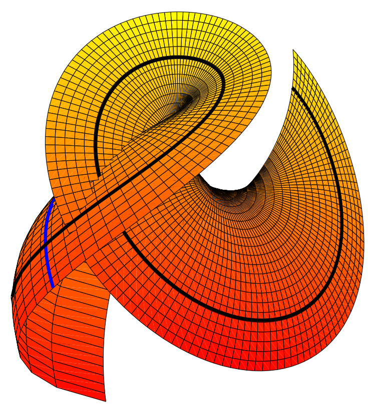
Marian Ioan Munteanu



Submanifolds of special types in 3-dimensional (pseudo-) Riemannian manifolds

Habilitation thesis

Iaşi, 2012

Contents

Rezumat

În această teză am adunat rezultate recente obţinute de autor în ultimii cinci ani şi câteva idei de lucru care se doresc a fi dezvoltate în cercetarea viitoare.

Studiul proprietăţilor geometrice ale suprafeţelor în spaţii omogene de dimensiune 3 reprezintă un subiect actual de mare interes. De fapt, studiul suprafeţelor în spaţii 3-dimensionale din aşa numita *lista lui Thurston* s-a dezvoltat considerabil în ultima perioadă. Cu siguranţă unul din motivele importante care stau la baza acestui fapt este demonstrarea conjecturii Thurston care asigură rolul dominant al acestor spaţii în geometria spaţiilor de dimensiune 3. Elemente importante (curbură, geodezice, grupuri de olonomie) ale unor spaţii precum spaţiul Heisenberg Nil_3 sau spaţiul Sol_3 au reapărut recent în atenţia matematicienilor, dar geometria acestor spaţii este departe de a fi complet cunoscută. Alte probleme care provin din diverse fenomene fizice pot fi modelate cu ajutorul acestor spaţii, iar acest fapt face ca studiul curbelor şi suprafeţelor în spaţii omogene să fie foarte atractiv.

Teza este structurată în trei părţi.

Primul capitol este dedicat studiului suprafeţelor în anumite spaţii 3-dimensionale care formează unghi constant cu o direcţie preferenţială. Spre exemplu, când spaţiul ambient este de tip produs $\mathbb{M}(c) \times \mathbb{R}$, unde $\mathbb{M}(c)$ este de curbură Gaussiană constantă, direcţia este considerată axa $\mathbb{R}$. Pe de altă parte, când spaţiul ambient este grupul Heisenberg Nil_3 sau grupul Lie Sol_3, unghiul este considerat între normala la suprafaţă şi un anumit câmp vectorial (Killing) stâng invariant. O problemă analogă a fost studiată (ca generalizare a problemei Lancret) în spaţiul euclidian 3-dimensional, anume clasificarea tuturor curbelor şi suprafeţelor care formează unghi constant cu câmpul vectorial de rotaţie $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, unde x, y, z sunt coordonate globale pe $\mathbb{E}^3$. Se obţine astfel o nouă caracterizare a supafeţei Dini. În final studiem acele suprafeţe care formează unghi constant cu vectorul de poziţie.

Rezultatele prezentate în capitolul al doilea extind, într-un anumit sens pe cele descrise în primul capitol şi anume: Să considerăm o suprafaţă de unghi constant în $\mathbb{M}(c) \times \mathbb{R}$. Proiectând direcţia fixă $\mathbb{R}$ pe planul tangent la suprafaţă (notăm această proiecţie cu U), obţinem că U este direcţie principală având curbura principală corespunzătoare egală cu 0. Considerând că U rămâne direcţie principală, însă curbura principală corespunzătoare diferită de 0 (este în general o funcţie pe suprafaţă), vom numi U *direcţie principală canonică*.

În ultimul capitol se descriu câteva aspecte legate de curbele magnetice în spaţii 3-dimensionale. Suntem interesaţi de curbe γ, parametrizate cu parametrul lungime de arc, în spaţii (pseudo)-Riemanniene 3-dimensionale satisfăcând ecuaţia Lorentz $\nabla_{\gamma'}\gamma' = V \times \gamma'$, unde ∇ reprezintă conexiunea Levi Civita pe varietate, V este un câmp Killing iar $\times$ este un produs vectorial pe varietate. Clasificăm curbele magnetice în spaţiul euclidian 3-dimensional (când V este câmpul Killing de rotaţie), în $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (unde am definit în mod natural un produs vectorial) şi în cele din urmă în spaţiul Minkowski $\mathbb{E}^3_1$, unde câmpul vectorial Killing este $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$, cu a, b, c constante reale. Demonstrarea rezultatului principal se face în acord cu cauzalitatea lui V.

Planul de cercetare viitoare pe care îl propunem constă în câteva idei care sunt o continuare firească a cercetării autorului din ultimii patru ani, atât ca singur autor cât şi în colaborare cu cercetători de la diverse universităţi de prestigiu din Europa, Asia sau Statele Unite ale Americii, de la care a avut şansa de a învăţa nu numai geometrie, dar şi alte lucruri interesante şi totodată utile într-o carieră. Majoritatea lucrărilor folosite în această teză au fost realizate în cadrul unor granturi de cercetare naţionale (CEEX ET 5883/20062008, CNCSIS UEFISCSU Grant Nr. PN-II ID 398/2007-2010) şi internaţionale (Fulbright Senior Research Grant nr. 498/2010). O parte din problemele propuse spre abordare în viitorul apropiat se regăsesc ca obiective în grantul de cercetare câştigat de autor la competiţia din 2011 la Unitatea Executivă pentru Finanţarea Învăţământului Superior, a Cercetării, Dezvoltării şi Inovării (UEFISCDI), proiect nr. PN-II-RU-TE-2011-3-0017.

Doresc să mulţumesc şi să aduc recunoştinţă colaboratorilor mei de până acum, anume Pablo Alegre (Sevilla, Spania), Bang-Yen Chen (Michigan, USA), Franki Dillen (Leuven, Belgia), Johan Fastenakels (Leuven, Belgia), Jun-ichi Inoguchi (Yamagata, Japonia), Rafael López (Granada, Spania), Paola Matzeu (Cagliari, Italia), Joeri van der Veken (Leuven, Belgia), Luc Vrancken (Leuven, Belgia).

Mulţumiri se cuvin şi tinerilor cercetători Simona Luiza Druţă-Romaniuc, Raluca Mocanu, Ana Irina Nistor şi Vincenzo Saltarelli cu speranţa continuării colaborării deja existente.

În final, mulţumesc colegilor mei, în special Ioan Bucătaru, Oana Constantinescu, Mircea Crâşmăreanu, pentru numeroasele discuţii avute pe diverse teme, pentru toate sfaturile şi încurajările aduse in ultimii ani, pentru răbdarea fără margini de care au dat dovadă până acum, pentru atmosfera plăcută creată la catedra de geometrie.

Mai, 2012

Marian Ioan Munteanu
Facultatea de Matematică
Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iaşi
Romania

Résumé

In this Thesis we present the recent results obtained by the author in last four years and some future plans of research.

The exploration of the geometric properties of surfaces embedded in homogeneous spaces of dimension 3 represents a contemporary subject of wide interest. Actually, the study of surfaces in 3-dimensional Thurston geometries has grown considerably in the last decade. Maybe the most important reason is the announced proof of the Thurston geometric conjecture which ensures the dominant role of these spaces among 3D geometries. Fundamental quantities in homogeneous spaces Nil_3 and Sol_3, such as curvatures, geodesics or holonomy groups, came also recently in the attention of mathematicians, but their geometry is far to be completely known. Some other problems arising from physical phenomena may be modeled in these spaces and this aspect makes the study of curves and surfaces in homogeneous spaces (in particular space forms) more attractive.

The Thesis is structured in three parts.

First chapter is devoted to the study of surfaces (in certain 3-spaces) making constant angle with some distinguished direction. For example, when the ambient space is of product type $\mathbb{M}(c) \times \mathbb{R}$ (with $\mathbb{M}(c)$ having constant Gaussian curvature) the direction is considered to be the $\mathbb{R}$-axis. On the other hand, when the ambient is the Heisenberg group Nil_3 or the solvable group Sol_3, the angle is considered between the normal of the surface and a certain (Killing) left invariant vector field. A similar problem was studied (as generalization of the Lancret problem) in the Euclidean 3-space, namely to classify all curves and surfaces making constant angle with the rotation vector field $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ (where x, y, z are global coordinates on $\mathbb{E}^3$). We obtained a new characterization for the Dini surfaces. Finally, we have studied surfaces whose normal makes a constant angle with the position vector.

The results presented in the second chapter extend in a certain way the previous ones in the following sense. Consider a constant angle surface in $\mathbb{M}(c) \times \mathbb{R}$. Projecting the fixed direction $\mathbb{R}$ on the tangent plane to the surface and denoting it by U, we get that U is a principal direction with null corresponding principal curvature. Assuming that U remains a principal direction but the corresponding principal curvature is different from zero - the angle function is no longer constant - we denominate U a *canonical principal direction*.

In the last chapter we start the study of magnetic curves in 3-dimensional spaces. We investigate curves γ (parameterized by arc length) in 3-dimensional (pseudo)-Riemannian manifold satisfying the Lorentz equation $\nabla_{\gamma'}\gamma' = V \times \gamma'$, where ∇ is the Levi Civita connection, V is a Killing vector field, and $\times$ is a cross product on the manifold. We classify magnetic curves in the Euclidean 3-space (when V is the rotation Killing vector field), in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (where we define a natural cross product) and finally in a Minkowski 3-space $\mathbb{E}^3_1$, where the Killing vector is $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$, a, b, c being real constants. The discussion is made according to the causality of V.

The plan we propose for the near future represents a natural continuation of the research developed by the author in last 4 years, either by himself or in collaboration with researchers at famous Universities from Europe, Asia or USA from whom he had the chance to learn not only Geometry but also other useful things one needs in a career. Almost all papers used in this Thesis were supported by research grants: CEEX ET 5883/20062008, CNCSIS UEFISCSU Grant No. PN-II ID 398/2007-2010 and Fulbright Senior Research Grant no. 498/2010. Some of the problem we propose here as future work are objectives in a research grant obtained by the author (as Principal Investigator) in fall 2011 from the Romanian National Authority for Scientific Research, CNCS-UEFISCDI, project no. PN-II-RU-TE-2011-3-0017.

I wish to express my sincere gratitude to my co-authors Pablo Alegre (Sevilla, Spain), Bang-Yen Chen (Michigan, USA), Franki Dillen (Leuven, Belgium), Johan Fastenakels (Leuven, Belgium), Jun-ichi Inoguchi (Yamagata, Japan), Rafael López (Granada, Spain), Paola Matzeu (Cagliari, Italy), Joeri van der Veken (Leuven, Belgium), Luc Vrancken (Leuven, Belgium).

I also thank to young researchers Simona Luiza Druţă-Romaniuc, Raluca Mocanu, Ana Irina Nistor, and Vincenzo Saltarelli with the hope to continue the existent collaboration.

Last but not least, I wish to thank my colleagues, especially Ioan Bucătaru, Oana Constantinescu, Mircea Crâşmăreanu, for several useful discussions we had, for their strong encouragements during last five years and for their endless patience and sustaining.

May, 2012

Marian Ioan Munteanu
Faculty of Mathematics
University Alexandru Ioan Cuza of Iaşi
Romania