Geometric structures for differential equations fields

Habilitation thesis

Ioan Bucataru

Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi,
May, 2012

This Habilitation thesis is bassed on, or was inspired by, the joint work that I have done over the years, or I am doing in present, together with: Mihai Anastasiei (Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi), Peter L. Antonelli (Alberta University, Edmonton), Andrej Bóna (Curtin University of Technology, Perth), Lucía Bua (University of Santiago de Compostela, Santiago de Compostela), Oana A. Contanstinescu (Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi), Matias F. Dahl (Aalto University, Helsinki), Marcelo Epstein (University of Calgary, Calgary), Radu Miron (Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi), Zoltan Muzsnay (University of Debrecen, Debrecen), Modesto Salgado (University of Santiago de Compostela, Santiago de Compostela), Michael A. Slawinski (Memorial University, St. John's) and Solange F. Rutz (Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco). To all of them I want to express my dipest gratitude for their patience, kindness, and love for mathematics that we shared over so many years.

Ioan Bucataru
Faculty of Mathematics
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
email: `bucataru@uaic.ro`
`http://www.math.uaic.ro/~bucataru`

Contents

Rezumat

În ultimele decenii s-a publicat un număr impresionant de lucrări în care se urmăreşte obţinerea unor informaţii calitative despre soluţiile unui sistem (ne-) autonom de ecuaţii diferenţiale ordinare (parţiale) de ordin doi (superior) folosind anumite structuri geometrice asociate. În această teză se urmăreşte dezvoltarea unui cadru geometric unitar, cu un sistem corespunzător de structuri geometrice şi invarianţi geometrici (Capitolele 1 şi 2) care vor permite abordarea următoarelor trei probleme importante (Capitolele 3, 4 şi 5) asociate unui câmp de ecuaţii diferenţiale: simetrii şi variaţia de ordin unu, problema inversă a calculului variaţional, metrizabilitate Finsler şi proiectivă. În ultima secţiune a fiecărui capitol vom arăta cum intenţionăm, în viitor, să extindem subiectele din capitolul respectiv pentru a aborda probleme asemănătoare asociate câmpurilor de ecuaţii diferenţiale ordinare (parţiale) de ordin doi (superior) (ne-) autonome.

Structura tezei este următoarea. În Capitolul 1, vom folosi structura foliată a fibratelor tangente (de jeturi) precum şi formalismul Frölicher-Nijenhuis pentru a obţine un calcul diferenţial vertical. În Capitolul 2, arătăm cum putem utiliza acest calcul diferenţial vertical pentru a obţine un cadru geometric pentru studiul câmpurilor de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin doi (SODE). În următoarele trei capitole, vom folosi acest cadru geometric pentru a studia diverse probleme asociate unui sistem SODE şi vom prezenta cum poate fi extins acest cadru geometric în cazul câmpurilor de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior sau (sau parţiale). În Capitolul 3 vom studia variaţia de ordin unu, câmpurile Jacobi corespunzătoare şi simetriile unui SODE arbitrar. În Capitolul 4 vom reformula problema inversă a calculului variaţional folosind un operator diferenţial parţial care acţionează 1-forme semi-bazice. Această reformulare ne va permite, în anumite cazuri particulare, folosirea teoriei Spencer pentru a studia integrarea formală a acestui operator diferenţial parţial în Capitolul 5. În acest capitol vom discuta două cazuri particulare ale problemei inverse a calculului variaţional: metrizabilitatea proiectivă (cunoscută şi ca versiunea Finsler a problemei a patra a lui Hilbert) şi metrizabilitate Finsler.

Cadrul natural pentru studiul câmpurilor de ecuaţii diferenţiale este oferit de fibratele tangente (de jeturi) asociate varietăţii configuraţiilor. Acest cadrul este studiat în Capitolul 1. Foliaţiile naturale ale acestor fibrate determină anumite structuri canonice precum: distribuţii verticale integrabile, endomorfisme verticale şi câmpuri vectoriale Lioville. Folosind formalismul Frölicher-Nijenhuis, vom asocia anumite derivări care sunt compatibile cu structurile canonice existente pe varietatea configuraţiilor, obţinând în acest fel un calcul diferenţial vertical, aşa cum a fost dezvoltat în [35]. Un alt aspect important pe care îl vom introduce şi studia în acest capitol se referă la procesul lifturilor între diverse fibrate tangente iterate, folosind rezultatele pe care le-am publicat în lucrarea [28]. Este important de subliniat că liftul complet al unei structuri geometrice conţine informaţii

despre structura respectivă precum şi despre variaţia sa de ordin unu. În ultima secţiune a acestui capitol, vom arăta cum sperăm să extindem acest calcul diferenţial pentru a obţine un cadru pentru studiul mecanicii Lagrangiene de ordin superior şi a teoriilor câmpurilor de ordin unu.

Un câmp autonom de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin doi, pe varietatea configuraţiilor M, se poate identifica cu un câmp vectorial special pe TM, numit semispray (sau spray, dacă are o anumită proprietate de omogenitate are loc). În Capitolul 2, vom arăta că pentru un semispray S, pe varietatea configuraţiilor M, calculul diferenţial vertical dezvoltat în capitolul anterior, furnizează un cadru geometric pe M, cu un set corespunzător de structuri geometrice şi invarianţi. Proprietatea de omogenitate a unui spray se reflectă corespunzător în aceste structuri geometrice şi invarianţi. Aceste aspecte sunt folosite pentru a studia probleme specifice precum echivalenţă proiectivă şi metrizabilitate proiectivă.

Pentru un SODE, sau un semispray, un set de cinci invarianţi geometrici a fost propus, folosind metoda echivalenţei a lui Cartan, de Kosambi [87], Cartan [43] şi Chern [48]. În lucrarea [10] am arătat că toţi aceşti invarianţi geometrici se pot obţine folosind o conexiune neliniară (Ehresmann) şi anumite structuri geometrice asociate acesteia. Teoria corespunzătoare a fost denumită teorie KCC. Cei cinci invarianţi geometrici din teoria KCC, au fost utilizaţi recent de numeroşi autori, pentru a obţine informaţii despre comportarea curbelor soluţii ale unui SODE, [19, 62, 126, 147, 148]. În dimensiune doi sau trei, am arătat în lucrarea [11] cum pot fi calculaţi aceşti invarianţi folosind un pachet de programe software.

Până în prezent, cea mai serioasă problemă legată de obţinerea unui cadru geometric unitar pentru abordarea problemelor menţionate anterior, constă în asocierea unei conexiuni neliniare unui sistem de ecuaţii diferenţiale. Este bine cunoscut că în cazul ordinului doi se poate asocia în mod canonic o conexiune nelinară (Ehresmann) şi că ceastă conexiune induce în continuare obiecte geometrice precum: derivarea covariantă dinamică, transport paralel, torsiune, curbură şi endomorfismul Jacobi, [23, 49, 76, 77, 87]. Exisă multiple încercări de a defini o conexiune neliniară canonică similară şi pentru un sistem de ordin superior, numeroase astfel de conexiuni fiind definite până acum, [8, 21, 22, 57, 94, 107, 108]. Folosind conexiunea neliniară pe care o studiem în [26] vom extinde, într-un mod natural de la ordin doi la ordin superior, şi studia următoarele structuri geometrice: derivarea dinamică covariantă, simetrii, câmpuri vectoriale newtonoide (introduse în [98] şi generalizate la ordin superior în [130]), endomorfismul Jacobi şi ecuaţii Jacobi (studiate în [55, 77] pentru SODE). Folosind cadrul geometric pe care îl propunem în [26], am putut defini, pentru prima dată endomorfismul Jacobi în cazul ordinului superior şi am obţinut formule explicite pentru componentele curburii, ceea ce va permite să putem aborda problemele mai sus menţionate, asociate unui câmp de ecuaţii diferenţiale.

În teza sa de doctorat din 1905, Wuenschmann a propus un invariant geometric care face legătura dintre o ecuaţie diferenţială ordinară de ordin trei şi anumite clase de metrici Lorentz conforme pe o varietate diferenţiabilă de dimensiune trei. A trebuit să treacă aproape o sută de ani până a fost recunoscută şi exploatată importanţa acestui invariant în geometria câmpurilor de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior. Rolul invariantului Wuenschmann în geometria ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordin trei sau patru, la transformări de contact, a fost discutat în [68, 118]. Însă, până acum, acest invariant nu a fost introdus într-o manieră geometrică şi nu se cunoaşte o modalitate de a obţine un set complet de invarianţi geometrici pentru sisteme arbitrare de ordin superior. În [72], Fels a arătat că o ecuaţie diferenţială ordinară de ordin patru admite un multiplicator variaţional dacă şi numai dacă doi invarianţi se anulează. Folosind cadrul geometric introdus în [26], am arătat că invarianţii studiaţi de Fels sunt strâns legaţi de invarianţii studiaţi de Dridi şi Neut în [68] şi generalizează invariantul Wuenschmann pentru ordin trei. Saunders, în [134], studiază anumite obstrucţii pentru problema inversă asociată unor ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin par, în contextul calculului variaţional de ordin superior. Credem, şi vom încerca să demonstrăm, că aceşti invarianţi geometrici consituie de asemeni obstrucţii pentru problema inversă a calculului variaţional în cazul ordinului superior, folosind o abordare asemănătoare cu cea dezvoltată pentru ordin doi în [25, 27] şi cadrul geometric propus în [26].

În Capitolul 3, vom utiliza procesul de liftare dintre diverse fibrate tangente iterate introduse şi studiate în Secţiunea 1.3, pentru a defini şi studia liftul unui câmp de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin doi. Vom arăta că liftul complet conţine toate informaţiile necesare studiului variaţiei geodezicelor, a câmpurilor Jacobi (de variaţie) precum şi a simetriilor. Abordarea noastră unifică şi extinde rezultate, obţinute cu tehnici diferite, pentru metrici Riemanniene [145, 146], metrici Finsleriene [15], conexiuni afine [96, 145] şi Lagrangieni regulaţi [45, 65, 119].

În numeroase probleme practice, avem informaţii, doar parţiale, despre soluţiile unui câmp de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin doi sau superior pe varietatea configuraţiilor (lunigimea de arc, timpul parcurs) sau despre variaţia lor, dar nu şi despre structurile geometrice asociate câmpului dat. Am arătat că este posibil să recuperăm anumite informaţii despre structurile geometrice asociate unui SODE folosind spaţiul soluţiilor, [28, 29, 30]. În [28], am studiat relaţiile dintre variaţia geodezicelor unui SODE arbitrar şi câmpurile Jacobi (de variaţie), demonstrând că fiecare variaţie unu-parametrică a soluţiilor induce şi este indusă de un câmp Jacobi. Aceste relaţii sunt bine cunoscute în context Riemannian şi Finslerian [15, 42], unde sunt demonstrate cu ajutorul aplicaţiei exponenţiale. În contextul foarte general pe care îl studiem, lipsa omogenităţii nu permite definirea unei aplicaţii exponenţiale şi datorită acestui motiv în lucrarea [28] folosim fluxul asociat anumitor lifturi. Intenţionăm să extindem aceste studii pentru a include variaţii de ordin superior a geodezicelor precum şi variaţii cu mai mulţi parametri, folosind unele tehnici pe care le-am dezvoltat în [31].

Stabilitatea (sau instabilitatea) Jacobi a geodezicelor unui SODE arbitrar este determinată de mărimea câmpului vectorial de variaţie. Există încercări de a studia această problemă folosind semnul părţii reale a valorilor proprii ale endomorfismului Jacobi [19, 79, 126]. Pentru un SODE arbitrar pe varietatea configuraţiilor, nu s-a obţinut, deocamdată, o înţelegere clară a relaţiei dintre stabilitatea Jacobi şi stabilitatea Lyapunov. Un aspect care a fost neglijat până acum este legat de necesitatea de a folosi doar metrici compatibile, aşa cum au fost studiate în [23]. Un rezultat esenţial în clarificarea acestor aspecte a fost obţinut în [28], unde am demonstrat că un câmp vectorial Jacobi determină în mod unic o variaţie geodezică.

În Capitolul 4 propunem o nouă reformulare a problemei inverse a calculului variaţional folosind 1-forme semi-bazice. Această problemă constă în a decide dacă un sistem de ecuaţii diferenţiale este indus sau nu de o problemă variaţională. Condiţii necesare şi suficiente pentru această problemă, cunoscute sub numele de condiţii Helmholtz, au fost obţinute doar pentru SODE, atât în cazul autonom cât şi în cazul neautonom, [7, 25, 27, 50, 91, 101, 131, 132]. Cu excepţia cazului unu-dimensional (rezolvat în 1894 de Darboux [63]) şi a cazului doi-dimensional (rezolvat în 1941 de Douglas [67]) toate celelalte cazuri generale sunt probleme deschise. Pentru HODE, problema inversă a calculului variaţional a fost studiată de numeroşi autori [57, 72, 94, 134]. Cu toate acestea, nu s-a obţinut încă, pentru această problemă, un set de condiţii necesare şi suficiente (de tip Helmholtz). Folosind cadrul pe care îl propunem în [26] ne aşteptăm să extindem reformularea condiţiilor clasice Helmholtz pentru ordin doi, în funcţie de forme semi-bazice pe care am obţinut-o în [25, 27], la cazul ordinului superior. Ca exemple de clase particulare de HODE care sunt variaţionale vom folosi sistemele de ordin patru de ecuaţii diferenţiale ordinar care guvernează curbele biarmonice [40]. Intenţionăm să obţinem o caracterizare a curbelor k-armonice ca fiind curbe variaţionale pentru Lagrangieni de ordin k.

Reformularea problemei inverse a calculului variaţional, pe care o propunem în [27] şi o prezentăm în Capitolul 4, permite să demostrăm, în cazul când 1-forma semi-bazică este omogenă, că anumite condiţii Helmholtz sunt consecinţe ale celorlalte. Aceste situaţii corespund la două cazuri speciale ale problemei inverse a calculului variaţional: metrizabilitate Finsler şi metrizabilitate proiectivă, studiate în [35, 36] şi prezentate în Capitolul 5.

Problema metrizabilităţii proiective este cunoscută şi ca versiunea Finsler a problemei a patra a lui Hilbert [2, 54, 138]. Această problemă presupune să gasim în ce condiţii soluţiile unui SODE omogen coincid cu geodezicele unui spaţiu Riemann sau Finsler, până la o reparametrizare care păstrează orientarea. Pentru această problemă, reformularea discutată în Capitolul 4, a condiţiilor Helmholtz, folosind un operator diferenţial care acţionează pe 1-forme semi-bazice, este deosebit de utilă deoarece permite folosirea teoriei Spencer pentru a studia integrarea formală a condiţiilor Helmholtz. În [35] am studiat integrarea formală a celor două condiţii Helmholtz pentru metrizabilitatea proiectivă folosind două condiţii suficiente oferite de Teorema Cartan-Kähler. Am arătat că există o singură obstrucţie pentru integrarea formală şi aceasta se datorează curburii conexiunii neliniare induse. Folosind teoria Spencer pentru integrare formală am obţinut următoarele clase de sprayuri care sunt proiectiv metrizabile: sprayuri plate, sprayuri isotrope, sprayuri arbitrare pe varietăţi unu sau doi-dimensionale. Cadrul geometric, pe care îl propunem în [26], precum şi conceptul de omogeneitate de ordin superior introdus de Crampin şi Saunders foarte recent în [61], fac posibilă extinderea acestor aspecte la câmpuri diferenţiale omogene de ordin superior. O astfel de extindere este importantă datorită aplicaţiilor în mecanica Lagrangiană de ordin superior, biarmonicitate (câmpuri de ecuaţii diferenţiale de ordin patru) şi k-armonicitate.

Summary

In the last decades it has been published an increasing number of studies that are seeking for qualitative information about the solutions of systems of (non-)autonomous second (higher) order ordinary (partial) differential equations fields using some associated geometric structure. In these entire studies one can see the need for developing a unifying geometric setting for a differential equation field, with corresponding geometric structures and invariants. In this thesis we show how to obtain a setting and within this the corresponding geometric structures and invariants (Chapters 1 and 2) that allow discussing the following three main problems (Chapters 3, 4 and 5) related to a given system of second order ordinary differential equations: symmetries and first order variations, the inverse problem of the calculus of variations, Finsler and projective metrizability. Last section of each chapter explains how we intend to extend, in the future, the topic covered in the chapter to address similar problems associated to (non-)autonomous second (higher) order ordinary (partial) differential equations fields.

The structure of the thesis is as follows. In Chapter 1 we use the foliated structure of the tangent (jet) bundles and the Frölicher-Nijenhuis formalism to provide a vertical differential geometric calculus. In Chapter 2 we show that we can provide a geometric setting for studying second order ordinary differential equations fields (SODE) using such vertical differential geometric calculus. In the next three chapters we use the proposed geometric setting to address some problems associated a SODE and discuss how we can extend such setting to higher order or partial differential equations fields. In Chapter 3 we study the first order variations, the corresponding Jacobi fields and symmetries for an arbitrary SODE. In Chapter 4 we reformulate the inverse problem of the calculus of variations in terms of a partial differential operator that acts on semi-basic 1-forms. This new reformulation will allow, in some particular cases, to use Spencer theory for studying the formal integrability of the partial differential operator in Chapter 5. In this chapter we discuss two particular cases of the inverse problem of the calculus of variations: projective metrizability (known also as the Finslerian version of Hilbert's fourth problem) and Finsler metrizability.

The natural framework for studying differential equations fields is provided by the tangent (jet) bundles of the configuration manifold and it discussed in Chapter 1. The natural foliations of the tangent bundles determine some canonical structures such as: integrable vertical distributions, vertical endomorphisms, and Liouville vector fields. Using the Frölicher-Nijenhuis formalism, we can associate to these some derivations that are compatible with the existing canonical structures on the configuration manifold and provide a vertical differential calculus, as we have developed it in [35]. Another important aspect we introduce and study in this chapter refers to the lifting process between various iterated

tangent bundles, following the work we have done in [28]. It is important to emphasize that the complete lift of a geometric structure carries information about the given structure as well as its first order variation. In the last section of this chapter, we show how we expect to extend this differential calculus to provide a framework for studying higher order Lagrangian mechanics and first order field theories.

An autonomous second order ordinary differential equation field on a configuration manifold M can be identified with a special vector field on TM, which is called a semispray (or spray, when it has some homogeneity property). In Chapter 2, we show that for a semispray S, on a configuration manifold M, the vertical differential calculus developed in the previous chapter provides a geometric setting on M with corresponding geometric structures and invariants. The homogeneity property of a spray reflects accordingly into these geometric structures and invariants. This allows for studying specific problems such as projective equivalence and projective metrizability.

For a SODE, or a semispray, a set of five geometric invariants were proposed, using Cartan's equivalence method, by Kosambi [87], Cartan [43] and Chern [48]. In [10] we have shown that all these geometric invariants can be derived from an associated nonlinear (Ehresmann) connection and the geometric structures induced by it. The corresponding theory was called KCC-theory. The five geometric invariants provided by the KCC-theory have been used recently, by numerous authors, to obtain various information about the behavior of the solution curves of a SODE, [19, 62, 126, 147, 148]. In dimensions two and three we have shown in [11] how to compute the geometric invariants using a computer algebra package.

So far, the main difficulty in obtaining a unifying geometric setting for addressing the above-mentioned problems consists in how to associate a canonical connection to the given system of differential equations. It is well known that for the second order case one can associate a nonlinear (Ehresmann) connection in a canonical way and this connection further induces various geometric objects such as the dynamical covariant derivative, parallel transport, torsions, curvatures, and the Jacobi endomorphism [23, 49, 76, 77, 87]. There were various attempts to define a similar canonical nonlinear connection also to systems of higher order, numerous such nonlinear connections being defined so far, [8, 21, 22, 57, 94, 107, 108]. Using the nonlinear connection that we study in [26] we can extend in a natural way, from second to higher order, and study the following geometric structures: dynamical covariant derivative, symmetries, newtonoid vector fields (introduced in [98] and generalized to higher order in [130]), the Jacobi endomorphism and the Jacobi equations (studied in [55, 77] for SODE). Within the geometric setting we propose in [26], we were able to define for the first time the Jacobi endomorphism in the higher order case and to provide explicit formulae for its curvature components, which will allow addressing the above mentioned problems associated to a differential equation field.

In his Ph.D. thesis of 1905, Wuenschmann proposed a geometric invariant that relates third order ordinary differential equations with certain classes of conformal Lorentz metrics on three-dimensional manifolds. It took almost one hundred years until it was noticed and exploited the importance of such invariant for the geometry of higher order ordinary differential equation fields. The role of the Wuenschmann invariant for the geometry of third and fourth order ordinary differential equations under contact transformations was discussed in [118] and [68]. However, so far, such invariant was not introduced in a geometric way and it is not clear how one can get a complete set of invariants for arbitrary systems in higher order. In [72], Fels has shown that a scalar fourth-order ordinary differential equation admits a variational multiplier if and only if two invariants vanish. Using the geometric setting proposed in [26], we have shown that the invariants studied by Felsare are closely related to the invariants studied by Dridi and Neut in [68] and generalizes the Wuenschmann invariant for order three. Saunders in [134] studies some obstructions for the inverse problem for even-order ordinary differential equations in the higher order calculus of variations. We believe and intend to prove that these geometric invariants are also obstructions for the inverse problem of the calculus of variations in the higher order case, using a similar approach that we developed for the second order case in [25, 27], and the setting we provide in [26].

In Chapter 3, we use the lifting process between various iterated tangent bundles, introduced and studied in Section 1.3, for lifting second order ordinary differential equation fields. We show that the complete lift of a differential equation field contains all the informations about the geodesic variations, Jacobi (variational) vector fields and symmetries. Our approach unifies and extends previously known results, obtained with different techniques, for Riemannian metrics [145, 146], Finslerian metrics [15], affine connections [96, 145], and regular Lagrangians [45, 65, 119].

In very many practical problems, we have partial information about the solutions of a second or higher order ordinary differential equations fields on the configurations manifold (arc-length, travel time), or their variations, and not about the geometric structures associated to the given field. We have shown that it is possible to recover some informations about the geometric structures associated to a SODE from the space of solutions, [28, 29, 30]. In [28], we study the relations between the geodesic variations for an arbitrary SODE and Jacobi (variational) vector fields, proving that each one-parametric variation of solutions induces and it is induced by a Jacobi vector field. These relations are well known in Riemannian and Finslerian context [15, 42], and are based on the existence of the exponential map. In the very general context that we study, due to the lack of homogeneity such an exponential map cannot be defined, and because of this we propose in [28] to work with the flow of some associated lifts. We intend to extend these studies to include higher order variations of geodesics as well as multiple parametric variations, using some techniques that we develop in [31].

The Jacobi (in)stability for the geodesics of an arbitrary SODE is determined by the magnitude of the variation vector field. There are trials to study this problem using the sign of the real part of the eigenvalues of the Jacobi endomorphism [19, 79, 126]. For an arbitrary SODE on the configuration manifold, a clear understanding of the relation between Jacobi stability and Lyapunov stability has not been obtained yet. One aspect that has been overlooked so far is the necessary compatibility condition with a metric structure, which we studied in [23]. A key point in clarifying these aspects has been studied in [28] where we have shown that a Jacobi vector field uniquely determines a geodesic variation.

In Chapter 4 we provide a new reformulation of the inverse problem of the calculus of variation in terms of semi-basic 1-forms. This problem consists in deciding whether or not a given system of differential equations is induced by a variational problem. Necessary and sufficient conditions for this problem, known as Helmholtz conditions, were obtained only for SODE's in both autonomous and non-autonomous case [7, 25, 27, 50, 91, 101, 131, 132]. Except the one-dimensional (solved in 1894 by Darboux, [63]) and the two-dimensional case (solved in 1941 by Douglas, [67]) all other general cases are open problems. For

HODE, the inverse problem of the calculus of variations was studied by numerous authors [57, 72, 94, 134]. Yet, it has not been obtained a set of necessary and sufficient conditions (of Helmholtz-type) for this problem. Within the setting we propose in [26] we expect to extend the reformulation of the classic Helmholtz conditions, for the second order case in terms of semi-basic forms that we propose in [25, 27], to the higher order case. As examples of particular classes of HODE that are variational we will use the systems of fourth order ODE that gives biharmonic curves [40]. It is our aim to characterize k-harmonic curves as variational curves for Lagrangians of order k.

The reformulation of the inverse problem of the calculus of variation, which we provide in [27] and present in Chapter 4, allows proving that in the case when the semi-basic 1-form is homogeneous some of the Helmholtz conditions are consequences of the other ones. These special cases correspond to two inverse problems in the calculus of variation: Finsler metrizability, and projective metrizability, which are studied in [35, 36] and presented in Chapter 5.

The projective metrizability problem is also known as the Finslerian version of Hilbert's fourth problem, [2, 54, 138]. The problem requires finding under what conditions, the solutions of a homogeneous SODE coincide with the geodesics of a Riemann or a Finsler space, up to an orientation preserving reparameterization. For this problem, the reformulation discussed in Chapter 4, of the Helmholtz conditions in terms of differential operators that act on semi-basic 1-forms, is very useful since it allows to use Spencer theory to study the formal integrability of the Helmholtz conditions. In [35] we studied the formal integrability of the two Helmholtz conditions for projective metrizability using two sufficient conditions provided by Cartan-Kähler Theorem. We have shown that there is only one obstruction to this formal integrability, and this obstruction is due to the curvature tensor of the induced nonlinear connection. Using Spencer theory of formal integrability, we were able to obtain the following classes of sprays that are projectively metrizable: flat sprays, isotropic sprays, and arbitrary sprays on one and two-dimensional manifolds. The geometric setting, which we propose in [26], and the homogeneity concepts for higher order introduced by Crampin and Saunders, very recent, in [61] make possible an extension of these aspects to homogeneous higher order differential equation fields. Such extension is important due to the applications in higher order Lagrangian mechanics, biharmonicity (homogeneous fourth order ordinary differential equation fields) and k-harmonicity.