Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a X-a, Algebră

Nucleul unei funcţii

Definiţie. Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ o relaţie pe A. Spunem că $\mathcal{R}$ este o *relaţie de echivalenţă pe* A, dacă îndeplineşte condiţiile:

(1) este *reflexivă*: $(a, a) \in R, (\forall) a \in A$;
(2) este *simetrică:* $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$;
(3) este *tranzitivă* $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Definiţie. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Se numeşte *nucleul funcţiei* f, notat $ker\ f$, relaţia $ker\ f \subseteq A \times A$ definită astfel:
$(a_1, a_2) \in ker f \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$.

1. Demonstraţi că:

(1) $ker\ f$ este relaţie de echivalenţă
(2) f este funcţie injectivă dacă şi numai dacă $ker\ f = \{(a, a) \mid a \in A\}$

2. Fie $C_{\mathcal{R}}(a) = \{a' \in A \mid (a, a') \in \mathcal{R}\}$, unde $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă pe A . $C_{\mathcal{R}}(a)$ se numeşte *clasa de echivalenţă a lui a relativ la* $\mathcal{R}$. Atunci:

(1) $a \in C_{\mathcal{R}}(a), (\forall) a \in A$;
(2) $C_{\mathcal{R}}(a_1) = C_{\mathcal{R}}(a_2) \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \mathcal{R}$;
(3) $(a_1, a_2) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow C_{\mathcal{R}}(a_1) \cap C_{\mathcal{R}}(a_2) = \emptyset$;
(4) $\bigcup\limits_{a \in A} C_{\mathcal{R}}(a) = A$.

Definiţie. Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, notată $A/\mathcal{R} = \{C_{\mathcal{R}}(a) | a \in A\}$, se numeşte *mulţimea cât a lui* A *relativ la* $\mathcal{R}$.

3. Fie A o mulţime şi $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă pe A. Arătaţi că există o funcţie surjectivă $f : A \to B$, astfel încât $ker\ f = \mathcal{R}$.

Următoarea problemă ne oferă descompunerea unei funcţii în compunere de funcţii de tip particular:

4. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Atunci există mulţimile A_1 şi B_1, există funcţiile $f_1 : A \to A_1$ surjectivă, $f_2 : A_1 \to B_1$ bijectivă, $f_3 : B_1 \to B$ injectivă, astfel încât $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Cazuri particulare:

5. Determinaţi A_1, B_1, f_1, f_2, f_3 (care satisfac problema 4) pentru urmatoarele funcţii particulare:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\ x$;
(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x)$ este restul împărţirii lui x la n unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr natural fixat.