UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA“ din IAŞI

FACULTATEA DE MATEMATICA

BIHARMONIC SUBMANIFOLDS IN SPACE FORMS

Habilitation Thesis

Author: Cezar ONICIUC

2012

To my daughters

Abstract

The present thesis is devoted to the study of biharmonic submanifolds in real, complex and Sasakian space forms. First, we shall present some ideas that have encouraged the study of the biharmonic submanifolds and of the geometry of biharmonic maps, and then we shall describe the results gathered in the thesis.

Denote by $C^\infty(M,N)$ the space of smooth maps $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ between two Riemannian manifolds. A map $\varphi\in C^\infty(M,N)$ is called *harmonic* if it is a critical point of the *energy functional*

$$E: C^\infty(M,N)\to\mathbb{R},\quad E(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2\, v_g,$$

and it is characterized by the vanishing of the tension field

$$\tau(\varphi)=\operatorname{trace}\nabla d\varphi=0.$$

The tension field is a smooth section in the pull-back bundle $\varphi^{-1}(TN)$. If $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ is a Riemannian immersion, then it is a critical point of the energy functional if and only if it is a minimal immersion, i.e. a critical point of the *volume functional* (see [60]).

One can generalize harmonic maps by considering the functional obtained by integrating the squared norm of the tension field. More precisely, *biharmonic maps* are the critical points of the *bienergy functional*

$$E_2: C^\infty(M,N)\to\mathbb{R},\quad E_2(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2\, v_g.$$

The associated Euler-Lagrange equation is given by the vanishing of the bitension field

$$\tau_2(\varphi)=-\Delta\tau(\varphi)-\operatorname{trace}R^N(d\varphi(\cdot),\tau(\varphi))d\varphi(\cdot)=0. \tag{0.1}$$

Obviously, harmonic maps are biharmonic. Biharmonic non-harmonic maps are called *proper-biharmonic*.

The above variational problem and the Willmore problem (see [134]) produce natural generalizations of harmonic maps and, respectively, minimal immersions. Nevertheless, biharmonic Riemannian immersions do not recover Willmore immersions, not even when the ambient space is $\mathbb{R}^n$.

The theory of biharmonic maps is an old and rich subject, initially studied due to its implications in the theory of elasticity and fluid mechanics. G.B. Airy and J.C. Maxwell were the first to study and express plane elastic problems in terms of the biharmonic equation (see [1, 94]). Later on, the theory evolved with the study of polyharmonic functions developed by E. Almansi, T. Levi-Civita, M. Nicolaescu. Biharmonic and polyharmonic functions on Riemannian manifolds were studied by R. Caddeo and L. Vanheke [28, 35], L. Sario et all (see [117]) and others.

Biharmonic maps have been extensively studied in the last decade and there are two main research directions. On the one hand, in differential geometry, a special attention has been payed to the construction of examples and classification results. Results in this direction were obtained, for example, by P. Baird [11, 12], H. Urakawa [77, 78, 128], Y.-L. Ou [110]–[113] and in [4, 14, 21, 22, 27, 29, 30, 33, 34, 42, 46, 58, 79, 127, 139].

On the other hand, from the analytic point of view, biharmonic maps are solutions of a fourth order strongly elliptic semilinear PDE and the study of their regularity is nowadays a well-developed field. Contributions in this direction were made by S.-Y.A. Chang [38], T. Lamm [84, 85], R. Moser [99, 100], P. Strzelecki [122], C. Wang [131, 132], etc.

It was proved in [61] that there exists no harmonic map from $\mathbb{T}^2$ to $\mathbb{S}^2$ (whatever the metrics chosen) in the homotopy class of Brower degree ± 1. The biharmonic maps are expected to exist where harmonic maps do not.

The interest in the theory of biharmonic maps crossed the border of differential geometry and analysis of PDE's. In computational geometry, more precisely in the field of boundary based surface design, the biharmonic Bézier surfaces are studied (see [82, 96, 97]).

The variational problem associated by considering, for a fixed map, the bienergy functional defined on the set of Riemannian metrics on the domain gave rise to the biharmonic stress-energy tensor (see [90]). This proved to be useful for obtaining new examples of proper-biharmonic maps and for the study of submanifolds with certain geometric properties, like pseudo-umbilical and parallel submanifolds.

In his studies on finite type submanifolds (see [44]), B-Y. Chen defined biharmonic Riemannian immersions, i.e. biharmonic submanifolds, in the Euclidean space as those with harmonic mean curvature vector field, that is $\Delta H = 0$, where Δ is the rough Laplacian. By considering the definition of biharmonic maps for Riemannian immersions into the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ one recovers the notion of biharmonic submanifolds in the sense of B-Y. Chen. Although the results obtained by B-Y. Chen and his collaborators on proper-biharmonic submanifolds in Euclidean spaces are non-existence results, i.e. the only biharmonic submanifolds are the minimal ones, their techniques were adapted and led to classification results for proper-biharmonic submanifolds in Euclidean spheres where the family of such submanifolds is rather rich.

The differential geometric aspect of biharmonic submanifolds was also studied in the semi-Riemannian case (see, for example, [44, 46]).

In real space forms of nonpositive constant sectional curvature only non-existence results for proper-biharmonic submanifolds are known (see, for example, [21, 29, 43, 46, 56, 58, 75]). In the case of real space forms of positive sectional curvature the situation is completely different, and the first chapter of the present thesis concerns the classification of biharmonic submanifolds in the unit Euclidean sphere $\mathbb{S}^n$. The key ingredient is the characterization formula, obtained by splitting the bitension field in its normal and tangent components, presented in the first section. The main examples of proper-biharmonic submanifolds in $\mathbb{S}^n$, together with their immediate properties, are listed. The section ends with a partial classification result for biharmonic submanifolds with constant mean curvature (CMC) in spheres. Taking this further, in the second section we study the type of CMC proper biharmonic submanifolds in $\mathbb{S}^n$ and prove that, depending on the value of the mean curvature, they are of 1-type or of 2-type as submanifolds of $\mathbb{R}^{n+1}$. In the third section, the proper biharmonic hypersurfaces are studied from different points of view: first with respect to the number of their distinct principal curvatures, then with respect to $|A|^2$ and $|H|^2$, and, finally, the study is done with respect to the sectional, Ricci and scalar curvatures of the hypersurface. All the obtained results are rigidity results, i.e. with the imposed restrictions, the biharmonic hypersurfaces belong to the main classes of aforementioned examples. The fourth section is devoted to the study of proper-biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field (PMC) in spheres, the main result of this section consisting in a partial classification. Moreover, a full classification of PMC proper-biharmonic submanifolds in spheres with parallel shape operator associated to the mean curvature vector field is presented. The chapter ends with a list of Open Problems. The results contained in this chapter can be found in [18]–[24].

Chapter 2 is devoted to the study of proper-biharmonic submanifolds in a complex space form. This subject has already been started by several authors. In [53] some pinching conditions for the second fundamental form and the Ricci curvature of a biharmonic Lagrangian submanifold of $\mathbb{C}P^n$, with parallel mean curvature vector field, were obtained. In [119], the author gave a classification of biharmonic Lagrangian surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{C}P^2$. Then, the characterization of biharmonic constant mean curvature real hypersurfaces of $\mathbb{C}P^n$ and the classification of proper-biharmonic homogeneous real hypersurfaces of $\mathbb{C}P^n$ were obtained in [77, 78]. Our main result in Chapter 2 is a formula that relates the bitension field of a submanifold in $\mathbb{C}P^n$ and the bitension field of the associated Hopf cylinder (according to the Hopf fibration). Using this formula, many examples of proper-biharmonic submanifolds in $\mathbb{C}P^n$ were obtained. In the 2-dimensional complex projective space, by using a result of S. Maeda and T. Adachi, all proper-biharmonic curves were determined.

The Euclidean spheres proved to be a very giving environment for obtaining examples and classification results. Then, the fact that odd-dimensional spheres can be thought as a class of Sasakian space forms (which do not have constant sectional curvature, in general) led to the idea that another research direction would be the study of biharmonic submanifolds in Sasakian space forms. Following this direction, the proper-biharmonic Legendre curves and Hopf cylinders in a 3-dimensional Sasakian space form were classified in [79], whilst in [71] their parametric equations were found. In Chapter 3 we classify all proper-biharmonic Legendre curves in arbitrary dimensional Sasakian space forms, and we present a method to obtain proper-biharmonic anti-invariant submanifolds from proper-biharmonic integral submanifolds. Then, we obtain classification results for proper-biharmonic hypersurfaces. In the last part, we determine all 3-dimensional proper-biharmonic integral $\mathcal{C}$-parallel submanifolds in a 7-dimensional Sasakian space form and then we find these submanifolds in the unit

Euclidean 7-sphere endowed with its canonical and deformed Sasakian structures introduced by S. Tanno in [125]. We end by classifying the proper-biharmonic parallel Lagrangian submanifolds of $\mathbb{C}P^3$ by determining their horizontal lifts, with respect to the Hopf fibration, in $\mathbb{S}^7(1)$.

Some of the techniques used in the thesis are based on those developed by D. Blair, B-Y. Chen, F. Defever, M. do Carmo, J. Erbacher, J.D. Moore, K. Nomizu, P.J. Ryan, S.-T. Yau, etc.

Rezumat

Lucrarea de faţă este dedicată studiului subvarietăţilor biarmonice în forme spaţiale reale, complexe şi sasakiene. Vom prezenta, pentru început, unele idei care au incurajat studiul subvarietăţilor biarmonice şi al geometriei aplicaţiilor biarmonice şi apoi vom descrie rezultatele incluse în această teză.

Fie $C^\infty(M,N)$ spaţiul aplicaţiilor netede $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ între două varietăţi riemanniene. O aplicaţie $\varphi \in C^\infty(M,N)$ se numeşte *armonică* dacă este un punct critic al *funcţionalei energie*

$$E : C^\infty(M,N) \to \mathbb{R}, \quad E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 \, v_g,$$

şi este caracterizată de anularea câmpului de tensiune

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace} \nabla d\varphi = 0.$$

Campul de tensiune este o secţiune netedă în fibratul pull-back $\varphi^{-1}(TN)$.

Dacă $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ este o imersie riemanniană, atunci este un punct critic al funcţionalei energie dacă şi numai dacă este o imersie minimală, adică un punct critic al *funcţionalei volum* (vezi [60]).

Noţiunea de aplicaţie armonică poate fi generalizată considerând funcţionala obţinută prin integrarea pătratului normei câmpului de tensiune. Mai exact, *aplicaţiile biarmonice* sunt punctele critice ale *funcţionalei bienergie*

$$E_2 : C^\infty(M,N) \to \mathbb{R}, \quad E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 \, v_g.$$

Ecuaţia Euler-Lagrange asociată este dată de anularea câmpului de bitensiune

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta\tau(\varphi) - \operatorname{trace} R^N(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi))d\varphi(\cdot) = 0.$$

Evident, aplicaţiile armonice sunt biarmonice. Aplicaţiile biarmonice şi nearmonice sunt numite *biarmonice proprii.*

Problema variaţională de mai sus şi problema Willmore (vezi [134]) produc generalizări naturale ale noţiunii de aplicaţie armonică, respectiv imersie minimală. Însă imersiile riemanniene biarmonice nu sunt imersii Willmore, nici măcar în cazul în care spaţiul ambiant este $\mathbb{R}^n$.

Teoria aplicaţiilor biarmonice este un domeniu vechi şi bogat în rezultate, iniţial studiat datorită implicaţiilor sale în teoria elasticităţii şi în mecanica fluidelor. G.B. Airy şi J.C. Maxwell au fost primii care au studiat şi exprimat fenomene elastice plane in termenii ecuaţiei biarmonice (vezi [1, 94]). Mai târziu, teoria a evoluat cu studiul funcţiilor poliarmonice realizat de către E. Almansi, T. Levi-Civita, M. Nicolaescu. Funcţiile biarmonice şi poliarmonice pe varietăţi riemanniene au fost studiate de R. Caddeo şi L. Vanheke [28, 35], L. Sario et all [117] şi alţii.

Aplicaţiile biarmonice au fost intens studiate în ultimul deceniu şi există două direcţii principale de cercetare. Pe de o parte, în geometria diferenţială, o atenţie deosebită a fost acordată construcţiei de exemple şi rezultatelor de clasificare. Rezultate în această direcţie au fost obţinute, de exemplu, de P. Baird [11, 12], H. Urakawa [77, 78, 128], Y.-L. Ou [110]–[113] şi în [4, 14, 21, 22, 29, 30, 33, 34, 42, 46, 58, 79, 127, 139].

Pe de altă parte, din punct de vedere analitic, aplicaţiile biarmonice sunt soluţii ale unui sistem eliptic semi-liniar de ordin 4 de ecuaţii cu derivate parţiale, iar studiul regularităţii acestora este un domeniu de cercetare bine dezvoltat în prezent. Contribuţii în această direcţie au fost aduse de către S.-Y.A. Chang [38], T. Lamm [84, 85], R. Moser [99, 100], P. Strzelecki [122], C. Wang [131, 132], etc.

În [61] s-a demonstrat că nu există aplicaţii armonice de la $\mathbb{T}^2$ la $\mathbb{S}^2$ (indiferent de metricile alese) în clasa de omotopie de grad Brower egal cu ± 1. Se aşteaptă ca aplicaţiile biarmonice să rezolve această problemă.

Interesul manifestat pentru aplicaţiile biarmonice a depăşit graniţele geometriei diferenţiale şi ale analizei ecuaţiilor cu derivate parţiale. În geometria computaţională, mai precis în designul suprafeţelor de bord fixat, sunt intens studiate suprafeţele Bézier biarmonice (vezi [82, 96, 97]).

Problema variaţională asociată considerând, pentru o aplicaţie fixată, funcţionala bienergie definită pe mulţimea metricilor riemanniene pe domeniu a dat naştere tensorului stress-energie biarmonic (vezi [90]). Acesta s-a dovedit util în construcţia de noi exemple de aplicaţii biarmonice proprii şi în studiul subvarietăţilor cu anumite proprietăţi geometrice, cum ar fi subvarietăţile pseudo-ombelicale şi cele paralele.

În studiile sale asupra subvarietăţilor de tip finit (vezi [44]) B-Y. Chen a definit subvarietăţile biarmonice $M \subset \mathbb{R}^n$ ale spaţiului euclidian ca fiind acele subvarietăţi pentru care câmpul vectorial curbură medie este armonic, i.e. $\Delta H = 0$, unde Δ este laplaceanul pe mulţimea câmpurilor vectoriale tangente la $\mathbb{R}^n$ în lungul subvarietăţii M. Considerând definiţia aplicaţiilor biarmonice pentru imersii riemanniene în spaţiul euclidian se regăseşte noţiunea de subvarietate biarmonică în sensul lui B-Y. Chen. Notăm că toate rezultatele obţinute de către Chen şi colaboratorii săi, pentru subvarietăţi biarmonice în spaţiul euclidian, sunt rezultate de neexistenţă, adică biarmonicitatea implică minimalitate. Însă tehnicile acestora au fost adaptate şi au condus la rezultate de clasificare pentru subvarietăţi biarmonice proprii în sfere, unde familia acestor subvarietăţi este destul de bogată.

Aspectul geometric al aplicaţiilor şi subvarietăţilor biarmonice a fost tratat şi în context pseudo-riemannian (vezi, de exemplu, [44, 46]).

Toate rezultatele obţinute privitoare la subvarietăţile biarmonice proprii în forme spaţiale de curbură secţională negativă sunt de neexistenţă (vezi, de exemplu, [21, 29, 43, 46, 56, 58, 75]). În cazul formelor spaţiale de curbură secţională pozitivă situaţia se dovedeşte a fi complet diferită, iar primul capitol al prezentei teze tratează problema clasificării subvarietăţilor biarmonice proprii ale sferei euclidiene unitare $\mathbb{S}^n$. Ingredientul cheie constă în formula de caracterizare obţinută prin descompunerea câmpului de bitensiune în componentele sale, tangentă şi normală, prezentată în prima secţiune. Sunt apoi prezentate principalele exemple de subvarietăţi biarmonice proprii în $\mathbb{S}^n$, împreună cu proprietăţile lor imediate. Secţiunea se încheie cu un rezultat de clasificare parţială a subvarietăţilor biarmonice proprii de curbură medie constantă (CMC) în sfere. S-a extins acest rezultat, studiând tipul subvarietăţilor CMC biarmonice proprii în $\mathbb{S}^n$ şi s-a demonstrat că, în funcţie de valoarea curburii medii, acestea sunt fie de tip 1, fie de tip 2 ca subvarietăţi în $\mathbb{R}^{n+1}$. În a treia secţiune sunt studiate, din diferite puncte de vedere, hipersuprafeţele biarmonice proprii: mai întâi ţinând cont de numărul de curburi principale distincte, apoi în funcţie de $|A|^2$ şi $|H|^2$ şi, în final, studiul este realizat ţinând cont de curbura secţională, curbura Ricci şi curbura scalară a hipersuprafeţei. Toate rezultatele obţinute sunt rezultate de rigiditate, adică hipersuprafeţele biarmonice aparţin claselor de exemple menţionate anterior. Secţiunea a patra este dedicată studiului subvarietăţilor biarmonice proprii de câmp vectorial curbură medie paralel (PMC) în sfere, principalul rezultat constând într-o clasificare parţială. Mai mult, este prezentată clasificarea completă a subvarietăţilor PMC biarmonice proprii în sfere cu operatorul formă asociat câmpului vectorial curbură medie paralel. Capitolul se încheie cu o listă de Probleme Deschise. Rezultatele incluse în acest capitol pot fi găsite în [18]–[24].

Capitolul 2 este dedicat studiului subvarietăţilor biarmonice proprii în forme spaţiale complexe. Acest subiect a fost iniţiat de mai mulţi autori. În [53] au fost obţinute unele condiţii de pinching asupra formei a doua fundamentale şi a curburii Ricci pentru o subvarietate biarmonică lagrangiană de curbură medie paralelă în $\mathbb{C}P^n$. În [119], autorul a obţinut o clasificare a suprafeţelor lagrangiene biarmonice de curbură medie constantă în $\mathbb{C}P^2$. Apoi, în [77, 78], au fost obţinute caracterizarea hipersuprafeţelor reale biarmonice de curbură medie constantă şi clasificarea hipersuprafeţelor reale omogene biarmonice în $\mathbb{C}P^n$. Principalul nostru rezultat prezentat în Capitolul 2 este formula ce dă legătura dintre câmpul de bitensiune al unei subvarietăţi în $\mathbb{C}P^n$ şi câmpul de bitensiune al cilindrului Hopf asociat (prin intermediul fibrării Hopf). Cu ajutorul acestei formule se obţin numeroase exemple de subvarietăţi biarmonice proprii în $\mathbb{C}P^n$. Folosind un rezultat obţinut de S. Maeda şi T. Adachi, se determină toate curbele biarmonice proprii în spaţiul proiectiv complex 2-dimensional.

Sferele euclidiene s-au dovedit a fi un ambient foarte generos pentru obţinerea de exemple şi rezultate de clasificare. Mai mult, faptul că sferele de dimensiune impară pot fi privite ca o clasă de forme spaţiale sasakiene (care în general nu au curbura secţională constantă) a condus la idea că o nouă direcţie de cercetare poate fi studiul subvarietăţilor biarmonic în forme spaţiale sasakiene. Urmând această direcţie, în [79] au fost clasificate curbele Legendre şi cilindrii Hopf biarmonici proprii în forme spaţiale sasakiene 3-dimensionale, iar în [71] au fost determinate ecuaţiile parametrice ale acestora. În Capitolul 3 se clasifică toate curbele Legendre biarmonice în forme spaţiale sasakiene de dimensiune arbitrară şi se prezintă o metodă de construcţie a subvarietăţilor anti-invariante biarmonice proprii pornind de la subvarietăţi integrale biarmonice proprii. Se obţin apoi rezultate de clasificare pentru hipersuprafeţe biarmonice proprii. În ultima parte sunt determinate toate subvarietăţile integrale $\mathcal{C}$-paralele, 3-dimensionale, biarmonice proprii ale unei forme spaţiale sasakiene 7-dimensionale şi apoi sunt obţinute aceste subvarietăţi în sfera unitate 7-dimensională înzestrată cu structura sasakiană canonică şi cu structurile sasakiene deformate introduse de S. Tanno în [125]. În încheiere se prezintă clasificarea subvarietăţilor lagrangiene paralele biarmonice proprii în $\mathbb{C}P^3$ prin determinarea lifturilor orizontale, în raport cu fibrarea Hopf, în $\mathbb{S}^7(1)$.

Tehnicile folosite în această teză sunt bazate pe tehnici dezvoltate de D. Blair, B-Y. Chen, F. Defever, M. do Carmo, J. Erbacher, J.D. Moore, K. Nomizu, P.J. Ryan, S.-T. Yau, etc.

Contents