{R}$ este dată prin $\Delta_A(y) = d_A(y) - d_{Y \setminus A}(y)$, unde d_A notează funcţia distanţa la mulţimea A. În cazul considerat de noi, i.e., $\operatorname{int} K = \emptyset$ are loc relaţia $\Delta_{-K-\varepsilon e}(y) = d_{-K-\varepsilon e}(y)$ şi, mai mult, subdiferenţiala acestei funcţii convexe satisface relaţia $\partial \Delta_{-K-\varepsilon e}(y) \subset K^*$ pentru orice $y \in Y$. Rezultatul de scalarizare este următorul.

Fie $\varepsilon > 0$, $e \in K$, $||e|| = 1$. Dacă $\overline{y} \in A \subset Y$ este un punct $(\varepsilon, e)-$Pareto minim al lui A în raport cu K, atunci $\overline{y}$ este o $\varepsilon-$soluţie a problemei

$$\min_{y \in A} \Delta_{-K-\varepsilon e}(y - \overline{y}).$$

Aşa cum am spus, în cazul convex, putem aborda direct soluţiile Pareto.

Teorema 22 *Fie $f : X \to Y$ o funcţie $K-$convexă şi $S \subset X$ o mulţime convexă şi închisă. Presupunem că f este continuu diferenţiabilă şi $f(S)$ are interior nevid. Fie $\overline{x}$ un punct de minim Pareto al lui f pe S în raport cu K. Atunci există $v \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.*

$$0 \in \nabla f(\bar{x})^* v + N(S, \overline{x}), \tag{20}$$

unde $N(S, \bar{x})$ notează conul normal la mulţimea S în punctul $\overline{x}$.

În cazul general, utilizăm două subdiferenţiale bine cunoscute: subdiferenţiala Mordukhovich (notată ∂_M) pentru cazul problemelor cu constrângeri geometrice şi subdiferenţiala proximinală (notată ∂_P) pentru cazul problemelor fără constrângeri. Prezentăm un astfel de rezultat.

Teorema 23 *Fie X, Y spaţii Asplund, $S \subset Y$ nevidă şi închisă iar $f : X \to Y$ o funcţie strict Lipschitz pe S. Dacă $\overline{x}$ este un $(\varepsilon, e)-$Pareto minim al lui f pe S în raport cu K, atunci există $x \in B(\overline{x}, \sqrt{\varepsilon}) \cap S$ şi $y^* \in S_{Y^*} \cap K^*$ a.î.*

$$0 \in \partial_M (y^* \circ f)(x) + \sqrt{\varepsilon} U_{X^*} + N_{\partial_M}(S, x).$$

Lucrarea [3] abordează problema existenţei multiplicatorilor lui Lagrange pentru probleme diferite: în loc de funcţii lucrăm cu multifuncţii şi considerăm două tipuri de soluţii, soluţii slabe şi soluţii ferme. În locul subdiferenţialelor considerate în cazul funcţiilor, în cazul multifuncţiilor considerăm coderivate. Astfel, cu notaţiile de mai sus, considerăm o multifuncţie F de la X la Y, o mulţime nevidă şi închisă $S \subset X$ şi problema asociată

$$(P_1) \ \min F \text{ cu } x \in S.$$

Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte soluţie slabă a problemei (P_1) dacă $\overline{x} \in S$ şi $(F(S) - \overline{y}) \cap - \operatorname{int} K = \emptyset$. Dacă Z este un spaţiu normat ordonat parţial de un con convex închis punctat Q cu interior nevid şi $G : X \rightrightarrows Z$ o multifuncţie, considerăm problema cu constrângeri:

$$(P_2) \ \min F \text{ cu } x \in G^{-1}(-Q).$$

Soluţiile slabe pentru această problemă se definesc înlocuind mai sus $S = G^{-1}(-Q)$.

Teorema 24 *Fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ şi $\overline{z} \in G(\overline{x}) \cap -Q$. Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este soluţie slabă pentru (P_2) atunci*

$$T_B((F \times G)(X) + K \times Q, (\overline{y}, \overline{z})) \cap (-\operatorname{int} K \times (-\operatorname{int} Q - \mathbb{R}_+ \overline{z})) = \emptyset$$

şi

$$T_B^2((F \times G)(X) + K \times Q, (\overline{y}, \overline{z}), (k, q)) \cap (-\operatorname{int} K \times (-\operatorname{int} Q - \mathbb{R}_+ \overline{z})) = \emptyset,$$
$$\forall (k, q) \in -K \times (-Q - \mathbb{R}_+ \overline{z}),$$

unde T_B, T_B^2 notează mulţimile tangente în sens Bouligand de ordinul întâi şi respectiv de ordinul al doilea.

Cu scopul de a stabili unele reciproce ale acestor rezultate considerăm următoarea noţiune: un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte soluţie fermă locală de ordin $\alpha > 0$ pentru (P_1) dacă există $\gamma > 0$ şi o vecinătate U a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice $x \in U \cap S$ şi $y \in F(x)$ are loc $\Delta(y - \overline{y}, -K) \geq \gamma \|x - \overline{x}\|^{\alpha}$.

Teorema 25 *Presupunem că X, Y sunt finit dimensionale şi F are grafic local închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Fie $e \in \operatorname{int} K$. Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este soluţie fermă locală de ordin 1 pentru (P_1) cu $S := X$ atunci există $\mu > 0$ a.î.*

$$\mu D_{X^*} \subset D^* F(\overline{x}, \overline{y})(\{y^* \in Y^* \mid y^*(e) = 1\}),$$

unde D^* notează coderivata normală.

În lucrarea [6] considerăm problema existenţei multiplicatorilor Lagrange pentru soluţii Pareto. Ipotezele suplimentare faţă de rezultatele din [5] vizează conul de ordine iar demonstraţiile folosesc aşa-numitele conuri de dilatare. O mulţime convexă B se numeşte bază a conului K dacă $0 \notin \operatorname{cl} B$ şi $K = \operatorname{cone} B$, unde cl notează închiderea topologică iar $\operatorname{cone} B := [0, \infty)B$ este conul generat de B. O mulţime $A \subset Y$ se numeşte (slab) asimptotic compactă dacă există o vecinătate (slabă) U a lui 0 a.î. $U \cap [0, 1]A$ este relativ compactă. În această lucrare, din dorinţa de a lucra pe spaţii Banach generale considerăm conul normal aproximativ şi obiectele derivate: subdiferenţiala aproximativă, coderivata aproximativă notate N_a, ∂_a, D_a^*.

Teorema 26 *Fie $A \subset Y$ o mulţime închisă şi $\overline{y} \in \operatorname{Min}(A \mid K)$. Presupunem că $\operatorname{cone}(A - \overline{y})$ este (slab) închisă şi K admite o bază (slab) închisă B. Dacă $\operatorname{cone}(A - \overline{y})$ sau B este (slab) asimptotic compactă atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $e \in K \setminus \{0\}$ există $y^* \in Y^*$ cu $y^*(e) = 1$, $\inf_{b \in B} y^*(b) \geq \varepsilon \|y^*\|$ şi $-y^* \in N_a(A, \overline{y})$.*

Teorema 27 *Fie f o funcţie locally Lipschitz şi $S \subset X$ o mulţime închisă. Fie $\overline{x}$ este un punct de minim Pareto pentru f pe S. Presupunem că $\operatorname{cone}(f(C) - f(\overline{x}))$ este (slab) închis, K admite o bază (slab) închisă B şi $\operatorname{cone}(f(C) - f(\overline{x}))$ sau B este (slab) asimptotic compactă. Atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $e \in K \setminus \{0\}$ există $y^* \in Y^*$ cu $y^*(e) = 1$ şi $\inf_{b \in B} y^*(b) \geq \varepsilon \|y^*\|$ care satisface*

$$0 \in \partial_a \langle y^*, f \rangle (\overline{x}) + N_a(C, \bar{x}).$$

Studiul, cuprins în lucrarea [5], a fost structurat pe două direcţii fiind considerat atât cazul problemelor în care datele sunt funcţii diferenţiabile cât şi cazul problemelor "nenetede" guvernate de multifuncţii.

În prima parte a articolului mai sus menţionat, ne ocupăm de problema de optimizare vectorială

$$(P) \qquad \min f(x) \quad \text{cu} \quad g(x) \in -Q,$$

unde X, Y şi Z sunt spaţii vectoriale normate, $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ sunt funcţii vectoriale iar Q este un con convex închis din Z. Din nou, pe spaţiul Y considerăm ordinea parţială dată de un con convex şi închis K. Prin M notăm mulţimea punctelor fezabile ale problemei($\mathcal{P}$), i.e., $M := \{x \in X \mid g(x) \in -Q\}$.

In anumite situaţii vom presupune: (A_K) $\operatorname{int} K \neq \emptyset$; (A_Q) $\operatorname{int} Q \neq \emptyset$.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Z$ două multifuncţii. Să considerăm problema (P_1) de mai sus.

Un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte punct de minim pentru problema (P_1) dacă

$$(F(S) - \overline{y}) \cap -K = \{0\}.$$

Considerăm de asemenea cazul problemei (P_2) şi a unei variante simplificate în care G este o funcţie este o funcţie g.

În afara situaţiei în care vom considera conuri cu interior nevid, vom lucra cu o clasă mai generală de conuri numite dual-compacte. Pentru prima parte luăm cazul soluţiilor slabe ale problemei cu funcţii în care presupunem: (A_f) funcţia $f : X \to Y$ este de clasă C^1 pe X; (A_g) funcţia $g : X \to Z$ este de clasă C^1 pe X.

Unul dintre rezultatele principale este următorul.

Teorema 28 *Presupunem (A_K), (A_Q), (A_f) şi (A_g). Fie $\overline{x} \in M$ punct de minim slab pentru $(\mathcal{P})$ a.î. are loc condiţia (MF) în $\bar{x}$. Atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi $z^* \in Q^*$ a.î.*

$$y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + z^* \circ \nabla g(\overline{x}) = 0. \tag{21}$$

În rezultatul de mai sus, fixăm $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi considerăm

$$L_{y^*} := \{z^* \in Q^* \mid (21) \quad \text{are loc}\}.$$

Să observăm mai întâi că (MF) este echivalentă cu următoarea condiţie de regularitate (RC): $z^* \in Q^*, z^* \circ \nabla g(\overline{x}) = 0$ implică $z^* = 0$.

Pentru a obţine un rezultat privind mărginirea lui L_{y^*} avem nevoie de o ipoteză asupra spaţiului $Z : (A_Z)$ bila unitate închisă a lui Z^* este w^*-secvenţial compactă.

Teorema 29 *Presupunem (A_Z), (A_f), (A_g) şi că Q este dual compact. Fie $y^* \in K^* \setminus \{0\}$. Dacă are loc (RC) atunci L_{y^*} este mărginită în normă. Invers, dacă L_{y^*} este nevidă şi mărginită atunci are loc condiţia (RC).*

Observăm ca mulţimea L_{y^*} este convexă, deci în ipoteza (MF), ea este w^* compactă. Are loc următorul rezultat global.

Corolarul 30 *Presupunem (A_Z), (A_K), (A_Q), (A_f) şi (A_g). Presupunem că $\overline{x} \in M$ este punct de minim slab pentru $(\mathcal{P})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) are loc (MF);

(ii) are loc (RC);

(iii) există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î. L_{y^*} este nevidă şi mărginită.

Discutăm acum pe scurt problema($\mathcal{P}_2'$). Cum această problemă este netedă, cadrul natural este cadrul spaţiilor Asplund unde se folosesc obiectele de diferenţiabilitate generalizată de tip Mordukhovich.

Teorema 31 *Presupunem că X, Y, Z sunt spaţii Asplund şi $(\overline{x}, \overline{y})$ este minim Pareto pentru (P_2'). Dacă F este pseudo-Lipschitz în $(\overline{x}, \overline{y})$, g este local Lipschitz şi K, Q sunt dual compacte, atunci există $y^* \in K^*$ şi $z^* \in Q^*$ cu $\|y^*\| + \|z^*\| = 1$ a.î.*

$$0 \in D_N^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + D_N^* g(\overline{x})(z^*). \tag{22}$$

Elementele y^*şi z^* sunt multiplicatorii Lagrage pentru problema noastră. Întrebarea ce apare în contextul discuţiei noastere este în ce condiţii mulţimea

$$L_{y^*} = \{z^* \in Q^* \mid (22) \text{ are loc}\}$$

este nevidă şi mărginită pentru un element $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ fixat. Răspunsul este dat de rezultatul următor.

Teorema 32 *Fie X, Y, Z spaţii reflexive şi $(\overline{x}, \overline{y})$ un punct de minim Pareto pentru (P_2'). Presupunem că F este pseudo-Lipschitz şi N - regulată în $(\overline{x}, \overline{y})$, g este local Lipschitz în $\overline{x}$ şi N - regulată în $(\overline{x}, g(\overline{x}))$. Dacă K şi Q sunt dual compacte şi are loc următoarea condiţie de calificare:*

$$z^* \in Q^*, 0 \in D_N^* g(\overline{x})(z^*) \Rightarrow z^* = 0 \tag{23}$$

atunci există $y^* \in K^*, \|y^*\| = 1$ a.î L_{y^*} este nevida şi mărginită.

Cazul problemei (P_2) se discută folosind acelaşi model: se deduc condiţii de existenţă a multiplicatorilor şi apoi se impune o condiţie de calificare de tip Mangasarian-Fromowitz pentru a deduce mărginitea mulţimii acestor multiplicatori.

In [8], s-au obţinut mai multe reguli de tip Fermat pentru probleme de optimizare vectorială cu multifuncţii. Condiţiile de tip Fermat astfel obţinute se referă la mai multe multifuncţii asociate multifuncţiei obiectiv, fiind astfel generalizate multe dintre rezultatele din literatura ultimilor ani dedicată acestui subiect. Astfel, in notaţile de mai sus, considerăm problemele $(P_1), (P_2)$ şi introducem multifuncţia $\tilde{F} : X \rightrightarrows Y$ dată prin $\tilde{F}(x) = F(x) + K$ pentru orice $x \in X$. Mai mult, utilizăm notaţia $\operatorname{cl} F$ pentru multifuncţia al cărei grafic este $\operatorname{cl} \operatorname{Gr} F$. Schiţăm unul dintre rezultalele principale.

Teorema 33 *Fie X, Y spaţii Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ minim Pareto local pentru F.*

(i) Dacă $\operatorname{Gr} F$ este local închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.

$$0 \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

(ii) Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.

$$0 \in D^*(\operatorname{cl} F)(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

(iii) Dacă $\operatorname{Gr} \tilde{F}$ este local închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.

$$0 \in D^* \tilde{F}(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

(iv) Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, atunci există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ a.î.

$$0 \in D^*(\operatorname{cl} \tilde{F})(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

In lucrarea [4] au fost prezentate mai multe condiţii de optimalitate pentru soluţii stricte asociate unor probleme vectoriale nenetede. Este bine cunoscut faptul că, în general, algoritmii de determinare a soluţiilor problemelor de optimizare caută, de fapt, soluţii cu proprietăţi speciale, de exemplu soluţii izolate, stricte, etc. In acest studiu au fost utilizate unele dintre metodele dezvoltate în lucrarea [3]. Din nou, cu notaţiile de mai sus, avem următoarea definiţie.

Fie $f : X \to Y$ o funcţie vectorială. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ şi $\mu > 0$. Un punct $\overline{x} \in S$ soluţie locala strictă de ordin m (şi constantă μ) pentru f pe S daca există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice $x \in U \cap S$, $d(f(x) - f(\overline{x}), -K) \geq \mu \|x - \overline{x}\|^m$.

Pentru acest tip de soluţie gasim mai multe condiţii necesare de optimalitate care acopera rezultatele cunoscute din cazul scalar si care au forma generala

$$\mu U_{X^*} \subset \bigcup_{y^* \in \partial \varphi_e(0)} \partial(y^* \circ f)(\overline{x}) + N(S, \overline{x}).$$

unde U_{X^*} este sfera unitate închisă iar subdiferenţiala şi conul normal sunt luate în sens Mordukhovich iar φ_e este o funcţie de scalarizare asocită elementului $e \in \operatorname{int} K$.

În cadrul obiectivului 3c, s-a elaborat lucrarea [17] care porneşte de la studiul cărţii [10] şi a lucrării [11] unde D.Y. Gao şi colaboratorii săi stabilesc un mare număr de rezultate aşa-numite de bi-dualitate şi de trialitate. Astfel, s-a constatat că multe din rezultatele cuprinse în aceste lucrări nu sunt prezentate într-o formă corectă din punct de vedere matematic şi multe demonstraţii nu sunt complete. Lucarea [17] prezintă contraexemple la rezultatele menţionate, folosind funcţii pătratice definite pe spaţii Hilbert.

References

[1] J.-M. Bonnisseau, B. Crettez, On the characterization of efficient production vectors, Economic Theory 31 (2007), 213–223.

[2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings*, Springer 2009

[3] M. Durea, *Optimality conditions for weak and firm efficiency in set-valued optimization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 344 (2008), 1018-1028.

[4] M. Durea, *Remarks on strict efficiency in scalar and vector optimization,* Journal of Global Optimization, 47 (2010), 13-27.

[5] M. Durea, J. Dutta, C. Tammer, *Bounded sets of Lagrange multipliers for vector optimization problems in infinite dimension*, J. Math. Anal. Appl. 348 (december 2008), 589-606.

[6] M. Durea, J. Dutta, *Lagrange multipliers for Pareto minima in general Banach spaces,* Pacific Journal of Optimization, 4 (2008), 447-463.

[7] M. Durea, J. Dutta, Chr. Tammer, *Lagrange multipliers for $\varepsilon-$Pareto solutions in vector optimization with non solid cones in Banach spaces*, Journal of Optimization Theory and Aplications, 145 (2010), 196-211.

[8] M. Durea, R. Strugariu, *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, DOI: 10.1080/02331930903531527.

[9] Färe, R., Primont, D., 2006. Directional duality theory. Economic Theory 29, 239–247.

[10] D.Y. Gao, *Duality principles in nonconvex systems. Theory, methods and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[11] D.Y. Gao, H.D. Sherali, *Canonical duality: Connection between nonconvex mechanics and global optimization*, In: Advances in Applied Mathematics and Global Optimization, Springer, 2008, 249–316.

[12] Göpfert, A., Tammer, Chr., Riahi, H., Zălinescu, C., 2003. Variational methods in partially ordered spaces. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC 17, Springer, New York.

[13] A. Hantoute, M.A. Lopez, C. Zălinescu, *Subdifferential calculus rules in convex analysis: A unifying approach via pointwise supremum functions*, SIAM J. Optim. 19 (2008), 863–882.

[14] Luenberger, D. G., 1992. New optimality principles pentru economic efficiency şi equilibrium, Journal of Optimization Theory şi Applications 75, 221–264.

[15] J.-P. Penot, C. Zălinescu, *Harmonic sum şi duality*, J. Convex Anal. 7 (2000), 95–114.

[16] Rockafellar, R.T., 1970. Convex Analysis. Princeton University Press.

[17] R. Strugariu, M.D. Voisei, C. Zălinescu, *Counter-examples in bi-duality, triality and tri-duality*, Communications on Pure and Applied Analysis (acceptată).

[18] C. Tammer, C. Zălinescu, *Lipschitz properties of the scalarization function şi applications*, Optimization 9 (2) (2010), 305-319.

[19] Zălinescu, C., 2002. Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific, Singapore.

[20] C. Zălinescu, *Duality results involving functions associated to nonempty subsets of locally convex spaces*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. 103 (2), 2009, pp. 219–234.

[21] C. Zălinescu, *On the duality between the profit and the indirect distance functions in production theory*, European J. Oper. Res. 207 (2010), 30-36.

Director de contract,
prof. dr. Constantin Zălinescu