Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa a II-a

Clasa a XI-a

I. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătratice de ordin doi cu elemente reale, iar pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}$ notăm cu $tr(A)$ urma sa (*the trace of* A), care prin definiţie înseamnă suma elementelor de pe diagonala principală, şi notăm cu $det(A)$ determinantul ei. Mai precis, pentru

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avem $tr(A) = a + d$ şi $det(A) = ad - bc$. Matricea nulă o vom nota cu O iar matricea unitate cu I.

1. Fie $\mathcal{M}_1$ mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ care verifică egalitatea

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I = O,$$

numită *identitatea Hamilton-Cayley* pentru matricele de ordin 2. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}.$$

2. Fie $\mathcal{M}_2$ mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ pentru care $A^2 = I$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_2 = \{I, -I\} \cup \{A \in \mathcal{M} |\ tr(A) = 0, det(A) = -1\}.$$

3. Fie $\mathcal{M}_3$ mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ pentru care $A^3 = I$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_3 = \{I\} \cup \{A \in \mathcal{M} |\ tr(A) = -1, det(A) = 1\}.$$

4. Fie $\mathcal{M}_4$ mulţimea matricelor *nilpotente*, adică mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ pentru care există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^n = O$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_4 = \{A \in \mathcal{M} |\ tr(A) = 0, det(A) = 0\}.$$

5. Fie $\mathcal{M}_5$ mulţimea *divizorilor lui zero la stânga*, adică mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ pentru care există o matrice nenulă $B \in \mathcal{M}$, $B \neq O$, astfel încât $AB = O$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_5 = \{A \in \mathcal{M} |\ det(A) = 0\}.$$

6. Fie $\mathcal{M}_6$ mulţimea matricilor pentru care este permisă *simplificarea la stânga*, adică mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ cu proprietatea că din $AX = AY$ rezultă $X = Y$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_6 = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_5.$$

7. Fie $\mathcal{M}_7$ mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}$ pentru care în şirul puterilor sale

$$A, A^2, \ldots, A^n, \ldots,$$

există cel mult trei valori distincte. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_7 = \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \{A \in \mathcal{M}_5 |\ tr(A) = 1 \text{ sau } tr(A) = -1\}.$$

8. Fie $\mathcal{M}_8$ mulţimea *comutorilor* lui $\mathcal{M}$, adică mulţimea matricilor $A \in \mathcal{M}$ cu proprietatea că $XA = AX$ pentru orice $X \in \mathcal{M}$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_8 = \{A \in \mathcal{M} |\ \text{ există } \lambda \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } A = \lambda I\}.$$

9. Fie $\mathcal{M}_9$ mulţimea matricilor $A \in \mathcal{M}$ cu proprietatea că din $XA = AY$ rezultă $X = Y$. Arătaţi că

$$\mathcal{M}_9 = \mathcal{M}_8 \setminus \{O\}.$$

II. Chestiunile care urmează propun o introducere în compararea vitezei de convergenţă a şirurilor.

Cunoaşterea vitezei de convergenţă se poate dovedi importantă atunci când utilizăm calculatorul. Cu cât un şir converge mai repede, cu atât vor fi necesare mai puţine calcule pentru a afla limita cu o precizie dată.

Fie (x_n) , (y_n) şiruri convergente la 0. Vom spune că şirul (x_n) converge *mai repede* decât (y_n) dacă

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Vom spune că şirurile (x_n) şi (y_n) converg la fel de repede dacă

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right| = 1$$

1. (i) Fie $a \in (-1,1)$ iar $k \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că şirul (a^n) converge mai repede decât $(\frac{1}{n^k})$.

(ii) Fie $a \in (-1,1)$. Demonstraţi că şirul $(\frac{1}{n!})$ converge mai repede decât (a^n) .

(iii) Demonstraţi că şirul $(\frac{1}{n^n})$ converge mai repede decât $(\frac{1}{n!})$ dar şirul $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ converge la fel de repede ca $\frac{e}{n}$.

2. (i) Demonstraţi că şirul

$$\frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} + \ldots + \frac{1}{C_n^{n-1}}$$

are limita 0 şi converge la fel de repede ca şirul $(\frac{2}{n})$.

(ii) Fie şirul

$$x_n := 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Demonstraţi că (x_n) este un şir monoton crescător şi majorat, deci are o limită, pe care o notăm L .

Observaţie. Se ştie că $L = \frac{\pi^2}{6}$.

Demonstraţi că şirul $(L - x_n)$ converge la fel de repede ca $(\frac{1}{n})$.

(iii) Demonstraţi că şirul

$$y_n := 1 + \frac{1}{1^2.2} + \frac{1}{2^2.3} + \ldots + \frac{1}{n^2(n+1)}$$

are aceeaşi limită L, dar $(L - y_n)$ converge mai repede decât $(L - x_n)$.

3. Fie (x_n) un şir cu termeni pozitivi, având limita 0. Notăm

$$s_n := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

(i) Dacă se presupune că (x_n) converge la fel de repede ca $(\frac{1}{n^2})$, atunci şirul (s_n) este convergent.

(ii) Dacă se presupune că (x_n) converge la fel de repede ca $(\frac{1}{n})$, atunci şirul (s_n) are limita $+\infty$.