Facultatea de Matematică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza, Iaşi
Concurs "Gaudeamus" 2013/2014, Etapa I

Clasa a XI-a, Geometrie

Date trei puncte necoliniare A, B, C vom nota cu π planul determinat de acestea. Se ştie că pentru orice punct $M \in \pi$ există şi sunt unice numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 1$, astfel încât pentru orice punct $O \in \pi$ să avem

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}. \tag{1}$$

Observaţie. Numerele x, y, z se numesc coordonatele baricentrice ale punctului M relativ la cele trei puncte necoliniare fixate A, B, C. Aceste numere nu depind de alegerea punctului O, ceea ce ne permite să rescriem relaţia (1) astfel

$$M = xA + yB + zC. \tag{2}$$

Exemplu. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ dacă şi numai coordonatele sale baricentrice sunt $(1/2, 1/2, 0)$, ceea ce este echivalent cu

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$$

Fie P_n un şir de puncte din planul π. Vom nota cu x_n, y_n, z_n coordonatele baricentrice ale punctului P_n, relativ la punctele necoliniare A, B, C, ceea ce înseamnă că avem

$$P_n = x_nA + y_nB + z_nC, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vom spune că şirul de puncte P_n este convergent la punctul $P \in \pi$ şi scriem $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, dacă şirurile numerice x_n, y_n, z_n sunt convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, iar punctul P este dat de

$$P = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)A + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)B + \left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)C = xA + yB + zC.$$

1. În triunghiul $A_0B_0C_0$, vom nota cu A_1 mijlocul segmentului $[B_0C_0]$, B_1 mijlocul segmentului $[C_0A_0]$ şi C_1 mijlocul segmentului $[A_0B_0]$. Continuăm procedeul şi notăm cu A_2, B_2 şi respectiv C_2 mijloacele segmentelor $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$ şi $[A_1B_1]$. Pentru un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota cu A_n, B_n şi respectiv C_n mijloacele segmentelor $[B_{n-1}C_{n-1}]$, $[C_{n-1}A_{n-1}]$ şi $[A_{n-1}B_{n-1}]$.

a) Demonstraţi că centrul de greutate al triunghiului $A_0B_0C_0$ are coordonatele baricentrice $(1/3, 1/3, 1/3)$, relativ la punctele necoliniare A_0, B_0, C_0.

b) Determinaţi coordonatele baricentrice ale punctelor A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, relativ la punctele necoliniare A_0, B_0, C_0.

c) Se consideră matricele

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $S^{-1}AS$ şi A^n.

d) Determinaţi coordonatele baricentrice ale punctelor A_n, B_n, C_n. Arătaţi că triunghiurile $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, ..., $A_nB_nC_n$ au acelaşi centru de greutate.

e) Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului $A_0B_0C_0$ avem că $\overrightarrow{A_0G} = 2\overrightarrow{GA_1}$. Arătaţi că această relaţie este echivalentă cu

$$A_1 = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}A_0.$$

Folosiţi faptul că G este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$ şi deduceţi relaţia

$$A_2 = \frac{3}{2^2}G + \frac{1}{2^2}A_0.$$

Obţineţi relaţii asemănătoare pentru A_n, B_n şi C_n.

f) Să se arate că şirurile de puncte A_n, B_n şi respectiv C_n sunt convergente. Determinaţi limita lor.

g) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota $s_n = \text{Aria}[A_nB_nC_n]$, $p_n = \text{Perimetrul}[A_nB_nC_n]$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n/p_n^2$.

h) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $\mathcal{C}(O_n, R_n)$ cercul circumscris triungiului $A_nB_nC_n$. Observăm că pentru $n \in \mathbb{N}^*$, cercul $\mathcal{C}(O_n, R_n)$ coincide cu cercul lui Euler corespunzător triungiului $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$.

i) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ vom nota cu D_n, E_n, F_n picioarele înălţimilor triunghiului $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.

2. Fie A_0, B_0, C_0, D_0 patru puncte necoplanare. Vom nota cu A_1, B_1, C_1, D_1 centrele de greutate ale feţelor $B_0C_0D_0$, $C_0D_0A_0$, $D_0A_0B_0$ şi respectiv $A_0B_0C_0$. Continuând procedeul, notăm cu A_n, B_n, C_n, D_n centrele de greutate ale feţelor $B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}A_{n-1}$,

$D_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}$ şi respectiv $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Extindeţi proprietăţile studiate la problema anterioară în noul context şi arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} D_n = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{4}D_0.$$

Sugestii.

a) Arătaţi că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1}A_n$, $B_{n-1}B_n$, $C_{n-1}C_n$ şi $D_{n-1}D_n$ sunt concurente în acelaşi punct G. Punctul G este centrul de greutate al tetraedrului $A_0B_0C_0D_0$ şi este definit de relaţia

$$G = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{4}D_0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MB_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MD_0}, \forall M.$$

b) Deoarece G este centrul de greutate al tetraedrului $A_0B_0C_0D_0$ avem că $\overrightarrow{A_0G} = 3\overrightarrow{GA_1}$. Arătaţi că această relaţie este echivalentă cu

$$A_1 = \frac{4}{3}G - \frac{1}{3}A_0.$$

Folosiţi faptul că G este centru de greutate al tetraedrului $A_1B_1C_1D_1$ şi deduceţi relaţia

$$A_2 = \frac{8}{3^2}G + \frac{1}{3^2}A_0.$$

Obţineţi relaţii asemănătoare pentru A_n, B_n, C_n şi D_n.