Aplicarea noțiunii de arie în rezolvarea problemelor de geometrie plană în gimnaziu

Aspecte metodice

Prof. Dorina Carapanu
Colegiul Național ,,Garabet Ibrăileanu” Iași

03.02.2017

Echivalența triunghiurilor

Problema 1

Ipoteza:

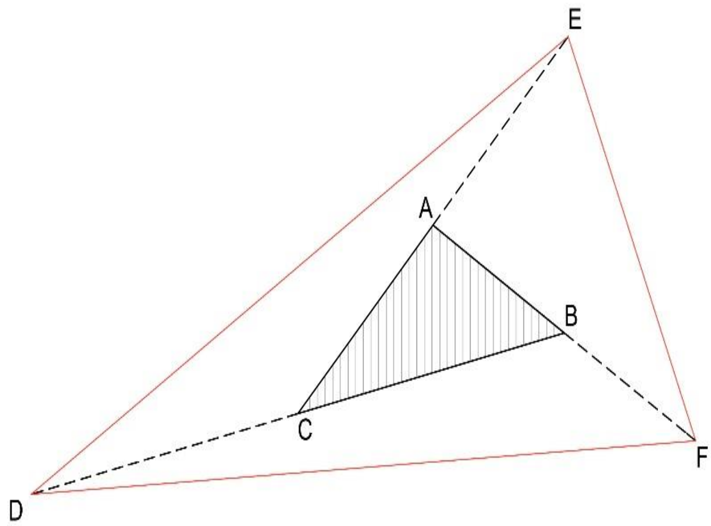
Δ ABC

F ∈ (AB   [AB] ≡ [BF]

D ∈ (BC   [BC] ≡ [CD]

E ∈ (CA   [CA] ≡ [AE]

Concluzie: $A_{DEF} = 7 \cdot A_{ABC}$



Demonstrație:

În Δ EAF

EB mediană

$\Rightarrow A_{EAB} = A_{EBF}$

În Δ BCE

BA mediană

$\Rightarrow A_{BCA} = A_{BAE}$

$\Rightarrow A_{EAF} = 2 \cdot A_{ABC}$ **(1)**

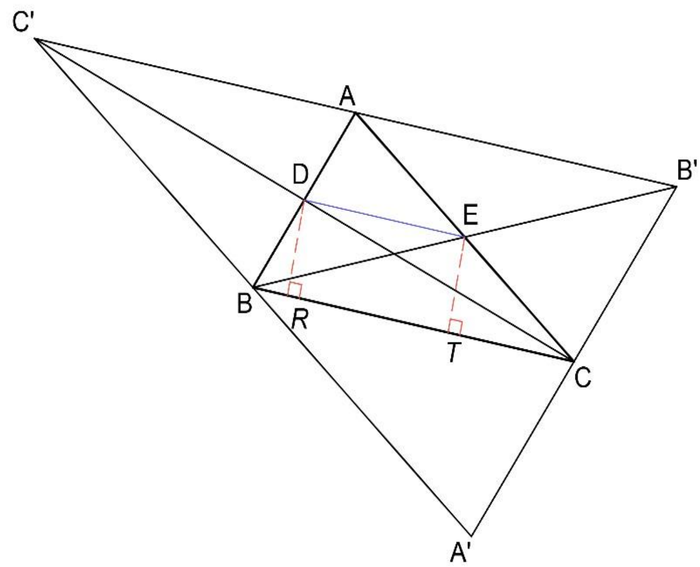
Analog pentru:

Δ ECD $\Rightarrow A_{CED} = 2 \cdot A_{ABC}$ **(2)**

Δ BDF $\Rightarrow A_{BDF} = 2 \cdot A_{ABC}$ **(3)**

(1) + **(2)** + **(3)** $\Rightarrow A_{EDF} = 7 \cdot A_{ABC}$

Problema 2



Ipoteza:

Δ ABC, a || BC, A ∈ a
b || AC, B ∈ b
c || AB, C ∈ c
a ∩ b = {C'}
a ∩ c = {B'}
c ∩ b = {A'}
BB' ∩ AC = {E}
CC' ∩ AB = {D}

Concluzie: $A_{CEB} = A_{BCD}$

Demonstrație:

ABCB' paralelogram
E intersecția diagonalelor
=> E mijlocul lui AC

BCAC' paralelogram
D intersecția diagonalelor
=> D mijlocul lui AB

=> DE linie mijlocie => DE || BC => => [DR] ≡ [ET]

$A_{DBC} = \frac{DR \cdot BC}{2}$

$A_{EBC} = \frac{ET \cdot BC}{2}$

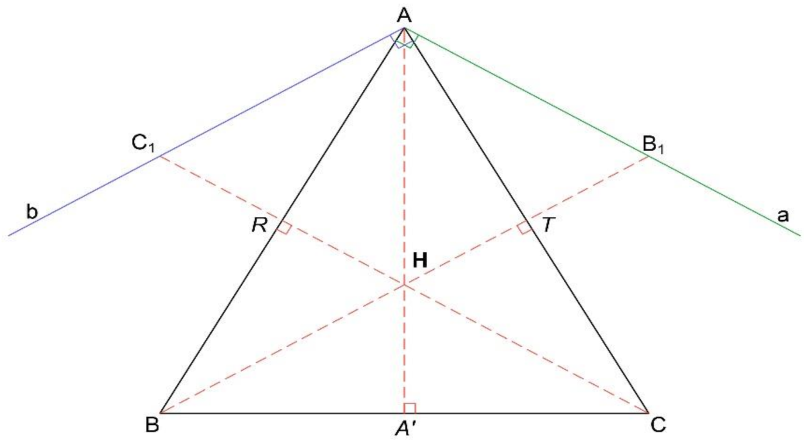
=> $A_{DBC} = A_{EBC}$

Problema 3

<u>Ipoteza</u>:

Δ ABC echilateral,
H ortocentru
$a \perp AB$, $a \cap BH = \{B_1\}$
$b \perp AC$, $b \cap CH = \{C_1\}$

a) AB_1HC_1 romb
b) $2\,A_{ABC} = 3\,A_{AB_1HC_1}$



<u>Demonstrație</u>:

a)

$$\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp AC \\ C_1A \perp AC \end{array}\right| \Rightarrow BB_1 \parallel C_1A$$

$$\left.\begin{array}{l} CC_1 \perp AB \\ AB_1 \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow AB_1 \parallel CC_1$$

$\Rightarrow AC_1HB_1$ paralelogram **(1)**

$[AC_1] \equiv [AB_1]$ (congruența de triunghi) **(2)**

(1) + **(2)** $\Rightarrow AC_1HB_1$ romb

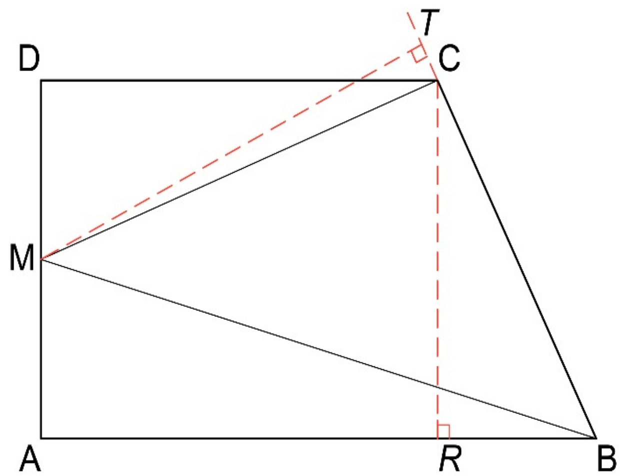
b)
$\Delta\, ATB_1 \equiv \Delta\, CTH \Rightarrow [AB_1] \equiv [CH]$
$\Delta\, ARC_1 \equiv \Delta\, BRH \Rightarrow [AC_1] \equiv [BH]$

$$\begin{array}{l} \Delta\, AC_1B_1 \\ \\ \Delta\, HBC \end{array} \left\{\begin{array}{l} [AB_1] \equiv [HC] \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{H}) \\ [AC_1] \equiv [HB] \end{array}\right. \xRightarrow{L.U.L.} \Delta\, AC_1B_1 \equiv \Delta\, HBC \Rightarrow [C_1B_1] = [BC]$$

$$A_{AC_1HB_1} = \frac{AH \cdot B_1C_1}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot AA' \cdot BC}{2} = \frac{2}{3} A_{ABC} \Rightarrow 3 \cdot A_{AC_1HB_1} = 2 \cdot A_{ABC}$$

Aplicarea ariilor în calculul distanțelor

Problema 4



Ipoteza:

ABCD trapez dreptunghic
M – mijlocul lui AD
AB || CD
m $(\hat{A}) = 90^o$
AB = 7 cm
AD = 4 cm
CD = 5 cm

Concluzie:

d (M, BC) = ?

Demonstrație:

$A_{BMC} = \frac{MT \cdot BC}{2}$ **(1)**

$A_{BMC} = A_{ABCD} - (A_{MAB} + A_{MDC}) =$

$= \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} - (\frac{MA \cdot AB}{2} + \frac{CD \cdot MD}{2}) =$

$= \frac{(7+5) \cdot 4}{2} - (\frac{2 \cdot 7}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2}) =$

= 24 – 12 = 12 cm **(2)**

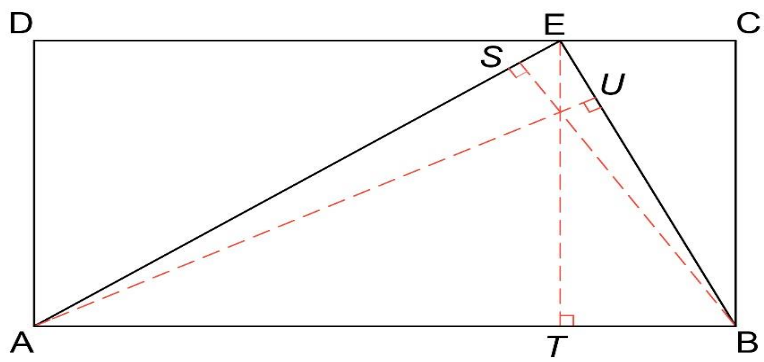
Δ CRB $\begin{cases} m(\widehat{R}) = 90^o \\ RB = 7 - 5 = 2 \\ CR = 4 \end{cases}$ => $BC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ **(3)**

$\frac{MT \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 12$ => $MT = \frac{24}{2\sqrt{5}} = = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

Problema 5

<u>Ipoteza</u>:

ABCD dreptunghi
AB = 8 cm
AD = 4 cm
$E \in (DC)$
EC = 2 cm



<u>Concluzie</u>:

d (B, AE) = ?
d (A, BE) = ?

<u>Demonstrație</u>:

$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$

$\left.\begin{array}{l} A_{ABE} = \frac{ET \cdot AB}{2} \\ ET = AD \end{array}\right| \Rightarrow A_{ABE} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ cm}^2 \quad \textbf{(1)}$

d (B, EA) = BS

$A_{BAE} = \frac{BS \cdot AE}{2} = \frac{BS \cdot 2\sqrt{13}}{2} = BS \cdot \sqrt{13} \quad \textbf{(2)}$

(1) și **(2)** $\Rightarrow BS \cdot \sqrt{13} = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow BS = \frac{16\sqrt{13}}{13}$ cm

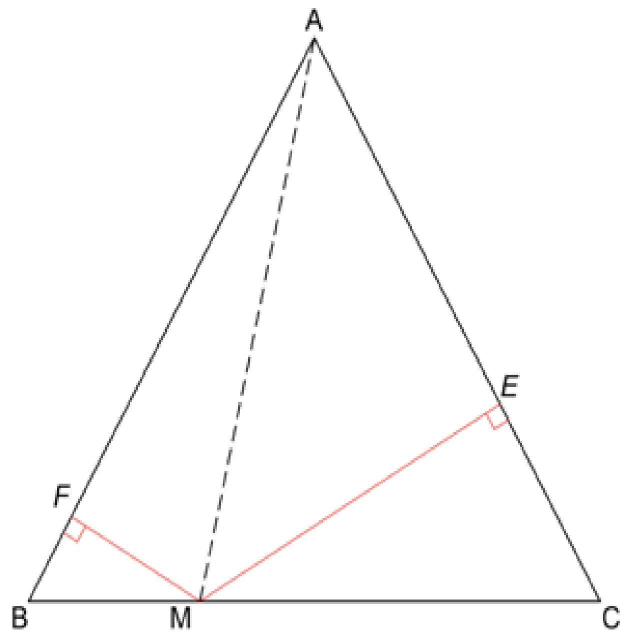
d (A, BE) = AU

$EB = \sqrt{EC^2 + BC^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$A_{ABE} = \frac{AU \cdot EB}{2} = \frac{AU \cdot 2\sqrt{5}}{2} = AU \cdot \sqrt{5} \quad \textbf{(3)}$

(1) și **(3)** $\Rightarrow AU \cdot \sqrt{5} = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow AU = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ cm

Problema 6



Ipoteza:

Δ ABC echilateral
M ∈ (BC)
ME ⊥ AC
MF ⊥ AB

Concluzie:
ME + MF = constantă egală cu înălțimea

Demonstrație:

$A_{ABM} + A_{AMC} = A_{ABC}$

$\frac{MF \cdot AB}{2} + \frac{ME \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AA`}{2}$

[AB] ≡ [AC] ≡ [BC]

$MF \cdot AB + ME \cdot AB = AB \cdot AA' \quad /: \; AB$

$MF + ME = AA'$

Problema 7

<u>Ipoteza</u>:

$m(\widehat{xOy}) = 90^{o}$

Oz – bisectoarea $\widehat{xOy}$

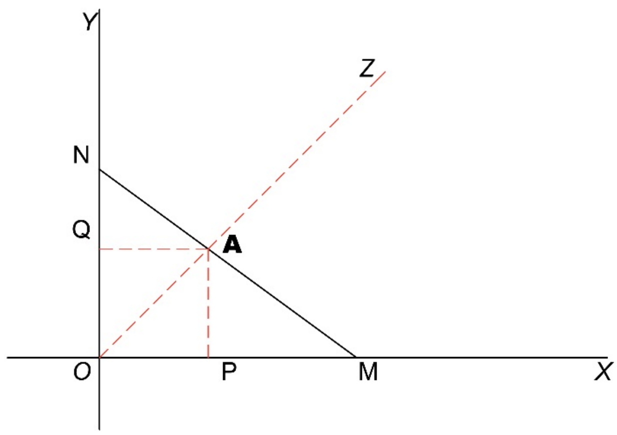
A ∈ Oz

MN secantă

A ∈ (MN)

M ∈ (Ox

N ∈ (Oy



<u>Concluzie</u>:

$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ are aceiași valoare oricare ar fi poziția secantei

<u>Demonstrație</u>:

$A_{OAN} + A_{OAM} = A_{NOM}$

$\frac{AQ \cdot NO}{2} + \frac{AP \cdot OM}{2} = \frac{NO \cdot OM}{2}$

$AQ \cdot NO + AP \cdot OM = NO \cdot OM$

[QA] = [AP] (se află pe bisectoare)

$AP \cdot (NO + OM) = NO \cdot OM$ /: $NO \cdot OM \cdot AP$

$\frac{NO + OM}{NO \cdot OM} = \frac{1}{AP} \Rightarrow \frac{1}{NO} + \frac{1}{MO} = \frac{1}{AP}$