Soluţie

a) Pentru orice divizor d al lui n, grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ are un (unic!) subgrup de ordin d, anume $\left\{\hat{0}, \hat{\frac{n}{d}}, \widehat{\frac{2n}{d}}, ..., \widehat{\frac{(d-1)n}{d}}\right\}$.

b) Cel mai simplu exemplu de CLT-grup neabelian îl constituie grupul simetric S_3 (de ordin 6).

c) Pentru fiecare număr prim $p \geq 10$, orice grup de ordin p are ca subgrupuri doar subgrupurile improprii, deci este CLT-grup. Ca o generalizare, se poate arăta că orice grup de ordin p^n, unde p este prim şi $n \in \mathbb{N}$, este CLT-grup.

d) Probăm că A_4 nu are subgrupuri de ordin 6. Presupunem prin reducere la absurd că există un astfel de subgrup H. Atunci

$$x^2 \in H, \forall\, x \in G.$$

Într-adevăr, afirmaţia este evidentă pentru orice $x \in H$. Dacă $x \in G \setminus H$, atunci $G = H \cup xH$, unde $xH = \{xh | h \in H\}$. Acest fapt implică $x^2 \in H$ sau $x^2 \in xH$, iar cea de a doua situaţie este exclusă (ar rezulta $x \in H$, o contradicţie).

Prin calcul direct se arată că în A_4 există 9 pătrate perfecte distincte. Conform afirmaţiei de mai sus, acestea se găsesc în H, o contradicţie.

e) Fie $G = A_4 \times G_1$, unde G_1 este un grup de ordin n. Atunci G are ordin $12n$ şi nu posedă subgrupuri de ordin $6n$ (un astfel de subgrup ar fi de forma $H \times G_1$ cu H este subgrup de ordin 6 în A_4, lucru imposibil conform punctului precedent). ∎

Analiză clasa XII - Soluţie

I.1). Dacă presupunem că există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) > 0$ atunci, deoarece f este continuă în x_0, putem găsi un interval închis $[c,d] \subseteq [a,b]$ astfel încât, oricare ar fi $x \in [c,d]$, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$.
Rezultă că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \cdot (d-c) > 0$.

2). $A + 2\lambda B + \lambda^2 C = \displaystyle\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$. Deoarece $C > 0$, rezultă că $B^2 \leq AC$. Dacă $B^2 = AC$ atunci există $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\displaystyle\int_a^b [f(x) + \lambda_0 g(x)]^2 dx = 0$. Folosind punctul 1), $f(x) = -\lambda_0 g(x)$, oricare ar fi $x \in [a,b]$.

II. 1). c). $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \text{ctg}x \cdot (f^2(x))' = 2 \lim_{x \searrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cos x \frac{f(x)}{x} f'(x)\right] = 2(f'(0))^2$.

Punctele a), b) şi d) se rezolvă similar.

2). $2\displaystyle\int_0^\pi \text{ctg}x f(x) f'(x) dx = \int_0^\pi \text{ctg}x [f^2(x)]' dx =$

$$= \lim_{\substack{u \searrow 0 \\ v \nearrow \pi}} \int_u^v \text{ctg}x [f^2(x)]' dx = \lim_{\substack{u \searrow 0 \\ v \nearrow \pi}} \left[\text{ctg}x f^2(x)\Big|_u^v + \int_u^v \frac{1}{\sin^2 x} f^2(x) dx\right] =$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 x} f^2(x) dx.$$

în relaţia de mai sus se va observa că

$$\lim_{u \searrow 0} \text{ctg}u \cdot f^2(u) = \lim_{u \searrow 0} \left[\frac{u}{\sin u} \cos u \frac{f(u)}{u} f(u)\right] = 1 \cdot 1 \cdot f'(0) \cdot f(0) = 0$$

şi

$$\lim_{v \nearrow \pi} \text{ctg}v \cdot f^2(v) = \lim_{v \nearrow \pi} \left[\frac{v-\pi}{\sin v} \cos v \frac{f(v)}{v-\pi} f(v)\right] = (-1) \cdot (-1) \cdot f'(\pi) \cdot f(\pi) = 0.$$

3). $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 x} f^2(x)dx = 2 \cdot \int_0^\pi [\mathrm{ctg} x \cdot f(x)] \cdot [f'(x)]dx \leq$

$\displaystyle\leq 2 \left(\int_0^\pi \mathrm{ctg}^2 x \cdot f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\pi (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\displaystyle\leq \int_0^\pi \mathrm{ctg}^2 x \cdot f^2(x)dx + \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât, oricare ar fi $x \in [0, \pi], \mathrm{ctg} x f(x) = \lambda f'(x)$ şi $m = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ctg}^2 x f^2(x)dx = \int_0^\pi (f'(x))^2 dx = n$. Rezultă imediat că $\lambda = 1$ şi că

$$\frac{\sin x f'(x) - \cos x f(x)}{\sin^2 x} = \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' = 0,$$

oricare ar fi $x \in (0, \pi)$. Deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c \sin x$, oricare ar fi $x \in (0, \pi)$. Continuitatea funcţiilor permite prelungirea egalităţii şi în capete.

Printr-un calcul direct se arată că funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = c \sin x$, verifică egalitatea $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)dx = \int_0^\pi f'^2(x)dx = \frac{\pi c^2}{2}$.

4). Inegalitatea lui Wirtinger pentru funcţia indicată se scrie

$$\int_0^\pi \sin^\alpha x dx \leq \frac{\alpha^2}{4} \int_0^\pi \sin^{\alpha-2} x \cdot \cos^2 x dx,$$

de unde rezultă imediat inegalitatea cerută.