Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a IX-a, Algebră

Fiind dat $x \in \mathbb{R}$, notăm cu $[x]$ cel mai mare număr întreg care nu-l depăşeşte pe x, număr numit *partea întreagă* a lui x, şi notăm cu $\{x\}$ diferenţa $\{x\} = x - [x]$, numită *partea fracţionară* a lui x. Sunt evidente următoarele caracterizări:

$$[x] = n \;\Leftrightarrow\; n \in \mathbb{Z} \text{ şi } x \in [\,n, n+1),$$

şi

$$\{x\} = \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \in [\,0,1) \text{ şi } x - \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Amintim şi echivalenţele

$$\{x\} = \{y\} \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z},\; \{x\} = x \;\Leftrightarrow\; [x] = 0.$$

1. Arătaţi că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $\{x+y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

2. Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $\{nx\} = \{n\{x\}\}$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\{x^2\} = \{x\}^2$.

4. Arătaţi că în şirul
$$\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \ldots, \{na\}, \ldots, \tag{1}$$
apar numai un număr finit de valori distincte dacă şi numai dacă a este număr raţional.

5. Fie $a \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că ori toate valorile şirului
$$\{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \ldots, \{a^n\}, \ldots, \tag{2}$$
sunt distincte între ele, ori toate sunt nule.

6. Arătaţi că şirul
$$\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \{\sqrt{3}\}, \ldots, \{\sqrt{n}\}, \ldots, \tag{3}$$
are o infinitate de valori distincte.

7. Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea
$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \cdots + \{\sqrt{n}\} \geq \frac{2([\sqrt{n}] - 1)}{\sqrt{3} + 1}. \tag{4}$$

8. Arătaţi că şirul
$$\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \{\sqrt{3}\}, \ldots, \{\sqrt{n}\}, \ldots, \tag{5}$$
are cel puţin o valoare în orice subintervalul $(\alpha, \beta) \subset (0,1)$.