Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa a II-a

Clasa a X-a

**I.** Se numeşte *graf* o pereche $G = (V, M)$, unde $V$ este o mulţime finită ale cărei elemente vor fi numite *vârfuri*, iar $M$ este o mulţime formată din submulţimi cu două vârfuri din $V$ şi ale cărei elemente vor fi numite *muchii*. Spre exemplu, reţeaua de căi ferate a României constituie un graf în care vârfurile sunt oraşele, iar muchiile sunt liniile ferate dintre acestea.

Fie $G = (V, M)$ un graf şi $v$ un vârf al lui $G$. Spunem că *$v$ are gradul $n$* şi notăm $d_G(v) = n$ dacă există exact $n$ muchii $m$ ale lui $G$ astfel încât $v \in m$. Spre exemplu, în cazul grafului de mai sus gradul oraşului Iaşi este 3 (Iaşiul este unit prin linii ferate cu exact alte 3 oraşe: Podu Iloaiei - în NV, Ungheni - în SV, Vaslui - în S).

a) Arătaţi că în orice graf $G = (V, M)$ are loc egalitatea $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2|M|$.

b) Arătaţi că în orice graf numărul vârfurilor de grad impar este par.

c) Într-o clasă de elevi unii sunt prieteni, alţii nu. Să se arate că numărul elevilor cu un număr impar de prieteni (în acea clasă) este par.

d) Există 9 segmente în plan astfel încât fiecare dintre ele să intersecteze exact alte 3 segmente, punctele de intersecţie nefiind neapărat distincte?

e) Cei 20 de membri ai unui club de şah au programat un miniturneu în care se vor juca 14 partide, astfel încât fiecare membru să joace cel puţin o dată. Să se arate că în cadrul acestei programări există o submulţime de 6 partide la care participă 12 jucători diferiţi.

**II.** In spaţiul euclidian definim *raportul simplu* a trei puncte coliniare $(A, B; C) = \lambda$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ .

a) Să se arate că $(A, B; C) = \lambda$ dacă şi numai dacă

$$C = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B \ , \ \lambda \neq -1$$

b) Considerăm $A_1, A_2, A_3$ trei puncte distincte, necoliniare şi $B_1, B_2 B_3$ astfel încât $(A_1, A_2; B_1) = \lambda_1$ , $(A_2, A_3; B_2) = \lambda_2$ , $(A_3, A_1; B_3) = \lambda_3$ , $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq -1$ .

Să se arate că $B_1, B_2 B_3$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$ .

c) Considerăm $A_1, A_2, A_3, A_4$ patru puncte necoplanare şi $\{B_i\}_{i=\overline{1,4}}$ astfel încât $(A_1, A_2; B_1) = \lambda_1$ , $(A_2, A_3; B_2) = \lambda_2$ , $(A_3, A_4; B_3) = \lambda_3$ , $(A_4, A_1; B_4) = \lambda_4$ ; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq -1$ .

Să se arate că $\{B_i\}_{i=\overline{1,4}}$ sunt coplanare dacă şi numai dacă $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1$.

d) Să se formuleze o generalizare pentru aceste rezultate.