Soluţie

a) Calculăm în două moduri cardinalul mulţimii $A = \{(m, v) | m \in M, v \in m\}$:

$$|A| = \sum_{v \in V} |\{m \in M | v \in m\}| = \sum_{v \in V} d_G(v) \tag{1}$$

şi

$$|A| = \sum_{m \in M} |\{v \in V | v \in m\}| = \sum_{m \in M} 2 = 2|M|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea cerută.

b) Evident, suma gradelor vârfurilor de grad par ale unui graf este număr par. Ţinând cont de egalitatea de la punctul a), deducem că suma gradelor vârfurilor de grad impar este tot un număr par, deci numărul acestor vârfuri este par.

c) Afirmaţia rezultă prin aplicarea punctului b) grafului în care vârfurile sunt elevii acelei clase, iar două vârfuri sunt unite printr-o muchie dacă şi numai dacă elevii corespunzători sunt prieteni.

d) Considerăm graful în care vârfurile sunt cele 9 segmente, iar o muchie va uni două vârfuri dacă segmentele corespunzătoare se intersectează. Presupunând că fiecare din cele 9 segmente intersectează exact alte 3 segmente, deducem că gradul fiecărui vârf al grafului considerat este 3. Astfel acesta are 9 vârfuri de grad 3 (adică un număr impar de vârfuri de grad impar), ceea ce contrazice afirmaţia punctului b).

e) Considerăm graful G în care vârfurile sunt cei 20 de membri v_1, v_2, ..., v_{20}, iar muchiile cele 14 partide. Cum fiecare membru al clubului joacă cel puţin o dată, avem

$$d_G(v_i) \geq 1, \forall\, i = 1, 2, ..., 20.$$

Pe de altă parte, avem

$$\sum_{i=1}^{20} d_G(v_i) = 2 \cdot 14 = 28$$

din punctul a).

Pentru fiecare $i = 1, 2, ..., 20$, ştergem $d_G(v_i) - 1$ muchii ce conţin vârful v_i (unele muchii ale grafului ar putea fi şterse de două ori). Astfel, în graful nou obţinut fiecare vârf are gradul cel mult egal cu 1. Numărul maxim de muchii şterse este

$$\sum_{i=1}^{20}(d_G(v_i) - 1) = \sum_{i=1}^{20} d_G(v_i) - 20 = 28 - 20 = 8,$$

de unde deducem că rămân cel puţin $14 - 8 = 6$ muchii, iar cele 12 vârfuri ce le determină au toate gradul 1. În concluzie, am găsit 12 membri diferiţi care joacă 6 partide din turneu. ∎

Soluţie

1. Fixăm O un punct în spaţiul euclidian $\mathcal{E}$. Atunci $(A, B; C) = \lambda$ dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB},\ \lambda \neq -1$$

2.

$$\overrightarrow{OB_i} = \frac{1}{1+\lambda_i}\overrightarrow{OA_i} + \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\overrightarrow{OA_i},\ i = 1, 2, 3$$

A_1, A_2, A_3 puncte distincte, necoliniare.

B_1, B_2, B_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă $\overrightarrow{B_1B_2} = k\overrightarrow{B_1B_3}$ dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{OB_2} = (1-k)\overrightarrow{OB_1} + k\overrightarrow{OB_3}$$

Înlocuim $\overrightarrow{OB_i}$, $i = 1, 2, 3$ şi din condiţia de necoliniaritate pentru punctele $(A_i)_{i=\overline{1,3}}$ se obţine relaţia cerută .

3. Se procedează în acelaşi mod ca la pct. 2 şi se ţine cont de fatul că punctele $(A_i)_{i=\overline{1,4}}$ sunt necoplanare.

4. Fie $A_1, A_2, \ldots A_n$ puncte afin independente din spaţiul $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$ şi B_1 (resp. B_2, ... , resp. B_n) un punct distinct de A_1 şi A_2 (resp. de A_2 şi A_3 , ... , resp. A_n şi A_1) ce împarte segmentul orientat (A_1, A_2) (resp. $(A_2, A_3$, ... , resp. (A_n, A_1)) în raportul λ_1 (resp. λ_2, ... , resp. λ_n) .

Generalizarea solicitată este:

Să se arate că punctele B_1, ... , B_n sunt afin dependente dacă şi numai dacă $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^n$ (teorema lui Menelaus - generalizare) .