Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a XII-a, Analiză

I. 1). Să se arate că, oricare ar fi $x_1, x_2 \in]0, \pi[$,

$$\sin x_1 + \sin x_2 \leq 2 \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Egalitatea în relaţia de mai sus are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$.

2). Să se demonstreze folosind metoda inducţiei complete că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$ şi oricare ar fi numerele reale $x_1, \cdots, x_n \in]0, \pi[$,

$$\sin x_1 + \cdots + \sin x_n \leq n \cdot \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Egalitatea în relaţia de mai sus are loc dacă şi numai dacă $x_1 = \cdots = x_n$.

Observaţii.

a). Pentru etapa inductivă se poate arăta întâi că funcţia $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x_1 + \cdots + \sin x_n + \sin x - (n+1) \cdot \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n + x}{n+1}, \forall x \in]0, \pi[,$$

este negativă pe $]0, \pi[$ şi că

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x_1 + \cdots + \sin x_n = n \cdot \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \text{ şi } x = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

b). Inegalitatea de la punctul 2) este o consecinţă a faptului că funcţia *sinus* este concavă pe intervalul $]0, \pi[$.

II. 1). Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi oricare ar fi $x \in]0, \pi[$,

$$\sin x + (n-1) \cdot \sin \frac{x}{n-1} \leq n \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = \frac{n-1}{n} \cdot \pi$.

2). Fie numărul natural $n \geq 3$ şi numerele reale

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leq 2\pi.$$

Notăm cu C cercul cu centrul în originea reperului ortogonal xOy şi de rază 1 şi cu $A_k = (\cos\alpha_k, \sin\alpha_k), k = 1, \cdots, n$. Fie P poligonul înscris în cercul C de vârfuri $A_1, \cdots, A_n$.

Să se observe că P este un poligon convex şi să se arate că perimetrul poligonului P este

$$\Pi(P) = 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2} + \cdots + \sin\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{2} + \sin\frac{\alpha_n-\alpha_1}{2}\right).$$

3). Să se arate că, oricare ar fi numărul natural $n \geq 3$,

$$\Pi(P) \leq 2n \cdot \sin\frac{\pi}{n}.$$

$\Pi(P) = 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ dacă şi numai dacă P este poligon regulat cu n laturi înscris în cercul C.

Să se interpreteze geometric rezultatul obţinut.

III. 1). Să se arate că, oricare ar fi $x \geq 0$, $\sin x \leq x$.

2). Fie $\mathcal{P}$ mulţimea poligoanelor convexe înscrise în cercul C. Oricare ar fi $P \in \mathcal{P}$, notăm cu $\Pi(P)$ perimetrul poligonului P. Să se arate că, oricare ar fi $P \in \mathcal{P}$,

$$\Pi(P) \leq 2\pi.$$

3). Să se demonstreze că

$$\sup\{\Pi(P) : P \in \mathcal{P}\} = 2\pi$$

şi să se interpreteze geometric egalitatea de mai sus.