# Florescu Liviu, cl. XI Solutie

1). Se observă întâi că şirurile au termeni strict pozitivi.

$$\sqrt[3]{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}} = \frac{\left(\dfrac{x_n + y_n + y_n}{3}\right)}{\sqrt[3]{x_n y_n y_n}} > 1.$$

Rezultă că $x_{n+1} < y_{n+1}$ (demonstraţia se poate face şi prin evaluarea diferenţei $y_{n+1} - x_{n+1}$).
$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{9y_n^2}{(x_n+2y_n)^2} > 1$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_n+2y_n}{3y_n} < 1$.
2). Fie $l = \lim_n x_n \leq \lim_n y_n = L$; atunci $L = \frac{l+2L}{3}$ de unde $L = l$.
3). $x_{n+1} \cdot y_{n+1}^2 = x_n \cdot y_n^2 = \cdots = x \cdot y^2$; trecând la limită, obţinem $L^3 = x \cdot y^2$.
4). Prin calcul direct se obţine

$$y_n - x_n = \frac{(y_{n-1} - x_{n-1})^2 (x_n + 8y_n)}{3(x_{n-1} + 2y_{n-1})^2} < \frac{y}{3x^2} \cdot (y_{n-1} - x_{n-1})^2$$

$$y_{n-1} - x_{n-1} < \frac{y}{3x^2}(y_{n-2} - x_{n-2})^2 \Longrightarrow y_n - x_n < \frac{y}{3x^2}\left(\frac{y}{3x^2}\right)^2 \cdot (y_{n-2} - x_{n-2})^{2^2}$$

ş.a.m.d.

$$y_n - x_n < \left(\frac{y}{3x^2}\right)^{1+2+\cdots+2^{n-1}} \cdot (y-x)^{2^n} = (y-x) \cdot \left[\frac{y(y-x)}{3x^2}\right]^{2^n - 1}.$$

5). $y_n - \sqrt[3]{6} < y_n - x_n < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^{2^n - 1}$.
6). Se observă că pentru $n = 2$, $y_2 - \sqrt[3]{6} < \frac{1}{100}$.
Se calculează $x_1 = \frac{216}{121}, y_1 = \frac{11}{6}$, de unde $y_2 = \frac{1979}{1089} \approx 1,81$.