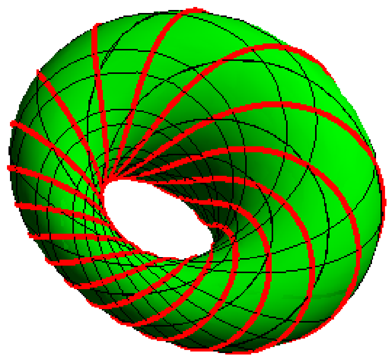
Marian Ioan Munteanu



Recent developments on magnetic curves in (pseudo-) Riemannian manifolds

Habilitation thesis

Iaşi, 2014

Contents

Rezumat

Această teză reprezintă o colecţie de rezultate recente obţinute de autor în ultimii patru ani şi câteva idei de lucru care vor fi dezvoltate în cercetarea viitoare. Subiectul acestei teze este studiul curbelor magnetice în varietăţi (pseudo)-Riemanniene şi generalizarea acestei noţiuni la dimensiuni mai mari, definind ceea ce noi am numit *aplicaţii magnetice*. Cercetarea in acest domeniu a început în anul 2010, iar lucrările au fost realizate ca singur autor sau în colaborare cu cercetători de la Universităţi din Europa şi Asia, de la care am învăţat, pe de o parte geometrie diferenţială, iar pe de altă parte lucruri utile în cariera de cercetător. Majoritatea rezultatelor au fost obţinute în cadrul unor granturi de cercetare, cum ar fi Fulbright Senior Research Grant nr. 498/2010 şi grant CNCS-UEFISCDI nr. PN-II-RU-TE-2011-3-0017.

Vom descrie pe scurt cadrul în care se situează subiectul nostru. Problema *Landau-Hall* reprezintă studiul mişcării pe o suprafaţă, a unei particule încărcate printr-un câmp magnetic constant şi static. Problema clasică se referă la mişcarea particulei încărcate în planul euclidian. Mişcarea particulei este descrisă de ecuaţia lui Newton.

O problemă interesantă este studiul aspectelor geometrice ale problemei Laundau-Hall pe diferite varietăţi Riemanniane. Mişcarea are loc în câmp magnetic, cel electric fiind ignorat. Prin urmare, se consideră o varietate Riemanniană (M, g), de dimensiune n, şi un câmp magnetic F pe M. Acesta este modelat de o 2-formă închisă F pe M, căruia i se asociază aşa numita *forţă Lorentz*, adică un câmp tensorial Φ, de tip $(1, 1)$ pe M, definit prin

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M).$$

Astfel, traiectoriile magnetice ale lui F sunt curbe γ pe M care satisfac *ecuaţia Lorentz*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \Phi(\gamma').$$

Din punctul de vedere al sistemelor dinamice, curbele magnetice generalizează geodezicele. Mai precis, geodezicele corespund traiectoriilor unei particule care se mişcă liber, în absenţa unui câmp magnetic ($F = 0$). Curbele magnetice reprezintă liniile de flux ale unui sistem dinamic (M, g, F) asociat câmpului magnetic.

Un caz special de câmpuri magnetice pe varietăţi Riemanniene este dat de 2-formele F paralele, numite *câmpuri magentice uniforme*. De exemplu, în dimensiune 2, dacă multiplicăm elementul de

arie cu o constantă, obţinem un câmp magnetic uniform. Traiectoriile magnetice pe suprafeţe de curbură gaussiană constantă ($\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2(c)$, $\mathbb{H}^2(-c)$, $c > 0$) sunt cunoscute.

O altă clasă importantă de câmpuri magnetice se obţine în dimensiune 3, deoarece 2-formele pot fi identificate natural, via operatorul $\star$ al lui Hodge, cu câmpurile vectoriale cu divergenţă nulă. În particular, câmpurile vectoriale Killing determină o clasă importantă de câmpuri magnetice.

Teza este structurată în cinci capitole.

Primul capitol conţine câteva rezultate referitoare la curbe magnetice pe varietăţi pseudo-Riemanniene de dimensiune 2 şi 3.

Într-o lucrare recentă, din 2005, M.Barros, J.L. Cabrerizo, M.Fernández şi A.Romero au studiat problema Landau-Hall pentru suprafeţe de rotaţie. Noi propunem un studiu asemănător pentru o altă clasă de suprafeţe numite suprafeţe *canal*. Acestea sunt generate de o curbă γ şi sunt obţinute ca fiind înfăşurătoarea sferelor cu raze variabile şi cu centrele pe curba γ. Acest concept este important atât în geometria diferenţială cât şi în geometria computaţională.

În continuare studiem curbele γ în anumite spaţii pseudo-Riemanniene de dimensiune 3 care satisfac ecuaţia Lorentz $\nabla_{\gamma'}\gamma' = V \times \gamma'$, unde ∇ este conexiunea Levi Civita, V este un câmp vectorial Killing, iar $\times$ este un produs vectorial definit pe varietate. Mai precis, clasificăm curbele magnetice în spaţiul euclidian când V reprezintă câmpul vectorial de rotaţie, în $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (unde definim un produs vectorial natural) şi în spaţiul Minkowski de dimensiune 3, unde un câmp vectorial Killing este considerat $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$, a, b, c fiind constante reale. Discuţia are loc în funcţie de cauzalitatea lui V.

În capitolul 2 studiem curbe magnetice pe varietăţi Sasakiene şi cosimplectice de dimensiune arbitrară. Obţinem clasificarea tuturor curbelor magnetice de contact în varietăţi Sasakiene şi facem o analiză detaliată a traiectoriilor corespunzătoare câmpurilor magnetice de contact în forme spaţiale Sasakiene. Pentru fiecare caz, demonstrăm rezultate de reducere a codimensiunii. Spaţiul euclidian de dimensiune 3 şi varietatea produs $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ admit structuri cosimplectice compatibile cu metrica. Uniformizăm rezutatele descrise în capitolul 1, clasificând traiectoriile magnetice în varietăţi produs $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ înzestrate cu o structură cosimplectică standard. Apoi studiem curbele magnetice pe o varietate cosimplectică de dimensiune arbitrară şi generalizăm rezultatele precedente pentru spaţii ambient de forma $\overline{M}^{2n}(k) \times \mathbb{R}$, unde $\overline{M}^{2n}(k)$ este o varietate Kähler de curbură olomorfă constantă k. Capitolul se încheie cu un rezultat de reducere a codimensiunii pentru câmpuri magnetice pe varietăţi cosimplectice de forma $\overline{M}^{2n}(k) \times \mathbb{R}$.

În capitolul 3 suntem interesaţi de periodicitatea unor traiectorii magnetice. În 2009, J.L. Cabrerizo, M. Fernández şi J.S. Gómez au studiat orbite periodice ale câmpurilor magnetice de contact pe sfera unitate $\mathbb{S}^3$. Noi studiem curbele magnetice periodice în forme spaţiale Sasakiene eliptice şi obţinem un principiu de cuantizare a traiectoriilor magnetice pe sfere Berger. Demonstrăm că mulţimea tuturor curbelor magnetice periodice pe o formă spaţială Sasakiană $\mathcal{M}^3(c)$, pentru $c > -3$, poate fi cuantizată în mulţimea numerelor raţionale, generalizând astfel rezultatul obţinut de Cabrerizo et al. În partea a doua a capitolului, considerăm spaţiul anti-de Sitter $\mathbb{H}^3_1$ şi fibrarea

Hopf $h : \mathbb{H}^3_1(1) \to \mathbb{H}^2(1/2)$. Folosind scrierea cu para-cuaternioni, studiem curbele magnetice asociate câmpului vectorial Hopf. Obţinem o clasificare completă a curbelor magnetice de tip light-like, arătând în particular existenţa unor curbe periodice.

În capitolul 4, generalizăm noţiunea de curbă magnetică la aplicaţii magnetice între varietăţi Riemanniene. Să reamintim că o geodezică γ pe o varietate Riemanniană (M, g) este caracterizată ca fiind punct critic al integralei acţiunii sau a energiei cinetice

$$E(\gamma) = \int \frac{1}{2}|\gamma'(s)|^2 \, ds.$$

Noţiunea de geodezică se extinde la aplicaţii între varietăţi Riemanniene, în modul următor. O aplicaţie $f : (N, h) \to (M, g)$ între varietăţi Riemanniene se numeşte *armonică* dacă este punct critic pentru funcţionala energiei

$$E(f) = \int_N \frac{1}{2}|df|^2 dv_h,$$

pentru variaţii cu suport compact. Ecuaţiile Euler-Lagrange ale acestei probleme variaţionale sunt date prin $\tau(f) := \mathrm{trace}_h \nabla df = 0$. Cantitatea $\tau(f)$ se numeşte *câmpul de tensiune* al lui f.

Curbele magnetice sunt de asemenea generalizări ale geodezicelor. De aceea, am dorit să definim un obiect care să extindă atât noţiunea de curbă magnetică precum şi pe cea de aplicaţie armonică. Definim astfel aplicaţiile magnetice. Dacă domeniul de definiţie este 1-dimensional, atunci aplicaţiile magnetice se reduc la curbe magnetice. Dacă însă domeniul de definiţie este arbitrar, dar câmpul magnetic este nul, obţinem aplicaţiile armonice. Dăm de asemenea numeroase exemple care să susţină noţiunea introdusă.

Ultimul capitol constă în două părţi.

În prima parte prezentăm o lucrare în curs de realizare despre câmpuri magnetice asociate câmpurilor vectoriale Reeb pe o varietate quasi-paraSasakiană de dimensiune 3. Se discută separat 3 cazuri în funcţie de cauzalitatea curbei. Încheiem capitolul şi prin urmare şi prezenta teză, cu câteva idei despre o cercetare viitoare (în colaborare) asupra curbelor magnetice pe fibratul tangent în sfere la o varietate Riemanniană. Ne vom concentra atenţia asupra spaţiului $U\mathbb{S}^n$, în particular $U\mathbb{S}^2$ pentru care vom obţine generalizări ale teoremei Klingenberg-Sasaki referitoare la geodezice.

Doresc să mulţumesc şi să aduc recunoştinţă colaboratorilor mei de până acum, anume Pablo Alegre (Sevilla, Spania), Giovanni Calvaruso (Lecce, Italia), Bang-Yen Chen (Michigan, SUA), Franki Dillen (Leuven, Belgia), Simona Luiza Druţă-Romaniuc (Iaşi, România), Yu Fu (Dalian, China), Jun-ichi Inoguchi (Yamagata, Japonia), Rafael López (Granada, Spania), Ana Irina Nistor (Iaşi, România), Antonella Peronne (Lecce, Italia), Joeri van der Veken (Leuven, Belgia), Luc Vrancken (Valenciennes, Franţa).

În final, mulţumesc colegilor mei, în special Ioan Bucătaru, Oana Constantinescu, Mircea Crâşmăreanu, pentru numeroasele discuţii avute pe diverse teme, pentru toate sfaturile şi încurajările aduse în ultimii ani, pentru răbdarea fără margini de care au dat dovadă până acum, pentru atmosfera plăcută creată la catedra de geometrie.

Octombrie 2014

Marian Ioan Munteanu
Facultatea de Matematică
Universitatea *Alexandru Ioan Cuza* din Iaşi
România

Résumé

In this thesis we present the recent results obtained by the author in last four years and some future plans of research. We have studied magnetic curves in some (pseudo)-Riemannian manifolds and we have generalized this notion for arbitrary dimensions defining what we called *magnetic maps*. The research was developed by the author himself of in collaboration with mathematicians from Europe or Asia, from whom he had the chance to learn not only differential geometry but also other useful things one needs in a career. Most of the papers used in this thesis were supported by research grants such as Fulbright Senior Research Grant no. 498/2010 and CNCS-UEFISCDI project no. PN-II-RU-TE-2011-3-0017.

Let us briefly describe the topic. *The Landau-Hall problem* represents the study of the motion of a charged particle in a constant and static (time-independent) magnetic field on a Riemannian surface. The classical problem stands for a charged particle moving in the Euclidean plane $\mathbb{E}^2$. More precisely, suppose that $\vec{B}$ is a constant and static magnetic field orthogonal to $\mathbb{E}^2$ and $\vec{E}$ is a constant and static electric field in $\mathbb{E}^2$. If a particle of mass m and charge e is moving with the velocity $\vec{v}$ in that plane, then two forces act on it, the Lorentz force $\vec{\Phi} = e\vec{v} \times \vec{B}$ and the electric force $\vec{\Psi} = e\vec{E}$, respectively. The motion of the particle is described as the solution of the Newton equation.

An interesting problem is to study geometric aspects of the Landau-Hall problem on different Riemannian manifolds, namely the trajectory of a charged particle moving on the manifold under the action of a magnetic field. The electric field will be considered to be zero.

Let (M, g) be an n-dimensional Riemannian manifold. A *magnetic field* is a closed 2-form F on M and the *Lorentz force* associated to F on M is an $(1,1)$ tensor field Φ given by

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M).$$

The *magnetic trajectories* of F are curves γ on M that satisfy the *Lorentz equation*

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \Phi(\gamma').$$

From the point of view of dynamical systems, the magnetic curves generalize geodesics, since a geodesic corresponds to a trajectory of a particle, moving freely under the action of gravity, in the absence of a magnetic field ($F = 0$), while a magnetic trajectory is *a flow-line of the dynamical system* (M, g, F) associated to the magnetic field.

A special class of magnetic fields on Riemannian manifolds is represented by parallel 2-forms F, which are called *uniform magnetic fields*. For example, in dimension 2, the multiples of the area element by a constant are uniform magnetic fields and their magnetic trajectories on surfaces of constant Gaussian curvature (Euclidean plane $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{S}^2(c)$, $\mathbb{H}^2(-c)$, $c > 0$) are well-known.

Another important class of magnetic fields is obtained in 3-dimensional spaces. The 2-forms may be identified with vector fields via the Hodge $\star$ operator; thus, the magnetic fields correspond to divergence-free vector fields. In particular, the Killing vector fields define an important class of the so called *Killing magnetic fields*.

The thesis is structured in five chapters.

In the first chapter we present some results concerning magnetic curves in pseudo-Riemannian manifolds of dimension 2 and 3.

In a recent paper (2005), M.Barros, J.L. Cabrerizo, M.Fernández, A.Romero, studied the Landau-Hall problem on a surface of revolution. We propose to study this problem on another class of surfaces, namely the *canal surfaces*. A canal surface in $\mathbb{E}^3$, generated by a curve γ, is the closure of the envelope of the set of spheres with variable radii centered in the points of γ. This concept is very important either in classical differential geometry or in computational geometry, since a canal surface is a generalization of the notion of offsets of a plane curve.

Then, we investigate curves γ (parameterized by arc length) in 3-dimensional (pseudo)-Riemannian manifold satisfying the Lorentz equation $\nabla_{\gamma'}\gamma' = V \times \gamma'$, where ∇ is the Levi Civita connection, V is a Killing vector field, and $\times$ is a cross product on the manifold. We classify magnetic curves in the Euclidean 3-space (when V is the rotation Killing vector field), in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (where we define a natural cross product) and finally in a Minkowski 3-space $\mathbb{E}^3_1$, where the Killing vector is $V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$, a, b, c being real constants. The discussion is made according to the causality of V.

In chapter 2 we study contact magnetic curves on Sasakian and cosymplectic manifolds of arbitrary dimension. We obtain a classification of all contact magnetic trajectories in Sasakian manifolds of arbitrary odd-dimension and we give a detailed analysis of trajectories corresponding to contact magnetic fields in Sasakian space forms. For each case we provide the reduction theorem for trajectories associated to contact magnetic fields. In chapter 1, magnetic trajectories in Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$ and Riemannian product $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ are investigated. These two spaces $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ admit a cosymplectic structure compatible with the metric. We give a unified formulation for magnetic trajectories in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, classifying the magnetic trajectories on Riemannian products $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ of a Riemannian 2-manifold $\mathbb{M}^2$ and the real line $\mathbb{R}$, equipped with the standard cosymplectic structure. Then we study contact magnetic trajectories in cosymplectic manifolds of arbitrary odd-dimension. Finally, we generalize the results to cosymplectic manifolds of the form $\overline{M}^{2n}(k) \times \mathbb{R}$, where $\overline{M}^{2n}(k)$ is a Kähler space form of constant holomorphic sectional curvature k. We conclude with a reduction theorem also in this situation, for contact magnetic fields in cosymplectic manifolds $\overline{M}^{2n}(k) \times \mathbb{R}$.

In chapter 3 we are interested in the periodicity of some magnetic trajectories. In 2009 J.L. Cabrerizo, M. Fernández and J.S. Gómez have been looked for periodic orbits of the contact magnetic field on the unit sphere $\mathbb{S}^3$. We study closed magnetic curves in arbitrary elliptic Sasakian space forms and we obtain a quantization principle for periodic magnetic flowlines on Berger spheres. We prove that *the set of all periodic magnetic curves of arbitrary strength on the Sasakian space form* $\mathcal{M}^3(c)$, $(c > -3)$ *can be quantized in the set of rational numbers* and write the quantization principle generalizing the result of Cabrerizo et al. Finally, we give a criterion for periodicity of magnetic curves on the unit sphere $\mathbb{S}^3$. In the second part of chapter 3, we consider the anti-de Sitter space $\mathbb{H}^3_1$ and the hyperbolic Hopf fibration $h : \mathbb{H}^3_1(1) \to \mathbb{H}^2(1/2)$. Using their description in terms of paraquaternions, we study the magnetic curves of the hyperbolic Hopf vector field. A complete classification is obtained for light-like magnetic curves, showing in particular the existence of periodic examples, and emphasizing their relationship with the hyperbolic Hopf fibration.

In chapter 4 we generalize the notion of magnetic curve to magnetic maps between Riemannian manifolds. Recall that, a *geodesic* γ in a Riemannian manifold (M, g) is characterized as critical point of the *kinetic energy* (also called the *action integral*)

$$E(\gamma) = \int \frac{1}{2}|\gamma'(s)|^2 \, ds.$$

The notion of geodesic is generalized to maps between Riemannian manifolds. A map $f : (N, h) \to (M, g)$ between Riemannian manifolds is said to be *harmonic* if it is a critical point of the energy functional:

$$E(f) = \int_N \frac{1}{2}|df|^2 dv_h$$

under compactly supported variations. The Euler-Lagrange equation of this variational problem is given by $\tau(f) := \mathrm{trace}_h \nabla df = 0$. Here $\tau(f)$ is called the tension field of f.

Magnetic curves are another generalization of geodesics. Therefore, we introduce the notion of magnetic map for maps between Riemannian manifolds. Magnetic maps introduced in this chapter are generalization of both magnetic curves and harmonic maps. In fact, if the domain manifold is 1-dimensional, then magnetic maps are nothing but magnetic curves. For arbitrary dimensional domain manifold, magnetic maps without magnetic field reduce to harmonic maps. We sustain the notion providing some fundamental examples of magnetic maps.

The final chapter contains two parts. In the first part we describe our current work, namely, the study of magnetic curves corresponding to the magnetic field associated with the Reeb vector field of a quasi-paraSasakian three-manifold. We treat separately three cases, depending on the causality of the curve. We conclude this chapter, hence the thesis, with some ideas we have for future research concerning the study of magnetic curves in tangent sphere bundles.

We formulate the general theory of contact magnetic curves in the unit tangent sphere bundle over an arbitrary Riemannian manifold. Then we plan to determine the base curves of contact magnetic curves in $U\mathbb{S}^n$. Note that $U\mathbb{S}^n$ is homothetic to Sasakian manifolds, hence we can apply our previous results to $U\mathbb{S}^n$. For the case $U\mathbb{S}^2$, we shall get a generalization of Klingenberg-Sasaki theorem about geodesics.

I wish to express my sincere gratitude to my co-authors Pablo Alegre (Sevilla, Spain), Giovanni Calvaruso (Lecce, Italy), Bang-Yen Chen (Michigan, USA), $\boxed{\text{Franki Dillen}}$ (Leuven, Belgium), Simona Luiza Druţă-Romaniuc (Iaşi, Romania), Yu Fu (Dalian, China), Jun-ichi Inoguchi (Yamagata, Japan), Rafael López (Granada, Spain), Ana Irina Nistor (Iaşi, Romania), Antonella Peronne (Lecce, Italy), Joeri van der Veken (Leuven, Belgium), Luc Vrancken (Valenciennes, France).

Last but not least, I wish to thank my colleagues, especially Ioan Bucătaru, Oana Constantinescu, Mircea Crâşmăreanu, for several useful discussions we had, for their strong encouragements during last years and for their endless patience and sustaining.

October, 2014

Marian Ioan Munteanu
Faculty of Mathematics
University Alexandru Ioan Cuza of Iaşi
Romania