"Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi

Faculty of Mathematics

Habilitation Thesis

Optimality conditions in vector optimization

A view through scalarization methods and metric regularity of mappings

Author: **Marius DUREA**

Iaşi, 2012

To my family

Contents

Part I

Abstract

Chapter 1

Abstract – English version

The main purpose of this thesis is to give an informal account on the scientific achievements and the intended evolution plan of the author's academic career. Therefore, the present work includes the most important results obtained by the author, alone or in collaboration, after its PhD thesis defence in 2004 as well as a plan for further career possible developments.

The topic of this thesis is part of the general domain of nonlinear programming with applications in Economics, a very important field from theoretical as well as from practical point of view. We split the author's scientific achievements into three major directions which are unified by convergence of objectives and methods. The objectives concern the investigation of vector optimization problems with nonsmooth data from point of view of optimality conditions, and stability analysis, while the methods are those of nonlinear and variational analysis. In fact, we initiate and develop several methods of study for the proposed problems and we show that, in the process, several important related issues come into attention and should be deeply investigated.

A short motivation of the research themes presented here is that to optimize general models arising from practice was always a goal of modern mathematics and besides scalar programming which was initially considered, the multicriteria programming or vectorial programming is known for a long time in Economics. The growing interest for vectorial programming of the Optimization mathematical community is proved by the active research in this field of some well internationally recognized mathematicians among which we mention here J. Borwein, J. Jahn, B. Jimenez, D. T. Luc, B. S. Mordukhovich, V. Novo, C. Tammer, L.Thibault, C. Zălinescu. In the last fifty years it was noticed that the degree of generality of the models should grow in order to cover practical demands and the replacement of objective functions by multifunctions is necessary. Among other necessary tools for this newly considered framework, the question of introducing differentiability notions for set-valued maps has appeared. There are several concepts in this respect, but probably the best construction in terms of theory is the Mordukhovich coderivative and the related generalized differentiation objects.

Several works of Robinson in 1970s and early 1980s made clear the idea that there is a tight connection between some already classical results in theory of stability in scalar optimization and some conditions naturally arising from the study of metric regularity of the constraint systems. In turn, the equivalent properties of metric regularity and openness

at linear rate of set-valued maps have an important history being nowadays the part of the general topic in nonsmooth analysis called variational analysis. A landmark of this research area was the famous Robinson-Ursescu Theorem and a series of works of Milyutin in 1970s concerning the preservation of regularity under functional perturbation. Since 1980s to our time many mathematicians have participated into a joint effort on the development and understanding of these problems. We mention here only a few, having major contributions to the field: J. P. Aubin, A. Dontchev, H. Frankowska, A. Ioffe, B. S. Mordukhovich, J.-P. Penot, S. M. Robinson, R. T. Rockafellar, C. Ursescu.

In the last ten years, the author of this thesis was involved in the research areas mentioned above (i.e. vector optimization and the study of openness at linear rate of set-valued maps by the use variational methods in nonsmooth analysis) and the results of the present thesis are in dialog with several issues which are recurrent in the works of the above mentioned authors.

Therefore, the *Scientific achievements* chapter (i.e. Chapter 3) follows the author's most important works in a sequence where the first criterion is not the chronology, but the developments of the leading ideas.

Having this principle in mind, we divided this main chapter into four sections entitled as follows: *Necessary optimality conditions for (weak) Pareto efficiency* (Section 3.1), *Necessary optimality conditions for special types of solutions* (Section 3.2), *Openness for set-valued maps and its applications in set-valued optimization* (Section 3.3), and *Stability issues* (Section 3.4). Notice that, before the start of the first section, we have presented the framework and the main notations used in the sequel. Section 3.1 contains, on one hand, results on solid vector optimization (especially governed by set-valued maps) obtained by means of scalarization methods and, on the other hand, the roots for the developments in the subsequent sections. Namely, the limitations of the study of the classical types of solutions exclusively by scalarization become apparent and this leads to consider special types of solutions (Section 3.2), to develop new methods in non solid optimization (Section 3.3) and to identify several stability issues (Section 3.4). Every one of these sections are in turn divided following the specific needs of the study therein; we list here the most representative questions which are extensively investigated: solid set-valued optimization (Subsection 3.1.1), sharp solutions (Subsections 3.2.1, and 3.2.2), implicit multifunctions theorems (Subsection 3.3.1), openness and optimality conditions (Subsection 3.3.3), well-posedness in vector optimization (Subsection 3.4.2). Throughout, the main tools are various generalized differentiation objects for sets (tangent and normal cones), single-valued and set-valued maps (subdifferentials and derivatives, coderivatives, respectively) and related calculus rules on appropriate classes of Banach spaces. Besides these questions, we study as well several related aspects of the theory: behavior of Lagrange multipliers sets in smooth and nonsmooth vector optimization (Subsection 3.1.2), Lagrange claims for set-valued maps (Subsection 3.2.3), chain rules for openness at linear rate for multifunctions (Subsection 3.3.2), a lower semicontinuous regularization method for set-valued maps (Subsection 3.4.3).

Chapter 4 contains some ideas on further developments of author's academic and scientific career and the main considerations concern the publishing, didactic and guiding of young people activities. An extended bibliography which consist of 137 titles ends the thesis.

Chapter 2

Rezumat – versiunea în limba română

Principalul scop al acestei teze este acela de a prezenta într-o manieră concisă cele mai importante realizări ştiinţifice ale autorului precum şi un plan al evoluţiei ulterioare a carierei academice a acestuia. Drept urmare, lucrarea de faţă include cele mai importante rezultate obţinute de autor, singur sau în colaborare, după momentul susţinerii tezei de doctorat în 2004 precum şi un plan al posibilelor dezvoltări ale carierei.

Tematica tezei este parte a domeniului mai general al programării neliniare cu aplicaţii în economie, un domeniu de cercetare foarte important, atât din punct de vedere teoretic cât şi practic. Am împărţit realizările ştiinţifice ale autorului în trei direcţii majore care sunt unite prin convergenţa obiectivelor şi a metodelor de studiu. Obiectivele se referă la investigarea problemelor de optimizare vectorială cu date nenetede din punct de vedere al condiţiilor de optimalitate şi al stabilităţii, în timp ce metodele sunt proprii analizei neliniare şi analizei variaţionale. De fapt, iniţiem şi dezvoltăm mai multe metode de studiu a problemelor propuse şi, pe parcurs, detectăm mai multe probleme importante care trebuie analizate în profunzime.

O scurtă motivare a temelor de cercetare prezentate aici este dată de faptul că a optimiza modelele generale ce se ivesc în practică a fost mereu un scop important al matematicii moderne, iar, pe lângă programarea scalară care a fost considerată iniţial, programarea multicriterială sau vectorială este de mult timp cunoscută în economie. Interesul în creştere al matematicienilor care se ocupă de optimizare pentru programarea vectorială este probat de activitatea de cercetare în acest domeniu a unor matematicieni bine cunoscuţi printre care menţionăm pe J. Borwein, J. Jahn, B. Jimenez, D. T. Luc, B. S. Mordukhovich, V. Novo, C. Tammer, L.Thibault, C. Zălinescu. În ultimii cincizeci de ani s-a constatat că gradul de generalitate a modelelor trebuie să crească pentru a acoperi necesităţile practice şi de asemenea este importantă înlocuirea funcţiilor obiectiv prin multifuncţii. Toate acestea necesită noi unelte şi, printre altele, a apărut problema introdurerii noţiunilor de diferenţiabilitate pentru multifuncţii. Astăzi, există mai multe concepte de acest tip, dar probabil că cel mai bun din punct de vedere teoretic este coderivata Mordukhovich înpreună cu celelalte obiecte înrudite legate de teoria diferenţierii generalizate.

Mai multe articole ale lui Robinson din anii 1970 şi începutul anilor 1980 au evidenţiat idea unei strânse conexiuni între unele rezultate clasice ale teoriei stabilităţii din optimizarea scalară şi unele condiţii care apar în mod natural în studiul regularităţii metrice a sistemelor de constrângeri. La rândul lor, proprietăţile echivalente de regularitate metrică şi deschidere cu rată liniară a multifuncţiilor au o istorie deja imporantă, devenind parte integrantă a analizei variaţionale. Rezultatele fundamentale pentru această direcţie de cercetare au fost faimoasa Teoremă Robinson-Ursescu şi o serie de lucrări ale lui Milyutin din anii 1970 privitoare la păstrarea regularităţii la perturbări funcţionale. Din anii 1980 până acum, mulţi matematicieni au participat într-un efort comun de dezvoltare şi înţelegere a acestor probleme. Menţionăm aici doar câţiva dintre cei care au avut contribuţii majore în acest domeniu: J. P. Aubin, A. Dontchev, H. Frankowska, A. Ioffe, B. S. Mordukhovich, J.-P. Penot, S. M. Robinson, R. T. Rockafellar, C. Ursescu.

În ultimii zece ani, autorul acestei teze a fost implicat in domeniile de cercetare menţionate anterior (i.e. optimizarea vectorială şi studiul deschiderii liniare cu rată liniară a multifuncţiilor prin intermediul metodelor variaţionale din analiza neliniară) iar rezultatele din teza de faţă sunt în dialog cu mai multe probleme care apar cu insistenţă în lucrările autorilor mai sus menţionaţi. Prin urmare, capitolul privitor la *Realizările ştiinţifice* (i.e. Capitolul 3) urmează cele mai importante lucrări ale autorului într-o succesiune în care primul criteriu nu este cronologia, ci dezvoltatea ideilor fundamentale.

Având în vedere acest principiu, am împărţit acest capitol principal în patru secţiuni intitulate după cum urmează: *Condiţii necesare de optimalitate pentru eficienta (slabă) Pareto* (Secţiunea 3.1), *Condiţii necesare de optimalitate pentru tipuri speciale de soluţii* (Secţiunea 3.2), *Deschiderea aplicaţiilor multivoce şi aplicaţii în optimizare* (Secţiunea 3.3), and *Probleme de stabilitate* (Secţiunea 3.4). Înaintea startului primei secţiuni menţionate sunt prezentate cadrul şi principalele notaţii utilizate în continuare. Secţiunea 3.1 conţine, pe de o parte, rezultate de optimiziare vectorilă solidă (mai ales pentru probleme guvernate de multifuncţii) obţinute folosind metode de scalarizare şi, pe de altă parte, rădăcinile dezvoltărilor din secţiunile ulterioare. Mai exact, limitările studiului soluţiilor clasice exclusiv prin scalarizare devin evidente şi acestea conduc la considerarea altor tipuri de soluţii (Secţiunea 3.2), la dezvoltarea unor noi metode în optimizarea nesolidă (Secţiunea 3.3) şi la identificarea mai multor probleme de stabilitate (Secţiunea 3.4). Fiecare din aceste secţiuni este, la rândul său, împărţită conform studiului specific corespunzător; prezentăm aici cele mai reprezentative probleme investigate: optimizare solidă cu multifuncţii (Subsecţiunea 3.1.1), soluţii exacte (Subsecţiunile 3.2.1 şi 3.2.2), teoreme implicite pentru multifuncţii (Subsecţiunea 3.3.1), deschidere şi condiţii de optimalitate (Subsecţiunea 3.3.3), probleme vectoriale bine puse (Subsecţiunea 3.4.2). Pe parcursul lucrării, principalele unelte sunt mai multe tipuri de obicte de diferenţiabilitate generalizată pentru mulţimi (conuri tangente şi normale), funcţii şi multifuncţii (subdiferenţiale şi respectiv, derivate şi coderivate) precum şi reguli de calcul asociate pe diverse clase de spaţii Banach. În afară de aceste chestiuni principale, studiem de asemenea mai multe chestiuni înrudite din cadrul teoriei: comportarea mulţimilor de multiplicatori Lagrange în optimizarea vectorială netedă şi nenetedă (Subsecţiunea 3.1.2), aserţiuni Lagrange pentru multifuncţii (Subsecţiunea 3.2.3), reguli de tip lanţ pentru deschiderea cu rată liniară a multifuncţiilor (Subsecţiunea 3.3.2), o metodă de regularizare inferior semicontinuă a aplicaţiilor multivoce (Subsecţiunea 3.4.3).

Capitolul 4 conţine câteva idei asupra dezvoltării ulterioarea a carierei ştiinţifice şi academice a autorului, iar principalele consideraţii se referă la activitatea publicistică, activitatea didactică şi la activitatea de coordonare a tinerilor cu aptitudini pentru cercetare. O bibliografie extinsă ce cuprinde 137 de titluri încheie teza.