Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a XI-a, Analiză

Se consideră şirurile $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{9x_n y_n^2}{(x_n + 2y_n)^2} & , x_0 = x, \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + 2y_n}{3} & , y_0 = y, \end{cases}$$

unde $0 < x < y$.

1). Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$x = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 < y_0 = y.$$

2). Să se arate că (x_n) şi (y_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită.

3). Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt[3]{xy^2}$.

(Se va observa că $x_{n+1} \cdot y_{n+1}^2 = x_n \cdot y_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$).

4). Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n - x_n < (y - x) \cdot \left[\frac{y(y-x)}{3x^2}\right]^{2^n - 1}.$$

(Se va observa că $y_{n+1} - x_{n+1} < \dfrac{y}{3x^2} \cdot (y_n - x_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}$).

5). Se consideră $x = \frac{3}{2}, y = 2$. Să se arate că

$$0 < y_n - \sqrt[3]{6} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^{2^n - 1}.$$

6). Să se determine primele două zecimale exacte ale lui $\sqrt[3]{6}$.