Soluţie Geometrie. Clasa a XI-a

1.

a) Centrul de greutate G al triunghiului $A_0B_0C_0$ este unicul punct din planul π care satisface relaţia vectorială

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_0} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_0} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC_0},$$

ceea ce poate fi scris sub forma

$$G = \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{3}C_0$$

şi deci G are coordonatele baricentrice $(1/3, 1/3, 1/3)$ relative la punctele necoliniare A_0, B_0, C_0.

b) Deoarece A_1 este mijlocul segmentului $[B_0C_0]$, B_1 mijlocul segmentului $[C_0A_0]$ şi C_1 mijlocul segmentului $[A_0B_0]$, avem că

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}B_0 + \tfrac{1}{2}C_0, \\ B_1 &= \tfrac{1}{2}C_0 + \tfrac{1}{2}A_0, \\ C_1 &= \tfrac{1}{2}A_0 + \tfrac{1}{2}B_0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

În continuare folosind faptul că A_2, B_2 şi respectiv C_2 sunt mijloacele segmentelor $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$ şi $[A_1B_1]$ obţinem

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2^2}B_0 + \frac{1}{2^2}C_0, \\ B_2 &= \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2^2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 + \frac{1}{2^2}C_0, \\ C_2 &= \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}B_1 = \frac{1}{2^2}A_0 + \frac{1}{2^2}B_0 + \frac{1}{2}C_0. \end{aligned}$$

Considerând matricea

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

observăm că putem scrie

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Pentru punctele A_3, B_3, C_3 avem

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{2^2}A_0 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)B_0 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)C_0, \\ B_3 &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)A_0 + \frac{1}{2^2}B_0 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)C_0, \\ C_3 &= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)A_0 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)B_0 + \frac{1}{2^2}C_0. \end{aligned}$$

c) Prin calcul direct se obţine că

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

În consecinţă este foarte uşor de ridicat la puterea n această matrice

$$\left(S^{-1}AS\right)^n = S^{-1}A^nS = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Din formula anterioară se obţine

$$A^n = \frac{1}{3\cdot 2^n}\begin{pmatrix} 2^n + 2\cdot(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2\cdot(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2\cdot(-1)^n \end{pmatrix}$$

d) Avem că

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix},$$

ceea ce înseamnă că

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{3\cdot 2^n}\left\{\left[2^n + 2\cdot(-1)^n\right]A_0 + \left[2^n + (-1)^{n+1}\right]B_0 + \left[2^n + (-1)^{n+1}\right]C_0\right\}, \\
B_n &= \frac{1}{3\cdot 2^n}\left\{\left[2^n + (-1)^{n+1}\right]A_0 + \left[2^n + 2\cdot(-1)^n\right]B_0 + \left[2^n + (-1)^{n+1}\right]C_0\right\}, \\
C_n &= \frac{1}{3\cdot 2^n}\left\{\left[2^n + (-1)^{n+1}\right]A_0 + \left[2^n + (-1)^{n+1}\right]B_0 + \left[2^n + 2\cdot(-1)^n\right]C_0\right\}.
\end{aligned}$$

Folosind formulele anterioare, prin calcul direct, se obţine

$$\frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}B_n + \frac{1}{3}C_n = \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{3}C_0 = G,$$

ceea ce înseamnă că G este centrul de greutate al triunghiului $A_nB_nC_n$.
e) Relaţia vectorială $\overrightarrow{A_0G} = 2\overrightarrow{GA_1}$ poate fi scrisă $2\overrightarrow{OA_1} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA_0}$, ceea ce este echivalent cu

$$A_1 = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}A_0.$$

Analog avem

$$A_2 = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}A_1 = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}G - \frac{1}{2}A_0\right) = \frac{3}{2^2}G + \frac{1}{2^2}A_0.$$

Se poate arăta (folosind eventual inducţia) că

$$\begin{aligned}
A_n &= \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{3}{2^n}\right)G + \frac{(-1)^n}{2^n}A_0, \\
B_n &= \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{3}{2^n}\right)G + \frac{(-1)^n}{2^n}B_0, \\
C_n &= \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{3}{2^n}\right)G + \frac{(-1)^n}{2^n}C_0,
\end{aligned}$$

f) Folosind oricare din cele două exprimări pentru şirurile A_n, B_n şi respectiv C_n se obţine că acestea sunt convergente şi

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{3}C_0 = G.$$

g) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ avem că $4 \cdot \text{Aria}[A_nB_nC_n] = \text{Aria}[A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}]$ şi $2 \cdot \text{Perimetrul}[A_nB_nC_n] = \text{Perimetrul}[A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}]$. Se obţine atunci că $s_n = s_0/4^n$, $p_n = p_0/2^n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} p_n = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} s_n/p_n^2 = s_0/p_0^2$.
h) Folosind eventual formula pentru raza cercului circumscris unui triunghi ($R = abc/4S$) se obţine că $R_n = R_{n-1}/2$ şi deci $R_n = R_0/2^n$. În consecinţă $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Deoarece G este punct interior tuturor cercurilor $\mathcal{C}(O_n, R_n)$ şi la limită acestea se reduc la un punct, se obţine că $\lim_{n\to\infty} O_n = G$.
i) Punctele D_n, E_n, F_n aparţin cercului $\mathcal{C}(O_n, R_n)$. Deoarece la limită aceste cercuri se reduc la un punct, G, se obţine că $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} F_n = G$.

2.
a) Considerăm punctul G (centrul de greutate al tetraedrului $A_0B_0C_0D_0$) definit de
$G = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{4}D_0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MB_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MC_0} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MD_0}, \forall M.$
Se arată că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1}A_n$, $B_{n-1}B_n$, $C_{n-1}C_n$ şi $D_{n-1}D_n$ sunt concurente în acelaşi punct G.
b) Deoarece G este centrul de greutate al tetraedrului $A_0B_0C_0D_0$ avem că $\overrightarrow{A_0G} = 3\overrightarrow{GA_1}$. Această relaţie este echivalentă cu

$$A_1 = \frac{4}{3}G - \frac{1}{3}A_0.$$

G este centru de greutate al tetraedrului $A_1B_1C_1D_1$, de unde obţinem relaţia

$$A_2 = \frac{8}{3^2}G + \frac{1}{3^2}A_0.$$

Pentru A_n se obţine (folosind eventual inducţia)

$$A_n = \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3^2} + \cdots + (-1)^n\frac{4}{3^n}\right)G + \frac{(-1)^n}{3^n}A_0.$$

de unde prin trecere la limită avem $\lim_{n\to\infty} A_n = G$. Cu raţionamente asemănătoare, se obţine aceeaşi limită şi pentru şirurile B_n, C_n şi D_n.