ALEXANDRU IOAN CUZA
UNIVERSITY of IAŞI

# Mathematical Methods and Models in classical and generalised Elasticity

**Habilitation Thesis**

Ionel-Dumitrel Ghiba

2022
Iaşi

*To my wife and my daughter*

# Acknowledgement

Thank you to all those who trusted my way of thinking and working, and to those who challenged me with arguments when necessary.

I thank my wife for all her support and for the discussions and experiences we have had together, helping me to be a better version of myself every day. I thank my daughter for all the patience she has with me, the new world she has revealed to me and the lessons I learn from observing her.

Thank you to those who, by working with me honestly, have instilled in me this way of working as a team.

I am deeply grateful to Professor Patrizio Neff for initiating and training me in all the research directions addressed in this thesis. I will never forget the answer he gave me when, 10 years ago, I told him that I had no solid knowledge of nonlinear elasticity and nonlinear shell theories. He said: *That means you are the right person for the job!* I thank Patrizio for his entire scientific journey so far and for his friendship all these years.

I thank all my collaborators, especially Professor Angela Madeo, Dr. Robert Martin, Dr. Jendrik Voss and Professor M. Bîrsan.

I also thank my parents for their kindness and love and for not suppressing my freedom of thought and of expressing my opinions. I am also grateful to my parents for the fieldwork we did together that taught me to love nature, to organize my effort, to work collaboratively for completing problems faster and so to be able to dedicate myself to a new task and to discover new challenges.

# Contents

# Abstract

The *theory of elasticity* provides a mathematical framework to model the response of different elastic materials under given external stimuli. Each model has its advantages and its shortcomings. To this day, there is no decisive mathematical model which correctly describes the entirety of elastic behavior. Every improvement of the existing models and of their mathematical treatment represents a step forward.

This thesis is completely contained in the framework of *hyperelasticity*, i.e., assuming the existence of a potential energy density function $W$ which describes the stored deformation elastic energy. The present habilitation thesis is a cumulative work, containing some results published by the author in the last seven years. More precisely, the second part of the present thesis contains some results published by the author (the articles [1, 3, 6-14] from the list on the end of abstract) or under review (see Chapter 11) in the context of *classical nonlinear isotropic elasticity*, while the third part is dedicated to some new *shell models* constructed in the framework of *nonlinear isotropic Cosserat-elasticity* and it contains the results published in the articles [2, 4, 5] (see the list on the end of abstract) and some unpublished results (Chapter 17 and Chapter 18). Due to some ambiguities which seem to be present in literature, we have organized the thesis as a self-containing work, including our own proofs when the already known arguments where not formulated and proven completely clear.

The first part of the thesis contains a short description of the *activity of the author after defending the PhD thesis*, as well as some notations and a general overview on the frameworks considered in the thesis. In the next two parts we have included the results obtained by the author in two research fields: the classical nonlinear elasticity and the theory of nonlinear Cosserat elastic shells. The *future research projects* of the author are outlined in the last part of the thesis.

In the first chapter we formulate the main notions and constitutive requirements in nonlinear elasticity, e.g., strain measures, *rank-one convexity, polyconvexity, quasiconvexity*, Baker-Ericksen inequality, as well as some criteria for proving them for specific internal energies. The relations between the considered convexity properties are well known, but will be stated explicitly by us in order to ensure compatibility with the precise definitions employed here.

Starting from the initial goal to find the most suitable energy function which responds to four main requirements:

- to have a good fitting to the experimental results,
- to have a geometrical meaning,
- to have a form as simple as possible in order to be used in practice and
- to satisfy some minimal requirements such that the existence of the solution is assured,

we were lead to formulate some interesting results regarding rank-one convexity and polyconvexity for some classes of energies.

Regarding the first three requirements, in some recent papers from the literature it is shown that the classical quadratical Hencky strain energy

$$W_{\rm H}(F) := \mu\,\|\mathrm{dev}_n \log U\|^2 + \frac{\kappa}{2}\,[\mathrm{tr}(\log U)]^2,$$

where $\log U$ is the principal *matrix logarithm of the stretch tensor* $U = \sqrt{F^T F}$ corresponding to the deformation gradient $F = \nabla\varphi$ and $\|\,.\,\|$ denotes the Frobenius matrix norm, enjoys the surprising property that it represents *the geodesic distance* of the deformation gradient $F$ to the group of rotations. However, the classical Hencky

energy, being not rank-one convex (elliptic), does not lead to an existence result (the fourth requirement) for the corresponding minimization problem. However, since the rank-one convexity may be locally characterized, in Chapter 2, we have identified some *ellipticity domains* for the distortional Hencky-logarithmic strain energy.

To avoid the serious shortcoming of the classical Hencky energy, i.e. being not rank-one convex, in Chapter 3 we have proposed some alternative new energies (*exponentiated Hencky energy*) based on the logarithmic strain tensor

$$W_{_{\rm eH}}(F) = W^{\rm iso}_{_{\rm eH}}\Big(\frac{F}{\det F^{\frac{1}{n}}}\Big) + W^{\rm vol}_{_{\rm eH}}(\det F^{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{1}) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{k}\, e^{k\,\|{\rm dev}_n \log U\|^2} + \dfrac{\kappa}{2\widehat{k}}\, e^{\widehat{k}\,[(\log \det U)]^2} & \text{if } \det F > 0, \\ +\infty & \text{if } \det F \le 0. \end{cases}$$

In the planar case, it has been shown that the proposed energies enjoy the important property of polyconvexity. It has also been shown that, in any dimension, the coercivity is satisfied, and also that, for three-dimensional deformations, the proposed energies have some very useful properties: analytical solutions are in perfect agreement with Bell's experimental data; planar pure Cauchy shear stress produces biaxial pure shear strain and the value 0.5 of Poisson's ratio corresponds to exact incompressibility; the analytical expression of the pressure is in concordance with the classical Bridgman's compression data for natural rubber; the rank-one domain is similar to the von Mises–Huber–Hencky maximum distortion strain energy criterion. With the help of these new energies, we have proven that in the additive logarithmic finite strain plasticity at frozen plastic flow the purely elastic response does not define a well-posed nonlinear elasticity problem, in the sense that the rank-one convexity is not preserved. We prove that even if an elastic energy $F \mapsto W(F) = \widehat{W}(\log U)$ defined in terms of logarithmic strain $\log U$, where $U = \sqrt{F^T F}$, happens to be everywhere rank-one convex as a function of $F$, the new function $F \mapsto \widetilde{W}(F) = \widehat{W}(\log U - \log U_p)$ need not remain rank-one convex at some given plastic stretch $U_p$ (viz. $E^{\log}_p := \log U_p$). This is in complete contrast to multiplicative plasticity (and infinitesimal plasticity) in which $F \mapsto W(F\,F_p^{-1})$ remains rank-one convex at every plastic distortion $F_p$ if $F \mapsto W(F)$ is rank-one convex ($\nabla u \mapsto \|{\rm sym}\nabla u - \varepsilon_p\|^2$ remains convex).

The purely geometric characterization of the logarithmic strain measures $\|\log U\|^2$ suggests that a viable constitutive law of nonlinear elasticity may be derived from an elastic energy potential which depends solely on this intrinsic property of the deformation, i.e. that an energy function $W\colon\, {\rm GL}^+(n) \to \mathbb{R}$ of the form $W(F) = \Psi(\|\log U\|^2)$ with a suitable function $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ should be used to describe finite elastic deformations. However, while such energy functions enjoy a number of favorable properties, we show in Chapter 4 that it is not possible to find a strictly monotone function $\Psi$ such that $W$ is Legendre-Hadamard elliptic. Similarly, we consider the related isochoric strain measure $\|{\rm dev}_n \log U\|^2$, where ${\rm dev}_n \log U$ is the deviatoric part of $\log U$. Although a polyconvex energy function in terms of this strain measure has recently been constructed in the planar case $n = 2$, we show that for $n \ge 3$, no strictly monotone function $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ exists such that $F \mapsto \Psi(\|{\rm dev}_n \log U\|^2)$ is polyconvex or even rank-one convex. Moreover, a volumetric-isochorically decoupled energy of the form $F \mapsto \Psi(\|{\rm dev}_n \log U\|^2) + W_{\rm vol}(\det F)$ cannot be rank-one convex for any function $W_{\rm vol}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ if $\Psi$ is strictly monotone.

Since we have seen that there does not exist rank-one convex volumetric-isochorically decoupled energy of the form $F \mapsto \Psi(\|{\rm dev}_n \log U\|^2) + W_{\rm vol}(\det F)$, in Chapter 5, by adapting a method introduced by Ball, Muite, Schryvers and Tirry, we construct a polyconvex isotropic energy function $W\colon\, {\rm GL}^+(n) \to \mathbb{R}$ which is equal to the classical Hencky strain energy in a neighborhood of the identity matrix $\mathbb{1}$. The extension can also be chosen to be coercive, in which case Ball's classical theorems for the existence of energy minimizers under appropriate boundary conditions are immediately applicable. We also generalize the approach to energy functions $W_{\rm VL}$ in the so-called Valanis-Landel form $W_{\rm VL}(F) = \sum_{i=1}^n w(\lambda_i)$ with $w\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, where $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ denote the singular values of $F$.

The existence of minimizers for energy functionals under various boundary conditions is one of the most important problems in the theory of nonlinear elasticity. In order to avoid contradictions with the underlying mechanical framework, energy functions that model hyperelastic materials are necessarily non-convex, which makes many classical methods for showing the existence of minimizers inaccessible within the hyperelastic framework. Energy functions satisfying several weaker notions of convexity still exhibit some useful properties that can be utilized to demonstrate the existence of minimizers, i.e. ensure the weak lower semicontinuity, while not being in direct violation of fundamental mechanical principles. In particular, Morrey showed that, under appropriate conditions, weak lower semicontinuity in nonlinear elasticity is equivalent to the quasiconvexity of the internal energy. However, since quasiconvexity is difficult to verify or falsify for a given function, the availability of a sufficient criterion and also of a necessary criterion has been proven to be very useful in the past. Hence, some new generalized convexity concepts were introduced in nonlinear elasticity theory: rank-one convexity and polyconvexity. Major interest in these two concepts stems from the observation that polyconvexity implies quasiconvexity, which in turn implies rank-one convexity. However, for $n = 3$, these three notions of convexity are generally not equivalent. For $n = 2$, on the other hand, it is still a major open problem in the calculus of variations whether rank-one convexity implies quasiconvexity. In Chapter 6 we consider *conformally invariant* energies $W$ on the group $\mathrm{GL}^+(2)$ of $2 \times 2$-matrices with positive determinant, i.e. $W\colon \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ such that $W(A\,F\,B) = W(F)$ for all $A, B \in \{a\,R \in \mathrm{GL}^+(2) \,|\, a \in (0,\infty)\,,\ R \in \mathrm{SO}(2)\}\,,$ where $\mathrm{SO}(2)$ denotes the special orthogonal group and we show that for all these functions rank-one convexity is equivalent to polyconvexity. Thus, we have a negative answer to Morrey's conjecture (claiming that there is a function which is rank-one convex but not quasiconvex) in this subclass of nonlinear energies, since polyconvexity implies quasiconvexity. In Chapter 7 we provide an explicit formula for the (notoriously difficult to compute) *quasiconvex envelope* of these functions. Our results, which are based on the representation $W(F) = h(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})$ of $W$ in terms of the singular values $\lambda_1, \lambda_2$ of $F$, are applied to a number of example energies in order to demonstrate the convenience of the eigenvalue-based expression compared to the more common representation in terms of the distortion $\mathbb{K} := \frac{1}{2}\frac{\|F\|^2}{\det F}$. Special cases of our results can be obtained from earlier works by Astala et al. (2008) and Yan (2003).

In Chapter 8 we prove that in the class of all real-valued function $W\colon \mathrm{SL}(2) \to \mathbb{R}$ with $W(RF) = W(FR) = W(F)$ for all $F \in \mathrm{SL}(2)$ and all $R \in \mathrm{SO}(2)$, where $\mathrm{SL}(2)$ and $\mathrm{SO}(2)$ denote the special linear group and the special orthogonal group, respectively, rank-one convexity is equivalent to polyconvexity. Thus, we have a negative answer to Morrey's conjecture in this classes, too. Then, in Chapter 9, we provide an explicit formula for computing the quasiconvex envelope of any real-valued function from the classes studied in Chapter 8. In order to obtain our result, we combine earlier work by Dacorogna and Koshigoe on the relaxation of certain conformal planar energy functions with the result on the equivalence between polyconvexity and rank-one convexity obtained in Chapter 8.

Chapters 10 considers *the volumetric-isochoric split* in planar isotropic hyperelasticity and we give a precise analysis of rank-one convexity criteria for this case, showing that the Legendre-Hadamard ellipticity condition separates and simplifies in a suitable sense. Starting from the classical two-dimensional criterion by Knowles and Sternberg, we can reduce the conditions for rank-one convexity to a family of one-dimensional coupled differential inequalities. In particular, this allows us to derive a simple rank-one convexity classification for generalized Hadamard energies of the type $W(F) = \frac{\mu}{2}\frac{\|F\|^2}{\det F} + f(\det F)$; such an energy is rank-one convex if and only if the function $f$ is convex.

In Chapter 11 we continue to in investigate *the Morrey's open question* whether rank-one convexity already implies quasiconvexity in the planar case. As we have already seen, for some specific families of energies, there are precise conditions known under which rank-one convexity even implies polyconvexity. We will extend some of these findings to the more general family of energies $W : \mathrm{GL}^+(n) \to \mathbb{R}$ with an additive volumetric-isochoric split, i.e.

$$W(F) = W_{\mathrm{iso}}(F) + W_{\mathrm{vol}}(\det F) = \widetilde{W}_{\mathrm{iso}}\left(\frac{F}{\sqrt{\det F}}\right) + W_{\mathrm{vol}}(\det F)\,,$$

which is the natural finite extension of isotropic linear elasticity. Our approach is based on a condition for rank-one convexity which was recently derived from the classical two-dimensional criterion by Knowles and Sternberg and consists of a family of one-dimensional coupled differential inequalities. We identify a number of "least" rank-one convex energies and, in particular, show that for planar volumetric-isochorically split energies with a concave volumetric part, *the question of whether rank-one convexity implies quasiconvexity can be reduced to the open question of whether the rank-one convex energy function*

$$W^+_{\mathrm{magic}}(F) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - \log\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + \log\det F = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 2\log\lambda_{\min}$$

*is quasiconvex*. In addition, we demonstrate that under affine boundary conditions, $W^+_{\mathrm{magic}}(F)$ allows for non-trivial inhomogeneous deformations with the same energy level as the homogeneous solution, and show a surprising connection to the work of Burkholder and Iwaniec in the field of complex analysis.

According to a 2002 theorem by Cardaliaguet and Tahraoui, an isotropic, compact and connected subset of the group $\mathrm{GL}^+(2)$ of invertible $2 \times 2$ – matrices is rank-one convex if and only if it is polyconvex. In an article by Alexander Mielke (2005), it has been conjectured that the equivalence of rank-one convexity and polyconvexity holds for isotropic functions on $\mathrm{GL}^+(2)$ as well, provided their sublevel sets satisfy the corresponding requirements. In Chapter 12 we negatively answer this conjecture by giving an explicit example of a function $W\colon \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ which is not polyconvex, but rank-one convex as well as isotropic with compact and connected sublevel sets.

The third part of this thesis is devoted to the mathematical modelling of *the nonlinear Cosserat elastic shells models*. *Shell and plate* theories are intended for the study of thin bodies, i.e. those bodies whose thickness in one direction is much smaller than their size in the other two orthogonal directions. In Chapter 13 we present several ways to describe the mechanical behaviour of shells and to establish the relevant two-dimensional field equations. The so-called *derivation approach*, which we shall use, starts from a given three-dimensional model of the body and reduces it via physically reasonable constitutive assumptions on the kinematics to a two-dimensional model (i.e. dimensional reduction). The philosophy behind the derivation approach is clearly expressed by Koiter as follows: "Any two-dimensional theory of thin shells is necessarily of an approximate character. An exact two-dimensional theory of shells cannot exist, because the actual body we have to deal with, thin as it may be, is always three-dimensional". A fully three-dimensional resolution of a thin shell problem has remained elusive. Hence, there was a need to come up with a new nonlinear shell model, that combine both effects of *membrane and bending in one system of equations*, as the Koiter model does successfully in the infinitesimal-displacement case. In many cases the need has been felt to devote attention to the rotation field, since rotations are the dominant deformation mode of thin flexible structures. This has led to shell models which include the so-called drilling rotations, meaning that in-plane rotations about the shell filament are also taken into account.

In Chapter 14 we present *a new geometrically nonlinear Cosserat shell model incorporating effects up to order $O(h^5)$* in the shell thickness $h$. The method that we follow is an educated 8-parameter ansatz for the three-dimensional elastic shell deformation with attendant analytical thickness integration, which leads us to obtain completely two-dimensional sets of equations in variational form. We give an explicit form of the curvature energy using the orthogonal Cartan-decomposition of the wryness tensor. Moreover, we consider the matrix representation of all tensors in the derivation of the variational formulation, because this is convenient when the problem of existence is considered, and it is also preferential for numerical simulations. The step by step construction allows us to give a transparent approximation of the three-dimensional parental problem. The resulting 6-parameter isotropic shell model combines membrane, bending and curvature effects at the same time. The Cosserat shell model naturally includes a frame of orthogonal directors, the last of which does not necessarily coincide with the normal of the surface. This rotation-field is coupled to the shell-deformation and augments the well-known Reissner-Mindlin kinematics (one independent director) with so-called in-plane drill rotations, the inclusion of which is a decisive for subsequent numerical treatment and existence proofs. As a major novelty, we determine the constitutive coefficients of the Cosserat shell model in dependence on the geometry of the shell which are otherwise difficult to guess. In Chapter 15 we show *the existence of global minimizers for a geometrically nonlinear isotropic elastic Cosserat 6-parameter shell model*. The proof of the main theorem is based on the direct methods of the calculus of variations using essentially the convexity of the energy in the nonlinear strain and curvature measures. We first show the existence of the solution for the theory including $O(h^5)$ terms. The energy allows us to show the coercivity terms up to order $O(h^5)$ and the convexity of the energy. Secondly, we consider only that part of the energy including $O(h^3)$ terms. In this case the obtained minimization problem is not the same as that previously considered in literature, since the influence of the curved initial shell configuration appears explicitly in the expression of the coefficients of the energies for the reduced two-dimensional variational problem and additional bending-curvature and curvature terms are present. While in the theory including $O(h^5)$ the conditions on the thickness $h$ are those considered in the modelling process and they are independent of the constitutive parameter, in the $O(h^3)$-case the coercivity is proven under some more restrictive conditions under the thickness $h$.

Based on the model given in Chapter 14, in Chapter 16 we develop the corresponding geometrically nonlinear *constrained Cosserat shell model*, we show the existence of minimizers for the $O(h^5)$ and $O(h^3)$ case and we draw some connections to existing models and classical shell strain measures. Notably, the role of the appearing new bending tensor is highlighted and investigated with respect to an invariance condition which will be further strengthened. In Chapter 17 we linearise both, the unconstrained and contrained geometrically nonlinear Cosserat shell model, while in Chapter 18 we clarify some aspects regarding the physical meaning of some strain tensors usually used in literature.

# Rezumat

*Teoria elasticităţii* oferă un cadru matematic pentru modelarea răspunsului diferitelor materiale elastice la stimuli externi. Fiecare model are avantajele şi neajunsurile sale. Până în prezent, nu există un model matematic care să descrie corect şi unitar comportamentul tuturor materialelor elastice. De aceea, fiecare îmbunătăţire a modelelor existente şi a modului în care acestea sunt studiate din punct de vedere matematic reprezintă un pas înainte.

Această teză se încadrează complet în cadrul *hiperelasticităţii*, adică se presupune existenţa unei funcţii (potenţial) $W$ care modelează energia internă din corp, energie care apare ca răspuns la deformarea elastică. Prezenta teză de abilitare este o lucrare cumulativă, conţinând unele rezultate publicate de autor în ultimii şapte ani. Mai precis, partea a doua a prezentei teze conţine unele rezultate publicate de autor (articolele [1, 3, 6-14] din lista de la sfârşitul rezumatului) sau nepublicate încă (vezi capitolul 11) din domeniul *teoriei clasice neliniare ale mediilor elastice izotrope*, în timp ce a treia parte este dedicată unor noi *modele de pânze* construite în cadrul *elasticităţii neliniare a mediilor elastice Cosserat* şi conţine rezultatele publicate în articolele [2, 4, 5] din lista de la sfârşitul rezumatului, dar şi unele rezultate nepublicate încă (Capitolul 17 şi Capitolul 18). Din cauza unor ambiguităţi care par a fi prezente în literatura de specialitate, am organizat teza ca o lucrare de sine stătătoare, incluzând propriile noastre demonstraţii atunci când argumentele deja cunoscute nu au fost formulate sau demonstrate foarte clar.

Prima parte a tezei conţine o scurtă descriere a *activităţii autorului de după susţinerea tezei de doctorat*, precum şi câteva notaţii şi o prezentare generală a cadrului de lucru din teză. În următoarele două părţi am inclus rezultatele obţinute de autor în cele două domenii de cercetare considerate: elasticitatea neliniară clasică şi teoria neliniară a pânzelor elastice Cosserat. În ultima parte a tezei sunt prezentate *viitoarele proiecte (planuri) de cercetare* ale autorului.

În primul capitol formulăm principalele noţiuni şi cerinţe constitutive din elasticitatea neliniară, de exemplu, conceptul de măsuri de deformare, *convexitate de rang unu, policonvexitate, cvasi-convexitate*, inegalitatea Baker-Ericksen, precum şi câteva criterii utile pentru a le demonstra. Relaţiile dintre proprietăţile de convexitate considerate sunt bine cunoscute, dar vor fi enunţate explicit de noi pentru a ne asigura asupra compatibilităţii cu definiţiile folosite în cadrul tezei.

Pornind de la obiectivul iniţial de a găsi cea mai potrivită energie care să răspundă la patru cerinţe principale:

- rezultatele numerice şi analitice obţinute să fie corelate cu rezultatele experimentale,
- să aibă o semnificaţie geometrică,
- să aibă o formă cât mai simplă pentru a putea fi utilizată în practică şi
- să satisfacă anumite cerinţe minimale, astfel încât să fie asigurată existenţa soluţiei,

am fost conduşi să formulăm câteva rezultate interesante privind convexitatea de rang unu şi policonvexitatea pentru anumite clase de energii. În ceea ce priveşte primele trei cerinţe, în unele lucrări recente din literatura de specialitate se arată că energia clasică Hencky (pătratică)

$$W_{\rm H}(F) := \mu \, \|\mathrm{dev}_n \log U\|^2 + \frac{\kappa}{2}\,[\mathrm{tr}(\log U)]^2,$$

unde $\log U$ este *logaritmul matriceal al tensorului de deformare* $U = \sqrt{F^T F}$ corespunzător gradientului de deformare $F = \nabla\varphi$ şi $\|\,.\,\|$ reprezintă norma Frobenius matriceală, se bucură de proprietatea surprinzătoare de a reprezenta *distanţa geodezică* a gradientului de deformare $F$ faţă de grupul rotaţiilor. Cu toate acestea, energia Hencky clasică, nefiind convexă de rang unu (eliptică), nu conduce la un rezultat de existenţă (a patra cerinţă) pentru problema de minimizare corespunzătoare. Cu toate acestea, deoarece convexitatea de rang unu poate fi caracterizată local, în capitolul 2, am identificat unele domenii de elipticitate de rang unu pentru partea izocoră a energiei de deformare Hencky.

Pentru a evita neajunsul energiei Hencky clasice (chiar şi în cazul bidimensional), adică de a nu fi convexă de rang unu, în capitolul 3 am propus câteva energii noi alternative, pe care le-am denumit *energii Hencky exponenţiale*), bazate pe tensorul logaritmic de deformare

$$W_{\text{eH}}(F) = W_{\text{eH}}^{\text{iso}}\Big(\frac{F}{\det F^{\frac{1}{n}}}\Big) + W_{\text{eH}}^{\text{vol}}(\det F^{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{1}) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{k}\, e^{k\,\|\text{dev}_n \log U\|^2} + \dfrac{\kappa}{2\widehat{k}}\, e^{\widehat{k}\,[(\log \det U)]^2} & \text{if } \det F > 0, \\ +\infty & \text{if } \det F \le 0. \end{cases}$$

În cazul planar, s-a demonstrat că energiile propuse se bucură de proprietatea importantă de a fi policonvexe. De asemenea, s-a demonstrat că, în orice dimensiune, coercitivitatea acestora este satisfăcută şi, de asemenea, că, pentru deformări tridimensionale, energiile propuse au unele proprietăţi foarte utile: soluţiile analitice sunt în perfectă concordanţă cu datele experimentale ale lui Bell; tensiunea de forfecare Cauchy pură plană produce o deformare de forfecare pură biaxială şi valoarea 0.5 a raportului Poisson corespunde incompresibilităţii exacte; expresia analitică a presiunii este în concordanţă cu datele clasice de compresiune ale lui Bridgman pentru cauciucul natural; domeniul de convexitate de rang unu este similar cu criteriul von Mises-Huber-Hencky a energiei de deformare maximă. Cu ajutorul acestor noi energii, am demonstrat că în plasticitatea aditivă logaritmică a deformărilor finite la curgere plastică fixată răspunsul pur elastic nu defineşte o problemă de elasticitate neliniară bine pusă, în sensul că nu se păstrează convexitatea de rang unu. Demonstrăm că, deşi o energie elastică $F \mapsto W(F) = \widehat{W}(\log U)$ definită în termenii tensorului logaritmic de deformare $\log U$, unde $U = \sqrt{F^T F}$, este convexă de rang unu peste tot ca funcţie de $F$, noua funcţie $F \mapsto \widetilde{W}(F) = \widehat{W}(\log U - \log U_p)$ nu rămâne convexă de rang unu pentru o anumită deformare plastică $U_p$. Acest lucru este diferit în comparaţie cu plasticitatea multiplicativă (şi cu plasticitatea infinitezimală), unde $F \mapsto W(F\,F_p^{-1})$ rămâne convexă de rang unu la orice distorsiune plastică $F_p$ dacă $F \mapsto W(F)$ este convexă de rang unu ($\nabla u \mapsto \|\text{sym}\nabla u - \varepsilon_p\|^2$ rămâne convexă).

Interpretarea pur geometrică a tensorului logaritmic de deformare $\|\log U\|^2$ sugerează că o ecuaţie constitutivă viabilă din elasticitatea neliniară poate fi derivată dintr-un potenţial energetic elastic care depinde numai de această măsură a deformării, adică o funcţie energetică $W\colon \text{GL}^+(n) \to \mathbb{R}$ de forma $W(F) = \Psi(\|\log U\|^2)$ cu ajutorul unei funcţii adecvate $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Cu toate acestea, deşi astfel de energii s-ar bucură de o serie de proprietăţi remarcabile, arătăm în capitolul 4 că nu este posibil să găsim o funcţie strict monotonă $\Psi$ astfel încât $W$ să fie Legendre-Hadamard eliptică. Similar, considerăm măsura de deformare izocoră $\|\text{dev}_n \log U\|^2$, unde $\text{dev}_n \log U$ este partea deviatorică a lui $\log U$. Deşi recent în cazul planar $n = 2$ a fost construită o energie policonvexă în funcţie de această măsură de deformare, arătăm că pentru $n \ge 3$ nu există o funcţie strict monotonă $\Psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $F \mapsto \Psi(\|\text{dev}_n \log U\|^2)$ să fie policonvexă sau chiar convexă de rang unu. Mai mult, o energie în care partea volumetrică şi partea izocoră sunt aditiv separate, adică $F \mapsto \Psi(\|\text{dev}_n \log U\|^2) + W_{\text{vol}}(\det F)$, nu poate fi convexă de rang unu pentru nicio alegere a energiei $W_{\text{vol}}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şi pentru nicio funcţie strict monotonă $\Psi$.

Din moment ce am văzut că nu există energii convexe de rang-unu de tipul $F \mapsto \Psi(\|\text{dev}_n \log U\|^2) + W_{\text{vol}}(\det F)$, în capitolul 5, prin adaptarea unei metode introduse de Ball, Muite, Schryvers şi Tirry, construim o energie izotropă policonvexă $W\colon \text{GL}^+(n) \to \mathbb{R}$ care este egală cu energia de deformare Hencky clasică într-o vecinătate a matricei identitare $\mathbb{1}$. Extensia poate fi, de asemenea, aleasă să fie coercivă, caz în care teoremele clasice ale lui Ball pentru existenţa deformării ce minimizează funcţionalele energetice sunt imediat aplicabile. De asemenea, generalizăm abordarea la funcţiile energetice $W_{\text{VL}}$ în aşa-numita formă Valanis-Landel $W_{\text{VL}}(F) = \sum_{i=1}^n w(\lambda_i)$ cu $w\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reprezintă valorile singulare ale lui $F$.

Existenţa deformării care minimizează funcţionalele energetice pentru diferite tipuri de condiţii la frontieră este una dintre cele mai importante probleme din teoria elasticităţii neliniare. Pentru a evita neconcordanţa cu realitatea fizică, energiile care modelează materialele hiperelastice sunt în mod necesar neconvexe, ceea ce face ca multe metode clasice de demonstrare a existenţei soluţiei problemelor variaţionale corespunzătoare să nu poată fi folosite în cadrul hiperelasticităţii. Energiile care satisfac unele proprietăţi mai slabe decât convexitatea pot fi utilizate pentru a demonstra existenţa soluţiei problemelor variaţionale, adică asigură slaba inferior semicontinuitate, fără a încălca principiile mecanice fundamentale. În particular, Morrey a arătat că, în condiţii adecvate, slaba inferior semicontinuitate în elasticitatea neliniară este echivalentă cu cvasi-convexitatea energiei interne. Cu toate acestea, deoarece cvasi-convexitatea este dificil de verificat sau de contrazis pentru o funcţie dată, disponibilitatea unui criteriu suficient şi, de asemenea, a unui criteriu necesar s-a dovedit a fi foarte utilă. Prin urmare, în teoria elasticităţii neliniare au fost introduse câteva noi concepte de convexitate generalizată: convexitatea de rang unu şi policonvexitatea. Interesul major pentru aceste două concepte provine din observaţia conform căreia policonvexitatea implică cvasi-convexitatea, care la rândul ei implică convexitatea de rang unu. Cu toate acestea, pentru $n = 3$, aceste trei noţiuni de convexitate nu sunt, în general, echivalente. Pe de altă parte, pentru $n = 2$, întrebarea dacă convexitatea de rang unu implică cvasi-convexitatea este o problemă majoră încă deschisă în calculul variaţional. În capitolul 6 considerăm energiile *invariante conform* $W$ pe grupul $\mathrm{GL}^+(2)$ de matrice $2 \times 2$ cu determinant pozitiv, adică $W\colon \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ astfel încât $W(A\,F\,B) = W(F)$ for all $A, B \in \{a\,R \in \mathrm{GL}^+(2)\,|\,a \in (0,\infty)\,,\ \ R \in \mathrm{SO}(2)\}$, unde $\mathrm{SO}(2)$ reprezintă grupul ortogonal special şi arătăm că, pentru toate aceste funcţii, convexitatea de rang unu este echivalentă cu policonvexitatea. Astfel, avem un răspuns negativ la conjectura lui Morrey (care susţine că există o funcţie care este convexă de rang unu, dar nu cvasi-convexă) în această subclasă de energii neliniare, deoarece policonvexitatea implică cvasi-convexitatea pentru acest tip de energii. În capitolul 7 oferim o formulă explicită pentru *înfăşurătoarea cvasi-convexă* (despre care se ştie că e e dificil de calculat în general) a acestor funcţii. Rezultatele noastre, care se bazează pe reprezentarea $W(F) = h(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})$ a lui $W$ în termenii valorilor singulare $\lambda_1, \lambda_2$ ale lui $F$, sunt aplicate unui număr de energii pentru a demonstra utilitatea expresiei bazate pe valori proprii în comparaţie cu reprezentarea mai des utilizată în termenii distorsiunii $\mathbb{K} := \frac{1}{2}\frac{\|F\|^2}{\det F}$. Drept cazuri speciale ale rezultatelor noastre se obţin rezultatele stabilite anterior de Astala et al. (2008) şi Yan (2003).

În capitolul 8 demonstrăm că în clasa tuturor funcţiilor cu valori reale $W\colon \mathrm{SL}(2) \to \mathbb{R}$ cu $W(RF) = W(FR) = W(F)$ pentru toate $F \in \mathrm{SL}(2)$ şi toate $R \in \mathrm{SO}(2)$, unde $\mathrm{SL}(2)$ şi $\mathrm{SO}(2)$ reprezintă grupul liniar special şi, respectiv, grupul ortogonal special, convexitatea de rang unu este echivalentă cu policonvexitatea. Astfel, avem un răspuns negativ la conjectura lui Morrey şi în aceste clase. Apoi, în capitolul 9, deducem o formulă explicită pentru calcularea înfăşurătorii cvasi-convexe a oricărei funcţii cu valori reale din clasele studiate în capitolul 8. Pentru a obţine rezultatul nostru, combinăm lucrările anterioare ale lui Dacorogna şi Koshigoe privind relaxarea anumitor energii planare conforme cu rezultatul privind echivalenţa dintre policonvexitatea şi convexitatea de rang unu obţinut în capitolul 8.

Capitolele 10 consideră *energii izotrope în care partea izocoră şi partea volumetrică sunt cuplate aditiv* în hiperelasticitatea plană şi oferim o analiză precisă a criteriilor de convexitate de rang unu pentru ele, arătând că elipticitatea Legendre-Hadamard se simplifică şi se distribuie celor două părţi ale energiei, într-un sens adecvat. Pornind de la criteriul clasic bidimensional al lui Knowles şi Sternberg, putem reduce condiţiile de convexitate de rang unu la o familie de inegalităţi diferenţiale cuplate unu-dimensionale. În special, acest lucru ne permite să obţinem o caracterizare simplă a convexităţii de rang unu pentru energiile Hadamard generalizate de tipul $W(F) = \frac{\mu}{2}\frac{\|F\|^2}{\det F} + f(\det F)$: este convexă de rang unu dacă şi numai dacă funcţia $f$ este convexă.

În capitolul 11 continuăm să investigăm *conjectura lui Morrey.* După cum am văzut deja, pentru anumite familii specifice de energii, se cunosc condiţii precise în care convexitatea de rang unu implică chiar şi policonvexitatea. Vom extinde unele dintre aceste constatări la familia mai generală de energii $W : \mathrm{GL}^+(n) \to \mathbb{R}$, adică pentru *energii izotrope în care partea izocoră şi partea volumetrică sunt cuplate aditiv*,

$$W(F) = W_{\mathrm{iso}}(F) + W_{\mathrm{vol}}(\det F) = \widetilde{W}_{\mathrm{iso}}\left(\frac{F}{\sqrt{\det F}}\right) + W_{\mathrm{vol}}(\det F)\,,$$

şi care sunt extensii naturale ale elasticităţii liniare izotrope. Identificăm un număr de energii convexe de rang unu şi arătăm că pentru energii izotrope în care partea izocoră şi partea volumetrică sunt cuplate aditiv, partea volumetrică fiind concavă, *întrebarea dacă convexitatea de rang unu implică cvasi-convexitatea* poate fi redusă la întrebarea deschisă dacă energia convexă de rang unu

$$W^+_{\mathrm{magic}}(F) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - \log\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + \log\det F = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 2\log\lambda_{\min}$$

este cvasi-convexă. În plus, demonstrăm că $W^+_{\mathrm{magic}}(F)$ permite deformări neomogene non-triviale cu acelaşi nivel de energie ca şi soluţia omogenă, şi arătăm o legătură surprinzătoare cu lucrările lui Burkholder şi Iwaniec în domeniul analizei complexe.

Conform unei teoreme din 2002 a lui Cardaliaguet şi Tahraoui, o submulţime izotropă, compactă şi conexă a grupului $\mathrm{GL}^+(2)$ este convexă de rang unu dacă şi numai dacă este policonvexă. Într-un articol al lui Alexander Mielke (2005), s-a formulat conjectură care afirmă că echivalenţa dintre convexitatea de rang unu şi policonvexitate este valabilă şi pentru funcţiile izotrope pe $\mathrm{GL}^+(2)$ pentru care submulţimile de nivel sunt compacte şi conexe. În capitolul 12 răspundem negativ la această conjectură prin oferirea unui exemplu explicit de funcţie izotropă $W\colon \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ care nu este policonvexă, deşi este convexă de rang unu având submulţimile de nivel compacte şi conexe.

Cea de-a treia parte a acestei teze este dedicată modelării matematice a *pânzelor elastice neliniare Cosserat*. *Teoriile pânzelor şi ale plăcilor* sunt destinate studiului corpurilor subţiri, adică acele corpuri a căror grosime într-o direcţie este mult mai mică decât dimensiunea lor în celelalte două direcţii ortogonale. În capitolul 13 prezentăm mai multe modalităţi de a descrie comportamentul mecanic al pânzelor şi de a stabili ecuaţiile bidimensionale. Metoda pe care o vom utiliza porneşte de la un model tridimensional dat pentru studierea deformării corpului elastic şi îl reduce, prin intermediul unor ipoteze constitutive rezonabile privind cinematica şi realitatea fizică, la un model bidimensional (adică reducere dimensională). Filozofia care stă la baza abordării considerate de noi este clar exprimată de Koiter după cum urmează: "Orice teorie bidimensională a pânzelor subţiri are în mod necesar un caracter aproximativ. O teorie bidimensională exactă a pânzei nu poate exista, deoarece corpul real cu care avem de-a face, oricât de subţire ar fi, este întotdeauna tridimensional". A fost nevoie de un nou model neliniar al pânzelor, care să combine ambele efecte ale deformării membranare şi ale încovoierii într-un singur sistem de ecuaţii, aşa cum face cu succes modelul Koiter în cazul deplasării infinitezimale. În multe cazuri, s-a simţit nevoia de a acorda atenţie câmpului rotaţiilor, deoarece rotaţiile sunt modul de deformare dominant al structurilor subţiri şi flexibile. Acest lucru a condus la modele ale pânzelor care includ aşa-numitele rotaţii de burghiu, ceea ce înseamnă că sunt luate în considerare şi rotaţiile în plan în jurul filamentului pânzei.

În capitolul 14 prezentăm *un nou model neliniar din punct de vedere geometric de pânze Cosserat, care încorporează efecte de până la ordinul $O(h^5)$* în grosimea $h$ a pânzei. Metoda pe care o urmăm este bazată pe alegerea unui ansatz cu 8 parametri pentru deformarea tridimensională a pânzei elastice şi pe integrarea de-a lungul grosimii, ceea ce ne conduce la obţinerea unei probleme variaţionale complet bidimensionale. Oferim o formă explicită a energiei de curbură folosind descompunerea ortogonală Cartan a tensorului de distorsiune. În plus, luăm în considerare reprezentarea matriceală a tuturor tensorilor în derivarea formulării variaţionale, deoarece acest lucru este convenabil atunci când se studiază existenţa soluţiei, şi este, de asemenea, preferabilă pentru simulările numerice. Construcţia pas cu pas ne permite să oferim o aproximare transparentă a problemei tridimensionale de la care s-a plecat. Modelul rezultat de pânze cu 6 parametri combină unitar efectele membranare, de încovoiere şi de curbură. Modelul de pânze Cosserat include în mod natural directorii unui reper ortogonal, niciunul coincizând neapărat cu normala la suprafaţă. Acest câmp de rotaţie este cuplat în cazul deformarii pânzelor şi generalizează binecunoscuta cinematică Reissner-Mindlin (un singur director independent) cu aşa-numitele rotaţii de burghiu în plan, a căror includere este decisivă pentru tratamentul numeric şi demonstrarea existenţei ulterioare. Ca o noutate majoră, determinăm coeficienţii constitutivi ai modelului de pânză Cosserat, care altfel sunt greu de ghicit, în funcţie de geometria pânzei şi de coeficienţii reali (tridimensionali) ai corpului real. În capitolul 15 arătăm *existenţa soluţiei problemei variaţionale pentru modelul neliniar de pânze elastice izotrope Cosserat*. Demonstraţia teoremei principale se bazează pe metodele directe ale calculului variaţiilor folosind în mod esenţial convexitatea energiei în măsurile neliniare de deformaţie şi curbură. Mai întâi arătăm existenţa soluţiei pentru teoria care include termeni de ordin $O(h^5)$. Energia ne permite să arătăm coercitivitatea şi convexitatea energiei. În al doilea rând, considerăm doar acea parte a energiei care include termenii de ordin $O(h^3)$. În acest caz, problema de minim obţinută nu este aceeaşi cu cea considerată anterior în literatura de specialitate, deoarece influenţa configuraţiei curbe iniţiale a pânzei apare explicit în expresia coeficienţilor energiilor şi sunt prezenţi termeni suplimentari ce descriu curbura şi încovoierea. În timp ce în teoria care include termeni de ordinul $O(h^5)$ condiţiile asupra grosimii $h$ sunt de tipul celor considerate în procesul de modelare şi sunt independente de parametrii constitutivi, în cazul $O(h^3)$ coercitivitatea este dovedită în nişte condiţii mai restrictive asupra grosimii $h$.

Pe baza modelului prezentat în capitolul 14, în capitolul 16 dezvoltăm modelul geometric neliniar al pânzelor în *teoria restrânsă a mediilor Cosserat*, arătăm existenţa soluţiei problemelor variaţionale pentru cazul $O(h^5)$ şi $O(h^3)$. În plus, facem unele conexiuni cu modelele existente şi cu măsurile clasice de deformare a pânzelor. În special, rolul noului tensor de încovoiere care apare este evidenţiat şi investigat în raport cu o condiţie de invarianţă cerută de realitatea fizică. În capitolul 17 liniarizăm atât modelul Cosserat neconstrâns cât şi cel restrâns, în timp ce în capitolul 18 clarificăm unele aspecte referitoare la semnificaţia fizică a unor tensori de deformare utilizaţi de obicei în literatura de specialitate.

## The habilitation thesis is based on the following articles of the author (Teza de abilitare se bazează pe următoarele articole ale autorului)


1. J. Voss, I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff. A rank-one convex, non-polyconvex isotropic function on GL+(2) with compact connected sublevel sets, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 152, pp. 356-381, 2022.

2. I.D. Ghiba, M. Birsan, P. Lewintan, P. Neff, A Constrained Cosserat Shell Model up to Order $O(h^5)$.: Modelling, Existence of Minimizers, Relations to Classical Shell Models and Scaling Invariance of the Bending Tensor, J. Elasticity, 146, pp. 83–141, 2021.

3. J. Voss, I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff. Sharp rank-one convexity conditions in planar isotropic elasticity for the additive volumetric-isochoric split, J. Elasticity, 143, pp. 301-335, 2021.

4. I.D. Ghiba, M. Bîrsan, P. Lewintan, P. Neff. The isotropic Cosserat shell model including terms up to $O(h^5)$. Part II: Existence of minimizers, J. Elasticity, 142, pp. 263–290, 2020.

5. I.D. Ghiba, M. Bîrsan, P. Lewintan, P. Neff. The isotropic Cosserat shell model including terms up to $O(h^5)$. Part I: Derivation in matrix notation, J. Elasticity, 142, pp. 201–262, 2020.

6. R.J. Martin, J. Voss, I.D. Ghiba, O. Sander, P. Neff, The quasiconvex envelope of conformally invariant planar energy functions in isotropic hyperelasticity, J. Nonlinear Sci., 30, pp. 2885–2923, 2020.

7. R.J. Martin, J. Voss, I.D. Ghiba, P. Neff, Quasiconvex relaxation of isotropic functions in incompressible planar hyperelasticity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 150, pp. 2620 – 2631, 2020.

8. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, A polyconvex extension of the logarithmic Hencky strain energy, Anal. Appl., 17, pp. 349-361, 2019.

9. I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity in isotropic planar incompressible elasticity, J. Math. Pures Appl., 116, pp. 88-104, 2018.

10. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, A non-ellipticity result, or the impossible taming of the logarithmic strain measure, Int. J. Non-Linear Mech., 102, pp. 147-158, 2018.

11. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 147 (3), pp. 571-597, 2017.

12. P. Neff, I.D. Ghiba. Loss of ellipticity in additive logarithmic finite strain plasticity, Int. J. Non-Linear Mech., 81, pp. 122-128, 2016.

13. I.D. Ghiba, P. Neff, R.J. Martin. An ellipticity domain for the distortional Hencky-logarithmic strain energy, Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., 471, doi: 10.1098/rspa.2015.0510, 2016.

14. I.D. Ghiba, P. Neff, M. Silhavy. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Improvement of the proof of planar polyconvexity, Int. J. Non-Linear Mech., 71, pp. 48-51, 2015.

15. P. Neff, J. Lankeit, I.D. Ghiba, R. Martin, D. Steigmann. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part II: Coercivity, planar polyconvexity and existence of minimizers, ZAMP, 66, pp. 1671-1693, 2015.

16. P. Neff, I.D. Ghiba, J. Lankeit. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank-one convexity, J. Elasticity, 121, pp. 143-234, 2015.