"AL. I. CUZA" UNIVERSITY OF IAŞI

Faculty of Mathematics

Contributions to the study of subgroup lattices

Habilitation thesis

Marius Tărnăuceanu

2014

Preface

This habilitation thesis collects and summarizes original results by the author in the subgroup lattice theory. The thesis is organized as follows. In Chapter 1 a brief introduction to this research area is made. Chapter 2 is divided in four sections, entitled "Basic properties and structure of subgroup lattices", "Computational and probabilistic aspects of subgroup lattices", "Other posets associated to finite groups" and "Generalizations of subgroup lattices", and contains (partial) reproductions of the publications collected in this thesis. In the last chapter some further research directions are indicated. The thesis ends with an extended bibliography which consists of 143 titles.

I would like to express the best feelings of gratitude to all my co-authors and colleagues, who have made research on this topic highly interesting and fruitful.

Iaşi, October 2014 *M. Tărnăuceanu*

Contents

Chapter 1

Introduction

In English:

It is an interesting question in group theory in how far the structure of the subgroup lattice of a group determines the structure of the group itself. This question in its pure form is quite old [72, 4], and M. Suzuki spent his early research years on this problem [84, 85]. Since then, many characterizations and classifications have been obtained for groups for which the subgroup lattice has certain lattice-theoretic properties, as distributivity (D-groups), modularity (M-groups), complementation (K-groups, C-groups, SC-groups, KM-groups), relative complementation (RK-groups), lower semimodularity (LM-groups) or upper semimodularity (UM-groups). We also recall the classes of B-groups (i.e. groups whose subgroup lattices are boolean algebras), J-groups (i.e. groups whose subgroup lattices satisfy the Jordan-Dedekind chain condition), L-decomposable groups (i.e. groups whose subgroup lattices are decomposable into a direct product of two or more lattices none of which is a one-element lattice) and P-groups (i.e. groups with the same subgroup lattice as elementary abelian p-groups). The possibly most famous result in this direction is due to Ore [68].

Theorem. *A group is locally cyclic if and only if its subgroup lattice is distributive. In particular, a finite group is cyclic if and only if its subgroup lattice is distributive.*

Other partially ordered subsets of subgroups of groups, as normal subgroup lattices, posets of cyclic subgroups, posets of subnormal and ascendant subgroups, posets of permutable and subpermutable subgroups, posets of conjugacy classes of subgroups, ... and so on have been studied, too.

Their properties also lead to interesting classes of groups, as DLN-groups, nC-groups, nD-groups, nS-groups and ZM-groups.

A second important direction of research in subgroup lattice theory is concerned with projectivities (also called L-isomorphisms) of groups, that is isomorphisms between subgroup lattices. The main problems investigated are the following:

- Given a class $\mathcal{X}$ of groups, which is the lattice-theoretic closure $\overline{\mathcal{X}}$ of $\mathcal{X}$? (here $\overline{\mathcal{X}}$ is the class of all groups whose subgroup lattices are isomorphic with the subgroup lattices of some groups in $\mathcal{X}$).
- Which classes of groups $\mathcal{X}$ satisfy $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, that is, they are invariant under projectivities?
- Which groups G are determined by their subgroup lattices, that is, every projectivity of G is induced by a group isomorphism? (it is clear that every isomorphism between two groups induces a projectivity in a natural way, but a projectivity is not necessarily induced by a group isomorphism).

We refer to Suzuki's book [87], Schmidt's book [75] or the more recent book [91] by the author for more information about this theory.

Let G be a group. In the following we will denote by $L(G)$ the subgroup lattice of G. Recall that $L(G)$ is a complete bounded lattice with respect to set inclusion, having initial element the trivial subgroup 1 and final element G, and its binary operations $\wedge, \vee$ are defined by

$$H \wedge K = H \cap K,\ H \vee K = \langle H \cup K \rangle,\ \text{for all } H, K \in L(G).$$

The most important subsets of $L(G)$ are the normal subgroup lattice $N(G)$ of G (notice that this is a modular sublattice of $L(G)$, as shows Theorem 2.1.4 of [75]) and the poset of cyclic subgroups of G, usually denoted by $C(G)$ or by $L_1(G)$. These will be present in all sections of our work.

Other interesting posets associated to a finite group G (not necessarily consisting of subgroups of G and not necessarily ordered by set inclusion) can be connected with $L(G)$, $N(G)$ and $C(G)$. We recall here only the poset $\pi_e(G)$ of element orders of G, the poset of (normal, cyclic) subgroup orders of G and the poset of classes of isomorphic subgroups of G, which will be investigated in Section 2.3.

Some natural generalizations of $L(G)$, $N(G)$ and $C(G)$ are obtained by replacing the notion of subgroup of G with the notion of fuzzy subgroup of G and the set inclusion with the fuzzy set inclusion, namely the fuzzy subgroup lattice $FL(G)$, the fuzzy normal subgroup lattice $FN(G)$ and the poset of fuzzy cyclic subgroups $FC(G)$. Their study is the main goal of Section 2.4. The problem of classifying the fuzzy (normal) subgroups of G is also treated in this section. It is reduced to a computational problem on $L(G)$ or $N(G)$, by considering certain equivalence relations on $FL(G)$ or $FN(G)$, respectively.

All results by the author presented in Chapter 2 are either published, accepted for publication, or submitted, as can be seen in Bibliography. The study started in these papers will surely be extended in some further research. This is the reason for which our work ends with a list of open problems corresponding to each section in Chapter 2.

Finally, we hope that the audience of this thesis will include graduate and postgraduate students who want to be introduced to an important field of group theory and researchers interested in. It is assumed that the reader is familiar with the basic concepts and results both of group theory and of lattice theory. For these, we refer to the standard monographs by M. Aschbacher [3], B. Huppert [44], I.M. Isaacs [45], M. Suzuki [88] and G. Birkhoff [14], G. Grätzer [35], respectively.

In Romanian:

O problemă interesantă în teoria grupurilor este constituită de studiul legăturii dintre structura laticei subgrupurilor unui grup şi structura grupului însuşi. Acestă problemă în forma ei pură este destul veche (a se vedea articolele lui A. Rottlaender [72] sau R. Baer [4]). Îl amintim aici şi pe M. Suzuki, care şi-a petrecut primii ani din carieră studiind-o [84, 85]. De atunci au fost obţinute mai multe caracterizări şi clasificări ale grupurilor pentru care laticea subgrupurilor satisface o anumită proprietate, precum distributivitatea (D-grupuri), modularitatea (M-grupuri), complementaritatea (K-grupuri, C-grupuri, SC-grupuri, KM-grupuri), relativa complementaritate (RK-grupuri), semimodularitatea inferioară (LM-grupuri) sau semimodularitatea superioară (UM-grupuri). Menţionăm, de asemenea, clasele B-grupurilor (adică grupurile pentru care laticea subgrupurilor este algebră Boole), J-grupurilor (adică grupurile pentru care laticea subgrupurilor satisface condiţia Jordan-Dedekind), a grupurilor L-decompozabile (adică grupurile pentru care laticea subgrupurilor se descompune într-un produs direct de două sau mai multe latice netriviale) şi a P-grupurilor (adică grupurile având aceeaşi latice de subgrupuri cu p-grupurile abeliene elementare). Probabil cel mai faimos rezultat obţinut este următoarea teoremă, datorată lui O. Ore [68].

Teoremă. *Un grup este local ciclic dacă şi numai dacă laticea subgrupurilor sale este distributivă. În particular, un grup finit este ciclic dacă şi numai dacă laticea subgrupurilor sale este distributivă.*

De asemenea, au fost studiate şi alte submulţimi parţial ordonate de subgrupuri ale grupurilor, precum latice de subgrupuri normale, mulţimi ordonate de subgrupuri ciclice, subnormale, ascendente, permutabile, subpermutabile, ... etc. sau mulţimi ordonate de clase de conjugare de subgrupuri. La fel, proprietăţile lor determină clase interesante de grupuri, precum DLN-grupurile, nC-grupurile, nD-grupurile, nS-grupurile sau ZM-grupurile.

O a doua direcţie importantă de cercetare în teoria laticelor de subgrupuri este constituită de studiul proiectivităţilor sau al L-izomorfismelor grupurilor, adică al izomorfismelor dintre laticele de subgrupuri. Principalele probleme ce au fost studiate sunt următoarele:

- Dată o clasă de grupuri $\mathcal{X}$, care este închiderea $\overline{\mathcal{X}}$ a acesteia ? (aici $\overline{\mathcal{X}}$ desemnează clasa tuturor grupurilor ale căror latice de subgrupuri sunt izomorfe cu laticele subgrupurilor unor anumite grupuri din $\mathcal{X}$).

- Care clase de grupuri $\mathcal{X}$ satisfac condiţia $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, adică sunt invariante la proiectivităţi ?

- Ce grupuri G sunt determinate de laticele lor de subgrupuri, adică orice proiectivitate a lui G este indusă de un izomorfism grupal ? (evident, orice izomorfism grupal induce o proiectivitate într-un mod natural, dar o proiectivitate nu este neaparat indusă de către un izomorfism grupal).

Facem trimitere la monografiile lui M. Suzuki [87], R. Schmidt [75] sau la recenta monografie a autorului [91] pentru mai multe informaţii despre această teorie.

Fie G un grup. În cele ce urmează vom nota cu $L(G)$ laticea subgrupurilor lui G. Reamintim că $L(G)$ este o latice completă, în care elementul iniţial este subgrupul trivial 1 şi elementul final este G, iar operaţiile sale binare $\wedge, \vee$ sunt definite prin

$$H \wedge K = H \cap K,\ H \vee K = \langle H \cup K \rangle, \text{ pentru orice } H, K \in L(G).$$

Cele mai importante submulţimi ale lui $L(G)$ sunt laticea $N(G)$ a subgrupurilor normale ale lui G (notăm că aceasta este o sublatice modulară în $L(G)$, conform Teoremei 2.1.4 din [75]) şi mulţimea ordonată a subgrupurilor ciclice ale lui G, de obicei notată cu $C(G)$ sau cu $L_1(G)$. Acestea vor fi prezente în toate secţiunile lucrării noastre.

Şi alte mulţimi ordonate asociate unui grup finit G (nu neaparat constituite din subgrupuri ale lui G şi nu neaparat ordonate prin incluziune) se pot conecta cu $L(G)$, $N(G)$ şi $C(G)$. Amintim aici doar mulţimea ordonată $\pi_e(G)$ a ordinelor elementelor lui G, mulţimile ordonate ale ordinelor subgrupurilor (subgrupurilor normale, subgrupurilor ciclice) lui G şi mulţimea ordonată a claselor de subgrupuri izomorfe din G, ce vor fi investigate în Secţiunea 2.3.

O serie de generalizări naturale ale lui $L(G)$, $N(G)$ şi $C(G)$ pot fi obţinute prin înlocuirea noţiunii de subgrup al lui G cu cea de subgrup fuzzy al lui G şi a incluziunii dintre mulţimi cu cea dintre mulţimi fuzzy, anume laticea subgrupurilor fuzzy $FL(G)$, laticea subgrupurilor fuzzy normale $FN(G)$ şi mulţimea ordonată a subgrupurilor fuzzy ciclice $FC(G)$. Studiul lor este realizat în Secţiunea 2.4. Problema clasificării subgrupurilor fuzzy (normale) ale lui G este, de asemenea, abordată în această secţiune. Ea se reduce la o problemă computaţională pe $L(G)$ sau $N(G)$ prin considerarea anumitor relaţii de echivalenţă pe $FL(G)$, respectiv pe $FN(G)$.

Toate rezultatele autorului prezentate în Capitolul 2 sunt publicate, acceptate pentru publicare sau propuse pentru publicare, după cum poate fi văzut în Bibliografie. Studiul început în aceste articole va fi cu siguranţă extins şi în lucrări viitoare. Acesta este motivul pentru care teza se încheie cu o amplă listă de probleme deschise, corespunzătoare fiecărei secţiuni din Capitolul 2.

În cele din urmă, sperăm că audienţa acestei teze va include atât studenţi ce doresc să se iniţieze într-un domeniu important al teoriei grupurilor, cât şi cercetători din cadrul lui. Se presupune că cititorul este familiarizat cu noţiunile şi rezultatele elementare ale teoriei grupurilor şi ale teoriei laticelor. Pentru acestea, facem trimitere la monografiile standard ale lui M. Aschbacher [3], B. Huppert [44], I.M. Isaacs [45], M. Suzuki [88], respectiv ale lui G. Birkhoff [14] şi G. Grätzer [35].