Fie $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii periodice, de perioade principale $T_1$, respectiv $T_2$. Considerăm funcţia $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin $z(t) = f(t) + i\ g(t)$.

(a) Să se studieze periodicitatea funcţiei $z$.

(b) Să se determine perioada principală a funcţiei $z$ când $f(t) = \sin(2t/5)$ şi $g(t) = \cos(4t/15)$.

(c) Fie $p, q \in \mathbb{Z}$. Definim funcţia $z_{p,q} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, prin $z_{p,q}(t) = \cos(pt) + i\ \sin(qt)$. Să se verifice că $z_{p,q}$ este periodică şi să se determine perioada principală. Să se arate că $z_{1,2}(\mathbb{R}) = z_{2,4}(\mathbb{R})$.

(d) Pentru $f(t) = \{t\}$ şi $g(t) = \cos(t)$ este evident că $z$ ia valori în dreptunghiul $[0, 1) \times [-1, 1]$. Am notat cu $\{t\}$ partea fracţionară a lui $t$ şi am identificat $\mathbb{C}$ cu planul complex. Să se descrie $z([0, 2\pi])$.

**Soluţie.**

(a)

Presupunem că $z$ este peridică şi are perioada principală $T$. Atunci $z(t+T) = z(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Identificând partea reală şi cea imaginară, obţinem:

$$f(t+T) = f(t)\ , \quad g(t+T) = g(t)\ , \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

adică $T$ este perioadă atât pentru $f$ cât şi pentru $g$. Rezultă că există două numere întregi $m$ şi $n$ astfel ca $T = nT_1$ şi $T = mT_2$. Deducem aşadar că raportul $\frac{T_1}{T_2}$ este un număr raţional. Prin urmare avem o condiţie necesară pentru ca $z$ să fie periodică.

Pentru suficienţă, presupunem că $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ (fracţie ireductibilă), $m, n \in \mathbb{Z}$.

Atunci $T = nT_1 = mT_2$ este perioadă pentru $z$.

(b)

Avem imediat că $T_1 = 5\pi$ şi $T_2 = 15\pi/2$, de unde rezultă că $T = 15\pi$.

Imaginea prin $z$ a intervalului $[0, 15\pi]$ (de lungime o perioadă principală) este reprezentată in figura de mai jos:

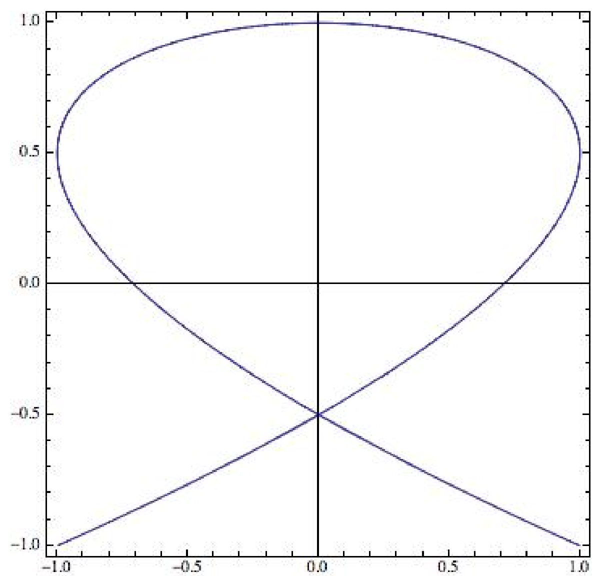


Figure 1: $z([0, 15\pi])$

(c)

Avem $T_1 = \frac{2\pi}{p}$ and $T_2 = \frac{2\pi}{q}$. Deoarece $T_1/T_2$ este număr raţional, avem că $z_{p,q}$ este periodică. Simplificăm fracţia $\frac{p}{q}$ şi obţinem $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ o fracţie ireductibilă. Atunci $T = \tilde{q}T_1$ este perioadă principală pentru funcţia $z_{p,q}$.

Faptul că $z_{1,2}(\mathbb{R}) = z_{2,4}(\mathbb{R})$ rezultă imediat deoarece $1/2 = 2/4$.

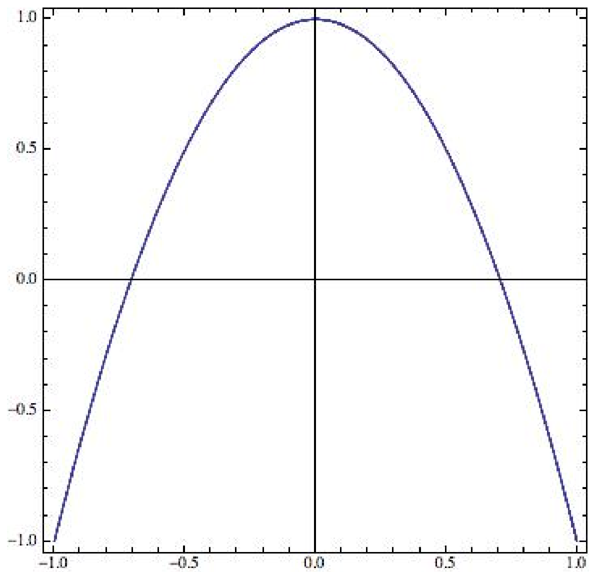


Figure 2: $z_{1,2}(\mathbb{R})$

(d)

Funcţia $f$ este periodică de perioadă principală $T_1 = 1$, iar $g$ de perioadă principală $2\pi$. Raportul lor nu este un număr raţional, deci $z$ nu este periodică.

Imaginea prin $z$ a intervalului $[0, 2\pi]$ se obţine din graficul funcţiei cos : $[0, 2\pi] \longrightarrow [-1, 1]$, translând fiecare segment de sinusoidă corespunzător intervalelor de forma $[k, k+1) \subset [0, 2\pi]$ (în total 6 bucăţi) in intervalul $[0, 1)$. La fel procedăm şi cu ultima porţiune corespunzătoare lui $t \in [6, 2\pi]$. În final obţinem 7 porţiuni de sinusoidă, aşa ca în figura de mai jos:

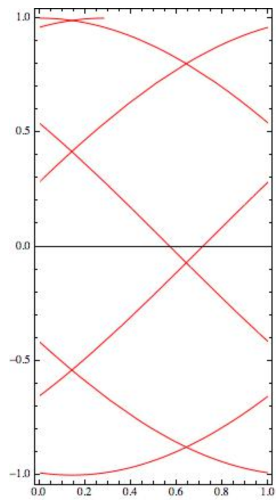

Figure 3: $z([0, 2\pi])$

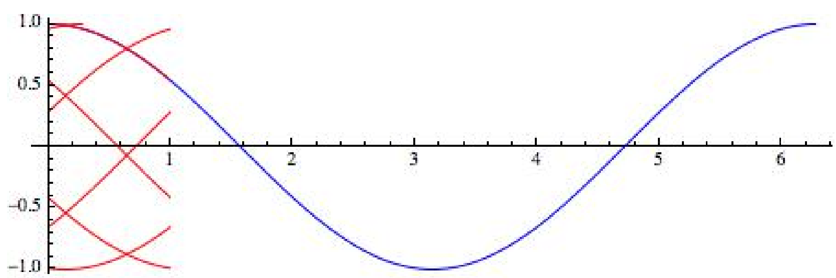

Figure 4: $z([0, 2\pi])$ şi graficul funcţiei cosinus