Florescu Liviu, cl. XII Solutie

I.1). $\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}$.

$0 < \dfrac{x_1+x_2}{2} < \pi \Longrightarrow \sin\dfrac{x_1+x_2}{2} > 0, \cos\dfrac{x_1-x_2}{2} \le 1$

$\Longrightarrow \sin x_1 + \sin x_2 \le 2\cdot\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Egalitatea $\Longleftrightarrow \cos\dfrac{x_1-x_2}{2} = 1 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \left(-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_1-x_2}{2} < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2). Verificarea pt. $n = 2$ s-a făcut la punctul precedent.

Presupunem că, pentru orice $x_1, \cdots, x_n \in]0,\pi[, \sin x_1 + \cdots + \sin x_n \le n\cdot\sin\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ şi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = \cdots = x_n$.

Fie $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} \in]0,\pi[$ şi fie funcţia $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}, f(x) = \sin x_1 + \cdots + \sin x_n + \sin x - (n+1)\cdot\sin\frac{x_1+\cdots+x_n+x}{n+1}, \forall x \in]0,\pi[$.

$f'(x) = \cos x - \cos\frac{x_1+\cdots+x_n+x}{n+1}$; $x, \frac{x_1+\cdots+x_n+x}{n+1} \in]0,\pi[$.

Deoarece funcţia "cos" este strict descrescătoare pe $]0,\pi[$ rezultă următorul tabel de variaţie pentru f:

x	0		$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$	$\searrow$	

$f\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) = \sin x_1 + \cdots + \sin x_n - n\cdot\sin\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le 0$ (din ipoteza inductivă). Deci $f(x) \le 0, \forall x \in]0,\pi[$, de unde $f(x_{n+1}) \le 0$.

Egalitatea $\Longleftrightarrow f(x_{n+1}) = 0 \Longleftrightarrow x_{n+1} = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ şi $\sin x_1 + \cdots + \sin x_n = n\cdot\sin\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Din ipoteza inductivă rezultă $x_1 = \cdots = x_n$ şi deci $x_{n+1} = x_1 = \cdots = x_n$.

II. 1). Fie funcţia $g :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \sin x + (n-1)\cdot\sin\frac{x}{n-1}$.

$g'(x) = \cos x + \cos \frac{x}{n-1} = 2 \cdot \cos \frac{nx}{2(n-1)} \cdot \cos \frac{(n-2)x}{2(n-1)}$. Semnul derivatei este dat de $\cos \frac{nx}{2(n-1)}$; rezultă următorul tabel de variaţie:

x	0		$\frac{n-1}{n}\pi$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$	$\searrow$	

Egalitatea $\Longleftrightarrow x = \frac{n-1}{n} \cdot \pi$.

2). $|A_1A_2| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \cdots, |A_{n-1}A_n| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{2}$ iar $|A_nA_1| = 2 \cdot \sin \frac{\alpha_n - \alpha_1}{2}$ de unde rezultă formula pentru perimetrul lui P.

Fie $x_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \cdots, x_{n-1} = \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{2}$; rezultă că $\frac{\alpha_n - \alpha_1}{2} = x_1 + \cdots + x_{n-1} = x$. Utilizând I. 2), $\Pi(P) \leq 2[(n-1) \cdot \sin \frac{x}{n-1} + \sin x]$ şi din II. 1), $\Pi(P) \leq 2n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$.

$\Pi(P) = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_{n-1}$ şi $x = \frac{n-1}{n} \cdot \pi \Longleftrightarrow \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{2\pi}{n}, \forall k = 1, \cdots, n-1 \Longleftrightarrow P$ este poligon regulat.

III. 1) este imediată.

2). Din punctul precedent rezultă că $\Pi(P) \leq 2\pi, \forall P \in \mathcal{P}$.

3). Rezultă că $\sup_{P \in \mathcal{P}} \Pi(P) \leq 2\pi$. Poligoanele regulate cu n laturi au perimetrul $2n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ şi, deoarece $2n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \to 2\pi$, rezultă că $\sup_{P \in \mathcal{P}} \Pi(P) = 2\pi$.