Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a X-a, Geometrie

Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii periodice, de perioade principale $T_1$, respectiv $T_2$. Considerăm funcţia $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin $z(t) = f(t) + i\ g(t)$.

(a) Să se studieze periodicitatea funcţiei $z$.

(b) Să se determine perioada principală a funcţiei $z$ când $f(t) = \sin\left(\frac{2t}{5}\right)$ şi $g(t) = \cos\left(\frac{4t}{15}\right)$.

(c) Fie $p, q \in \mathbb{Z}$. Definim funcţia $z_{p,q} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, prin $z_{p,q}(t) = \cos(pt) + i\ \sin(qt)$. Să se verifice că $z_{p,q}$ este periodică şi să se determine perioada principală. Să se arate că $z_{1,2}(\mathbb{R}) = z_{2,4}(\mathbb{R})$.

(d) Pentru $f(t) = \{t\}$ şi $g(t) = \cos(t)$ este evident că $z$ ia valori în dreptunghiul $[0, 1) \times [-1, 1]$. Am notat cu $\{t\}$ partea fracţionară a lui $t$ şi am identificat $\mathbb{C}$ cu planul complex. Să se descrie $z([0, 2\pi])$.