SOLUTII

CLASA A X-A

Problem 1. Demonstrati ca:

(1) $ker\ f$ este relatie de echivalenta
(2) f este functie injectiva daca si numai daca $ker\ f = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Proof. 1. Se verifica usor, tinand cont ca relatia de egalitate este o echivalenta.

2. $(a,a') \in ker\ f \Leftrightarrow f(a) = f(a')$, si, din injectivitate, $a = a'$, de unde$ker\ f \subseteq \{(a,a) \mid a \in A\}$. Cealalta incluziune este deja demonstrata, cand am aratat ca nucleul este relatie de echivalenta. □

Problem 2. Fie $C_R(a) = \{a' \in A \mid (a,a') \in R\}$, unde R este o relatie de echivalenta pe A .$C_R(a)$ se numeste *clasa de echivalenta a lui a relativ la R*. Atunci:

(1) $a \in C_R(a), (\forall) a \in A$;
(2) $C_R(a_1) = C_R(a_2) \Leftrightarrow (a_1,a_2) \in R$;
(3) $(a_1,a_2) \notin R \Leftrightarrow C_R(a_1) \cap C_R(a_2) = \emptyset$;
(4) $\bigcup_{a \in A} C_R(a) = A$.

Proof. **1.** Este evidenta din reflexivitate. Este important totusi sa o mentionam intrucat ne indica faptul ca orice clasa de echivalenta este nevida.

2. " $\Rightarrow$: " Deoarece $C_R(a_1) = C_R(a_2)$, conform 1., avem ca $C_R(a_1) \ni a_2 \Leftrightarrow (a_1,a_2) \in R$.

" $\Leftarrow$: " Stim ca $(a_1,a_2) \in R$. Fie $a \in C_R(a_1) \Rightarrow (a,a_1) \in R$. Din tranzitivitate rezulta ca $(a,a_2) \in R$, deci $a \in C_R(a_2)$, de unde obtinem $C_R(a_1) \subseteq C_R(a_2)$. In mod analog se demonstreaza cealalta incluziune, $C_R(a_1) \supseteq C_R(a_2)$.

3. " $\Rightarrow$: "Fie $(a_1,a_2) \notin R$. Sa presupunem, prin reducere la absurd, ca $C_R(a_1) \cap C_R(a_2) \neq \emptyset$. Fie $a \in C_R(a_1) \cap C_R(a_2)$. De aici rezulta ca $(a_1,a) \in R$ si $(a,a_2) \in R$, deci $(a_1,a_2) \in R$, contradictie!

" $\Leftarrow$: " Deoarece $C_R(a_1) \cap C_R(a_2) = \emptyset$, rezulta ca $C_R(a_1) \neq C_R(a_2)$ si, conform punctului anterior, $(a_1,a_2) \notin R$.

4. Rezulta imediat din modul de definire al claselor de echivalenta si din punctul 1. □

Problem 3. Fie A o multime si $R \subseteq A \times A$ o relatie de echivalenta pe A. Aratati ca exista o functie surjectiva $f : A \to B$, astfel incat $ker\ f = R$.

Proof. Definitia data inaintea acestei probleme ne ofera ideea considerarii multimii factor A/R pe post de B. Functia $f : A \to (A/R)$, definita prin $f(a) = C_R(a), (\forall) a \in A$ este, clar, o functie surjectiva. Mai mult, din sirul de echivalente $(a,a') \in ker\ f \Leftrightarrow f(a) = f(a') \Leftrightarrow C_R(a) = C_R(a') \Leftrightarrow (a,a') \in R$, obtinem ca $ker\ f = R$. □

Problem 4. Fie $f : A \to B$ o functie. Atunci exista multimile A_1si B_1, exista functiile $f_1 : A \to A_1$ surjectiva, $f_2 : A_1 \to B_1$ bijectiva, $f_3 : B_1 \to B$ injectiva, astfel incat $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Proof. Ca si in problema precedenta, notiunile si rezultatele discutate pana acum ne ofera ideile rezolvarii problemei. Avand in vedere ca prima functie solicitata este surjectiva, vom considera $A_1 = A/(ker\ f)$. Vom nota clasa de echivalenta a lui $a \in A$ relativ la $ker\ f$ prin $K(a)$, intrucat nu exista pericol de confuzie.

Asadar, $f_1 : A \to (A/ker\ f)$ este definita prin $f_1(a) = K(a), (\forall)a \in A$, si este o functie surjectiva.

Pe de alta parte, cea mai simpla metoda de a obtine o functie injectiva, este de a considera incluziunea de la o submultime a unei multimi la intreaga multime, deci, teoretic, $B_1 \subseteq B$. Singura submultime a lui B legata, in mod evident, de functia data f este imaginea functiei $Im\, f$, si, pana una alta, putem considera $B_1 = Im\ f$ si $f_3 : Im\ f \to B, f_3(b) = b, (\forall)b \in Im\ f$.

Ramane sa definim o bijectie $f_2 : (A/kerf) \to Imf$. Fie $f_2(K(a)) = f(a), (\forall)K(a) \in A/ker\ f$.

Sa demonstram mai intai ca definitia este buna, cu alte cuvinte nu depinde de reprezentantii pe care ii luam pentru clasele de echivalenta. Acest lucru este necesar intrucat argumentele functiei f_2 sunt clase de echivalenta, deci multimi! Fie $K(a') = K(a) \Leftrightarrow (a', a) \in ker\ f \Leftrightarrow f(a') = f(a) \Leftrightarrow f_2(K(a')) = f_2(K(a))$. Din acest sir de echivalente ne rezulta doua lucruri: mergand de la stanga la dreapta avem **buna definire** a lui f_2 si daca urmarim implicatiile de la dreapta la stanga avem **injectivitatea** lui f_2.

Surjectivitatea lui f_2 este usor de probat: Pentru $b \in Im\ f$ oarecare, $(\exists)a \in A$ astfel incat $f(a) = b \Rightarrow f_2(K(a) = b)$.

Ultimul lucru de verificat este descompunerea:

$(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(a) = (f_3 \circ f_2)(f_1(a)) = (f_3 \circ f_2)(K(a)) = f_3(f_2(K(a))) = f_3(f(a)) = f(a), (\forall)a \in A$. □

Cazuri particulare:

Problem 5. Determinati A_1, B_1, f_1, f_2, f_3(care satisfac problema 4) pentru urmatoarele functii particulare:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\ x$;
(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x)$ este restul impartirii lui x la n unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un numar natural fixat.

Proof. Vom indica, in cele ce urmeaza, numai $ker\ f$ si $A/ker\ f$, retul elementelor cerute fiind clare.

1. $ker\ f = \{(x, x')|f(x) = f(x')\} = \{(x, -x)|x \in \mathbb{R}\}$. Este clar ca $K(x) = \{x, -x\}$.

2. $ker\ f = \{(x, x')|[x] = [x']\}$. Asadar, intr-o clasa de echivalenta vor fi toate numerele reale care au aceeasi parte intreaga. Este normal sa consideram drept reprezentanti pentru clase, numerele intregi. Astfel, $K(n) = [n, n + 1), (\forall)n \in \mathbb{Z}$, deci $\mathbb{R}/(ker\ f) = \{[n, n + 1)|n \in \mathbb{Z}\}$.

3. $ker\ f = \{(x, x')|\sin\ x = \sin\ x'\}$. Asadar, intr-o clasa de echivalenta vor fi toate numerele reale care difera printr-un multiplu intreg de 2π. Astfel, $K(x) = \{x + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, deci $\mathbb{R}/(ker\ f) = \{K(x)|x \in [-\pi, \pi]\}$.

4. Este clar ca $(x, x') \in ker\ f \Leftrightarrow n/(x - x') \Leftrightarrow x \equiv x'(mod\, n)$. Deoarece intr-o clasa de echivalenta avem toate numerele intregi care dau acelasi rest la impartirea prin n, si avem numai n resturi posibile (1, 2, 3, ..., $n - 1$), vom avea numai n clase de echivalenta, deci multimea cat este finita. Asadar: $K(x) = \{x + kn|k \in \mathbb{Z}\}$ iar $\mathbb{R}/(ker\ f) = \{K(0), K(1), ..., K(n - 1)\}$ □