Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi BD, CE bisectoarele sale ($D \in AC$, $E \in AB$). Se notează cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F, G, respectiv P, proiecţiile punctelor D, E şi A pe dreapta BC.

a) Să se arate că AF este bisectoarea unghiului CAP.
b) Să se demonstreze că I este centrul cercului circumscris triunghiului AFG.
c) Să se determine măsura unghiului FIG.
d) Dacă triunghiul ABC este unul oarecare, să se arate că există două puncte, F şi G, situate pe dreapta BC, astfel încât $m(\sphericalangle DFB) = m(\sphericalangle EGC) = m(\sphericalangle BAC)$ şi, apoi, să se determine măsura unghiului FIG, în funcţie de măsura unghiului BAC.

Soluţie.

a) Cum BD este bisectoarea unghiului ABC, rezultă că $DA = DF$. Din relaţiile $\sphericalangle DFA = \sphericalangle PAF$ (pentru că $DF \parallel AP$) şi $\sphericalangle DFA = \sphericalangle DAF$ (căci $DA = DF$), rezultă că $\sphericalangle PAF = \sphericalangle DAF$. Deci, AF este bisectoarea unghiului CAP.
b) Dreapta BD este mediatoarea segmentului AF, iar dreapta CE este mediatoarea segmentului AG.
c) Avem: $\sphericalangle FAG = \sphericalangle PAF + \sphericalangle PAG = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC) = 45^{\circ}$. Deoarece I este centrul cercului circumscris lui AFG, rezultă că $\sphericalangle FIG = 2 \cdot (\sphericalangle FAG) = 90^{\circ}$.
d) Luăm $F = sim_{BD}A$ şi $G = sim_{CE}A$. Punctele F, G aparţin dreptei BC şi $m(\sphericalangle DFB) = m(\sphericalangle EGC) = m(\sphericalangle BAC)$. Deoarece $\sphericalangle FAG = \sphericalangle BAF + \sphericalangle GAC - \sphericalangle BAC = \left(90° - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC)\right) + \left(90° - \frac{1}{2}(\sphericalangle ACB)\right) - \sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle BAC{:}\,2$, rezultă că $\sphericalangle FIG = 2(\sphericalangle FAG) = 180° - \sphericalangle BAC$.