Lect. dr. Lucian Maticiuc
Facultatea de Matematică
Seminar informal de didactica matematicii
Vineri, 24 februarie 2017[1]

I Formule combinatoriale obţinute din probleme de numărare şi/sau cu ajutorul schemelor clasice de probabilitate

1. Avem un grup de n bărbaţi şi m femei. Câte grupe de r persoane se pot forma? Să se deducă apoi identitatea
$$C_n^r \cdot C_m^0 + C_n^{r-1} \cdot C_m^1 + C_n^{r-2} \cdot C_m^2 + \ldots + C_n^0 \cdot C_m^r = C_{n+m}^r \,. \tag{1}$$
În particular, se obţine şi identitatea
$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n \,.$$
Rezolvare:
Evident, există C_{n+m}^r moduri de a forma o grupă de r persoane.
Pe de altă parte, o grupă de r persoane se poate astfel: luăm $k = \overline{0,r}$ şi apoi, pentru fiecare k, considerăm k persoane din cei n bărbaţi iar celelalte $(r-k)$ persoane din cele m femei, deci, conform principiului multiplicării, avem $C_n^k \cdot C_m^{k-r}$ variante de alegere.
Deci numărul posibil de grupe de r persoane sunt $C_n^r \cdot C_m^0 + C_n^{r-1} \cdot C_m^1 + C_n^{r-2} \cdot C_m^2 + \ldots + C_n^0 \cdot C_m^r$, unde r este luat astfel încât $0 \leq r \leq n \wedge m$.
Astfel obţinem identitatea
$$\sum\nolimits_{k=0}^{r} C_n^k \cdot C_m^{r-k} = C_{n+m}^r \,.$$

2. Avem un grup de n persoane. Să se determine numărul de posibile alegeri ale unei comisii cu r membri care conţin sau care nu conţin o persoană anume. Să se deducă apoi identitatea
$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} \,, \quad 1 \leq r \leq n. \tag{2}$$

3. Avem o mulţime cu numerele $\{1, 2, \ldots, n\}$. Câte submulţimi de k numere se pot forma care să aibă numărul i ca cel mai mare număr al mulţimii respective? Să se deducă apoi identitatea
$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \ldots + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k \,. \tag{3}$$

4. Avem un grup de n persoane. Să se determine, în două moduri, numărul de posibile alegeri ale unei comisii cu orice număr de membri. Să se deducă apoi identitatea
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \,. \tag{4}$$

5. Avem un grup de n persoane. Să se determine, în două moduri, numărul de posibile alegeri ale unei comisii cu orice număr de membri şi ale unui preşedinte al fiecărei comisii. Să se deducă apoi identitatea
$$1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1} \,. \tag{5}$$

[1] **Pentru versiunea completă a documentului (toate exemplele şi rezolvările, precum şi toată teoria necesară) scrieţi-mi la adresa lucianmaticiuc@yahoo.com.**

6. Avem un grup de n persoane. Să se determine, în două moduri, numărul de posibile alegeri ale unei comisii cu orice număr de membri şi ale unui preşedinte al fiecărei comisii şi ale unui secretar al fiecărei comisii (preşedintele poate fi şi secretar). Să se deducă apoi identitatea

$$1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + n^2 \cdot C_n^n = n\,(n+1) \cdot 2^{n-2}\,. \tag{6}$$

7. Avem un grup de n persoane. Să se determine, în două moduri, numărul de posibile alegeri ale unei comisii de oricâte persoane şi ale unui preşedinte al respectivei comisii şi ale unui secretar al respectivei comisii şi ale unui cenzor al respectivei comisii (preşedintele poate fi şi secretar şi cenzor). Să se deducă apoi identitatea

$$1^3 \cdot C_n^1 + 2^3 \cdot C_n^2 + \ldots + n^3 \cdot C_n^n = n^2\,(n+3) \cdot 2^{n-3}\,. \tag{7}$$

8. Avem un grup de n persoane. Să se determine, în două moduri, numărul de posibile alegeri ale unei comisii cu j membri şi, din această comisie, a unei subcomisii cu $i \leq j$ membri. Să se deducă apoi identitatea

$$C_n^1 \cdot C_1^i + C_n^2 \cdot C_2^i + \ldots + C_n^n \cdot C_n^i = C_n^i \cdot 2^{n-i}\,, \quad \text{unde } 1 \leq i \leq n. \tag{8}$$

9. **(Problema lui Banach)** Un fumător cumpără două cutii de chibrituri, fiecare conţinând n beţe. De fiecare dată când are nevoie de un chibrit scoate la întâmplare o cutie şi consumă un băţ. Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că o cutie este goală cealaltă să conţină k beţe?

   Pe baza rezultatului precedent, obţineţi şi identitatea

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + \ldots + 2^{n-1} C_{n+1}^n + 2^n C_n^n = 2^{2n}. \tag{9}$$

II Limite obţinute cu ajutorul Teoriei Probabilităţilor

1. (**Formula lui Stirling**) Să se arate că
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}}{n!} = 1.$$

2. Să se arate că
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{\sqrt[3]{2}}{n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right] = 1.$$

3. Să se arate că
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^n}{\sqrt[3]{k!}}\ \sin\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{\sqrt[3]{2}}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right] = 1.$$

4. Să se arate că
$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{j=0}^{nt}\frac{n^j}{j!} = 1, \quad \text{pentru orice } t > 1;$$
$$(b)\quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{j=0}^{nt}\frac{n^j}{j!} = 0, \quad \text{pentru orice } t < 1;$$
$$(c)\quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!} = \frac{1}{2}\,.$$

5. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că
$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right);$$
$$(b)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\right)dx_1\ldots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

References

[1] Paolo Baldi, *Calcolo delle probabilità* (seconda edizione), McGraw-Hill, Milano, 2011.

[2] George Ciucu, Virgil Craiu, Ion Săcuiu, *Probleme de statistică matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[3] George Ciucu, Virgil Craiu, Ion Săcuiu, *Probleme de teoria probabilităţilor*, Ediţia a II-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[4] George Ciucu, Gabriel Sîmboan, *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică. Culegere de probleme*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.

[5] George Ciucu, Constantin Tudor, *Probabilităţi şi procese stochastice*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1978.

[6] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk, *Modern Mathematical Statistics with Applications* (Second Edition), series: Springer Texts in Statistics, Springer New York, 2012.

[7] Jean Jacod, Philip Protter, *Probability Essentials* (Second Edition), Springer–Verlag Berlin, 2004.

[8] R.G. Laha, V.K. Rohatgi, *Probability Theory*, John Wiley & Sons, U.S.A., 1979.

[9] Gheorghe Mihoc, Nicolae Micu, *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[10] Sheldon Ross, *A First Course in Probability* (Eighth Edition), Pearson, 2010.

[11] Iulian Stoleriu, *Statistica prin Matlab*, Editura Matrix ROM, Bucureşti, 2010.

[12] John L. Weatherwax, *A Solution Manual for: A First Course In Probability by Sheldon M. Ross*, http://www.waxworksmath.com/ce_solutionmanuals.asp, 2013.