HABILITATION THESIS
CONTRIBUTIONS IN GEOMETRIC MECHANICS

ASSOCIATE PROFESSSOR MIRCEA-CLAUDIU CRÂŞMĂREANU

Contents

Date: May 18, 2012.

REZUMAT

Textul care urmează reprezintă un foarte scurt rezumat al conţinutului Tezei de Abilitare. Este scris în TEX folosind stilul ”amsart” adică cel utilizat personal în ultimii ani pentru redactarea articolelor proprii.

Din punct de vedere al vechimii, lucrez de mai bine de 17 ani în domeniul *Geometriei Diferenţiale* cu precădere orientat spre aplicaţii în Mecanica Geometrică. Pentru o încadrare în Mathematical Subjects Classification accesibilă la adresa:
http://www.zentralblatt-math.org/msc/data/msc2010.pdf
consider că următoarele Domenii îmi caracterizează activitatea:
53-Differential Geometry, 58-Global Analysis,
37-Dynamical systems, 70-Mechanics of particles and systems.

Am început cercetarea ştiinţifică încă din studenţie sub îndrumarea doamnei profesoare Liliana Răileanu. Începând cu 1995 am intrat în colectivul de cercetare al domnului Academician Radu Miron, dumnealui fiind de altfel şi îndrumătorul Tezei de Doctorat (finalizate în februarie 1999) dedicată geometrizării Lagrangienilor neautonomi (i.e. dependenţi de timp) de ordin superior. Prin urmare, în toate lucrările redactate am urmărit modelarea geometrică şi includerea de aplicaţii, în special în Mecanică, Fizica Teoretică, Relativitate, adică acele domenii ştiinţifice tradiţional apropiate Geometriei. Cuvintele cheie ale perioadei 1995-2008 sunt: integrale prime, simetrii clasice, teoreme Noether (de conservare), simetrii adjuncte şi aproximative.

În ultimii cinci ani am abordat o serie de subiecte ”mai geometrice”. Spre exemplu am studiat chestiuni de geometrie Riemaniană şi respectiv, din cea mai cunoscută generalizare, anume geometria Finsler. Mai precis, am studiat clase de obiecte geometrice pe varietăţi după cum urmează:

1) *câmpuri vectoriale speciale*: spre exemplu solitoni Ricci (în particular câmpuri vectoriale Killing) în diverse spaţii Riemaniene. Astfel am determinat solitonii Ricci în următoarele geometrii: f-Kenmotsu (o generalizare a varietăţilor Kenmotsu clasice), spaţii Riemaniene de curbură quasi-constanta, varietăţi $N(k)$-quasi Einstein, hipersuprafeţe Hopf în forme spaţiale complexe, CR subvarietăţi de dimensiune CR maximală în $P(\mathbb{C})$. Doar o parte din aceste cercetări au fost publicate până în prezent.

2) *câmpuri tensoriale T de tip* $(1,1)$: structuri aproape produs ($P^2 = I$), structuri aproape complexe ($J^2 = -I$) şi structuri aproape tangente ($T^2 = 0$) respectiv connexiuni (ne)liniare asociate. Spre exemplu, în lucrarea ”Golden differential geometry” (2008), un concept introdus împreună cu Cristina Hreţcanu, toate aceste trei structuri sunt considerate. De asemeni, într-o lucrare din 2011 scrisă împreună cu Fatma Özdemir, am introdus *substructuri* de aceste tipuri; substructuri înseamnă câmpuri tensoriale de tip $(1,1)$ definite doar pe o distribuţie fixată a unei varietăţi date. Astfel, acest ultim studiu poate fi interpretat ca o *sub-geometrie* în corespondenţă cu celebra *geometrie sub-Riemaniană*.

3) *clase de subvarietăţi Riemaniene remarcabile*: subvarietăţi semi-invariante în geometria metrică de aproape contact, curbe oblice (slant) în diverse varietăţi ambiente 3-dimensionale (Kenmotsu, normal aproape contact, warped, spaţii Bianchi-Cartan-Vrânceanu). Pentru ultimul subiect, împreuna cu diverşi colaboratori am obţinut clasificarea curbelor oblice (spre exemplu, în spaţiul hiperbolic 3-dimensional $\mathbb{H}^3$ precum şi în produsul warped al unui interval real cu o suprafaţă, $I \times_f S^2$) şi am inclus imaginile unor curbe oblice deosebite (în cazul warped, am utilizat MATLAB). De asemenea, am introdus noţiunea de *particulă slant* ca fiind un punct material având ca traiectorie (sau linie de univers) exact o curbă slant. Pentru

anumite clase de curbe oblice am obţinut expresia curburii şi torsiunii şi drept consecinţă, am introdus un *invariant Lancret* corespunzător; reamintim că invariantul Lancret Euclidean al eliciilor γ este: $Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{k}$. În cazul warped am găsit:

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{k} \frac{\left[(\alpha')^2 + (F')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|\alpha'| \left[(\alpha')^2 + (F')^2 - F''\right]} + \frac{sgn(\alpha')\alpha'' F'}{|\alpha'| \left[(\alpha')^2 + (F')^2 - F''\right] |\sin\theta|}.$$

unde $F = \ln f$ iar funcţia α apare în expresia lui γ. Pentru $f = 1$ reobţinem cazul Euclidean şi invariantul Lancret asociat.

4) *familii de conexiuni neliniare asociate unui semi-spray* (i.e. sistem diferenţial ordinar de ordinul II) prin intermediul conexiunii dinamice şi studierea unor probleme remarcabile: recurenţă, structuri Weyl (teorie gauge conformă), disipare Rayleigh. Am determinat aceste familii folosind operatorii Obata. Reamintim că această problemă a găsirii tuturor conexiunilor *liniare* asociate unei geometrii anume este un subiect preferat al şcolii geometrice din Iaşi: profesorii Radu Miron şi Vasile Cruceanu au tratat această problema pentru structuri aproape complexe şi aproape simplectice în:

MR0235485 (38 #3794) Cruceanu, V.; Miron, R. *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.) 13(1967), 79-88.

MR0231311 (37 #6866) Cruceanu, V.; Miron, R. *Sur les connexions compatibles á une structure métrique ou presque symplectique*, Mathematica (Cluj), 9 (32) (1967), 245-252.

5) *structuri Dirac* ca generalizări ale structurilor pre-simplectice şi ale bi-vectorilor Poisson. Am obţinut că perechea ($F = subfibrat\ vectorial\ din\ TM, F^0 = anihilatorul\ lui\ F$) generează a structură aproape Dirac $L_F = F \oplus F^0$ pe varietatea M care este structură Dirac dacă şi numai dacă distribuţia F este (Lie) integrabilă. Am aplicat acest procedeu de generare în contexte variate: astfel, o metrică Riemaniană plată pe M produce o structură Dirac în timp ce pe grupul Heisenberg 3-dimensional Nil_3 (ca şi pe spaţiile Bianchi-Cartan-Vrânceanu) se obţine atât o structură aproape Dirac (dată de distribuţia orizontală) cât şi o structură Dirac (dată de distribuţia verticală).

6) *ultimi multiplicatori* asociaţi unor ecuaţii Liouville în diferite contexte: pe varietăţi generale (nu doar pe spaţii Euclidene ca până acum), algebroizi Lie, varietăţi Poisson. Lucrarea dedicată acestui subiect din Houston Journal of Mathematics (2008) a primit premiul "Gheorghe Ţiţeica" al Academiei Române, cel mai prestigios premiu românesc acordat lucrărilor de geometrie.

Detalii despre activitatea ştiinţifică de până acum se găsesc în Secţiunea următoare în corespondenţă cu Lista Lucrărilor proprii din Secţiunea 3. O scurtă trecere în revistă a planurilor pentru cercetări ulterioare este inclusă în Secţia 2. Secţiunile 1 şi 2 conţin, de asemenea, şi textul unor lucrări selectate: 10 pentru prima Secţiune (ca fiind numărul de articole incluse în Portofoliul Tezei de Abilitare) şi 4 în Secţiunea următoare, ca proiecte personale. În încheierea acestui Rezumat menţionez că o serie de lucrări au apărut în Jurnale editate de Case Editoriale de mare prestigiu ştiinţific:

1) Elsevier (5): International Journal of Non-Linear Mechanics (2000); Chaos, Solitons and Fractals (2008); C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2009); Nonlinear Analysis: Real World Applications (2012); Journal of Mathematical Analysis and Applications (2012),
2) Springer (2): Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. (2009); Indian Journal of Pure and Applied Mathematics (2012),
3) World Scientific (3): Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. (2012).

ABSTRACT

The following text represents the contents of my Habilitation Thesis. It is written in TEX using the "amsart" style which is the style used in the last years for my mathematical papers.

I am working about 17 years in the field of *Differential Geometry* with applications in *Geometric Mechanics*. Looking at Mathematical Subjects Classification available at:

$$http://www.zentralblatt-math.org/msc/data/msc2010.pdf$$

I consider that my works belong to the following Domains:
-53-Differential Geometry,
-58-Global Analysis,
-37-Dynamical systems,
-70-Mechanics of particles and systems.

I begin my scientific research as being student in 1993 with Professor Dr. Liliana Răileanu and in 1995 under the guidance of Academician Radu Miron; he was the Adviser of my PhD (finished in 1999) dedicated to the geometrization of non-autonomous Lagrangians of higher order. In all my works I search for concrete applications, especially in Mechanics, Physics, Relativity, i.e. the scientific domains usually plausible to geometrical modeling. For example, a large class of papers authored by me in the years 1995-2008 are dedicated to: first integrals, classical symmetries, Noether Theorems, adjoint and approximate symmetries.

In the last five years I consider more intrinsic geometrical subjects. A special attention I deserve for Riemannian geometry and its well-known generalization called Finsler geometry. In fact, I study some geometrical objects on manifolds of the following type:

1) *special vector fields*: for example Ricci solitons (particularly Killing vector fields) in various Riemannian spaces. Until now I determine the Ricci solitons in the following geometries: f-Kenmotsu (the generalization of usual Kenmotsu manifolds), Riemannian spaces with quasi-constant curvature, $N(k)$-quasi Einstein manifolds, Hopf hypersurfaces in complex space forms, CR submanifolds of maximal CR dimension in $P(\mathbb{C})$. Only some of these papers appeared until now.

2) *tensor fields T of $(1,1)$-type*: almost product structures ($P^2 = I$), almost complex structures ($J^2 = -I$) and almost tangent structures ($T^2 = 0$) and associated (non)linear connections. For example, in "Golden differential geometry", a concept introduced by me and Cristina Hreţcanu in 2008 all these structures are considered. Also, in a paper from 2011 (collaboration with Fatma Özdemir) I consider *substructures* of these type; here, substructures means tensor fields of $(1,1)$-type defined only on a fixed distribution of a given manifold. Then, this last study can be interpreted as a *sub-geometry* in correspondence with the well-known *sub-Riemannian geometry*.

3) *classes of remarkable Riemannian submanifolds*: semi-invariant submanifolds in metric almost contact geometry, slant curves in various ambient 3-dimensional manifolds (Kenmotsu, normal almost contact, warped, Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces). For the last subject, together with some coworkers I obtained the classification of slant curves (for example, in the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ and in the warped product of a real interval with a surface, $I \times_f S^2$) as well as the pictures of some remarkable slant curves (for example, in the warped case, I used MATLAB). Also, I introduce the notion of *slant particle* as a material point having a trajectory (or world-line) exactly a slant curve. For some classes of slant curves I obtain the expression of curvature and torsion and in consequence, I derive a corresponding *Lancret*

invariant; recall that the Euclidean Lancret invariant of helices γ is: $Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{k}$. In the warped case above I find:

$$Lancret(\gamma) = \frac{\tau}{k}\frac{\left[(\alpha')^2 + (F')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|\alpha'|\left[(\alpha')^2 + (F')^2 - F''\right]} + \frac{sgn(\alpha')\alpha'' F'}{|\alpha'|\left[(\alpha')^2 + (F')^2 - F''\right]|\sin\theta|}.$$

where $F = \ln f$ and the function α appears in the expression of γ. If $f = 1$ we recover the Euclidean case and the corresponding Lancret invariant.

4) *families of nonlinear connections associated to a semi-spray* (i.e. second order differential system) through the dynamical connection and corresponding to remarkable problems: recurrence, Weyl structures (conformal gauge theories), Rayleigh dissipation. I find the whole such families using the Obata operators. Let us remark that this problem to find the whole family of *linear* connections associated to a special geometry is a historical subject for the geometrical school of Iaşi: professors Radu Miron and Vasile Cruceanu treated this problem for almost complex and almost symplectic geometries in:

MR0235485 (38 #3794) Cruceanu, V.; Miron, R. *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.) 13(1967), 79-88.

MR0231311 (37 #6866) Cruceanu, V.; Miron, R. *Sur les connexions compatibles á une structure métrique ou presque symplectique*, Mathematica (Cluj), 9 (32) (1967), 245-252.

5) *Dirac structures* as generalization of pre-symplectic structures and Poisson bivectors. I obtained that a pair ($F = vector\ subbundle\ of\ TM, F^0 = its\ annihilator$) yields an almost Dirac structure $L_F = F \oplus F^0$ of the manifold M which is Dirac structure if and only if F is Lie integrable. I apply this characterization in various context: a flat Riemannian metric of M produce a Dirac structure, on the Heisenberg three-dimensional group Nil_3 (as well as on Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces) I obtain an almost Dirac structure (given by the horizontal distribution) and a Dirac structure (provided by the vertical distribution).

6) *last multipliers* involved in Liouville equations on various settings: on general manifolds (not only the Euclidean spaces as before), Lie algebroids, Poisson manifolds. The paper dedicated to this subject and appeared in Houston Journal of Mathematics (2008) received the "Gheorghe Ţiţeica" Prize of Romanian Academy, the upper Romanian award devoted to geometrical works.

Details about my scientific activity until now can be find in the next Section in correspondence with my List of Papers from Section 3. A short list of intentions for my future research I include in Section 2. The Sections 1 and 2 contain also the text of some selected papers: 10 for the first Section (as the number of required articles included in the Habilitation Portfolio) and 4 in the next Section, as my projects.

I have papers in Journals edited by some great Editorial Houses:
1) Elsevier (5): International Journal of Non-Linear Mechanics (2000), Chaos, Solitons and Fractals (2008); C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2009); Nonlinear Analysis: Real World Applications (2012); Journal of Mathematical Analysis and Applications (2012).
2) Springer (2): Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. (2009); Indian Journal of Pure and Applied Mathematics (2012).
3) World Scientific (3): Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. (2012).