Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa a II-a

Clasa a XII-a

I. Pentru grupurile finite are loc următorul rezultat, cunoscut sub numele de *teorema lui Lagrange*: "Fie G un grup finit de ordin n. Atunci ordinul oricărui subgrup al lui G este divizor al lui n."

În cele ce urmează vom spune că un grup finit G de ordin n este un *CLT-grup* dacă acesta satisface reciproca teoremei lui Lagrange, adică, pentru orice divizor d al lui n, G are cel puţin un subgrup de ordin d.

a) Arătaţi că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un CLT-grup.

b) Daţi exemplu de un CLT-grup neabelian.

c) Daţi exemplu de un număr natural $n \geq 10$ astfel încât orice grup de ordin n este CLT-grup.

d) Arătaţi că grupul altern A_4 nu este un CLT-grup.

e) Dat un număr natural impar n, construiţi un grup de ordin $12n$ care nu este un CLT-grup.

II. a) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a, b]$.

Să se arate că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ dacă şi numai dacă $f(x) = 0$, pentru orice $x \in [a, b]$.

b) Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue neidentic nule. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Să se arate că egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = \lambda \cdot g$.

Indicaţie. Notăm $A = \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx > 0, B = \int_a^b f(x)g(x)dx, C = \int_a^b g^2(x)dx > 0$ şi

observăm că, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}, A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0$.
Dacă $B^2 = AC$, atunci există $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ unic astfel incât $\int_a^b [f(x) + g(x)\lambda_0]^2 dx = 0$, ceea ce conduce la $f(x) = -\lambda_0 g(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Observaţie. Inegalitatea de la punctul 2) este un caz particular al inegalităţii lui Hölder; se mai întâlneşte şi sub numele de inegalitatea lui Cauchy.

Fie $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivată continuă pe $[0, \pi]$ astfel încât $f(0) = f(\pi) = 0$.

c) Să se arate că:

(i) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot f^2(x) = (f'(0))^2$.

(ii) $\lim\limits_{x \nearrow \pi} \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot f^2(x) = (f'(\pi))^2$.

(iii) $\lim\limits_{x \searrow 0} (\mathrm{ctg} x) \cdot (f^2(x))' = 2(f'(0))^2$.

(iv) $\lim\limits_{x \nearrow \pi} (\mathrm{ctg} x) \cdot (f^2(x))' = 2(f'(\pi))^2$.

d) Folosind metoda integrării prin părţi să se arate că

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot f^2(x) dx = 2 \int_0^\pi \mathrm{ctg} x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx.$$

Observaţie. In baza punctului precedent, funcţiile de sub integrale se prelungesc prin continuitate în punctele 0 şi π.

e) Folosind inegalitatea lui Hölder şi inegalitatea $2mn \leq m^2 + n^2$, să se demonstreze că

$$\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi f'^2(x) dx.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c \cdot \sin x$, oricare ar fi $x \in [0, \pi]$.

Observaţie. Inegalitatea de la 3). se numeşte inegalitatea lui Wirtinger.

f) Să se arate că, oricare ar fi $\alpha \geq 2$,

$$\frac{\displaystyle\int_0^\pi \sin^\alpha x dx}{\displaystyle\int_0^\pi \sin^{\alpha-2} x dx} \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4}.$$

Indicaţie. Se va utiliza inegalitatea lui Wirtinger cu funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\sqrt{\sin x}\right)^\alpha$.