a) Fie $u \in M$ astfel încât există $v, w \in M$ cu $vu = e$ şi $uw = e$. Înmulţind prima egalitate la dreapta cu w, obţinem

$$v = ve = v(uw) = (vu)w = ew = w.$$

b) Fie $u \in M$. Atunci există $v \in M$ astfel încât $vu = e$. Aplicând proprietatea pentru v, avem că există $w \in M$ astfel încât $wv = e$. Atunci

$$w = we = w(vu) = (wv)u = eu = u,$$

deci $uv = e$ (adică v este invers şi la dreapta al lui u).

c) Presupunem că pentru $u \in M$ există $v_1, v_2 \in M$ astfel încât $v_1 \neq v_2$ şi $v_1 u = v_2 u = e$. Dacă, prin absurd, u ar avea un invers la dreapta w, atunci s-ar obţine

$$v_1 = v_1 e = v_1(uw) = (v_1 u)w = (v_2 u)w = v_2(uw) = v_2 e = v_2,$$

o contradicţie.

d) Fie M un monoid finit şi $u \in M$ astfel încât există $v \in M$ cu $vu = e$. Presupunem prin absurd că $uw \neq e, \forall\, w \in M$. Atunci funcţia $f : M \to M$, $f(x) = ux, \forall\, x \in M$, nu este surjectivă. Cum M este finit, deducem că f nu este nici injectivă, deci există $x_1, x_2 \in M$ astfel încât $x_1 \neq x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $ux_1 = ux_2$, de unde, prin înmulţire la stânga cu v, obţinem $x_1 = x_2$, o contradicţie.

e) Fie $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ monoidul funcţiilor $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ relativ la compunere şi $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $u(n) = n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci u are o infinitate de inverse la stânga, anume orice funcţie $v \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ definită prin $v(0) = a \in \mathbb{N}$ şi $v(n) = n - 1, \forall\, n \geq 1$, dar nu are inverse la dreapta conform punctului c).

f) Fie $\mathcal{F}_c(\mathbb{N})$ monoidul funcţiilor crescătoare $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ relativ la compunere şi $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{N})$, $u(n) = n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci u are un unic invers la stânga, anume funcţia $v \in \mathcal{F}_c(\mathbb{N})$ definită prin $v(0) = 0$ şi $v(n) = n - 1, \forall\, n \geq 1$, dar nu are inverse la dreapta (în caz contrar u ar fi inversabilă, deci bijectivă, o contradicţie). ∎