Arbori şi structuri decizionale

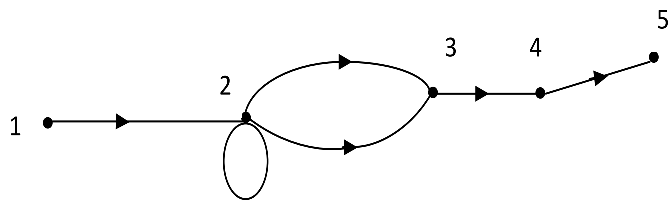
Geanina Havârneanu

Introducere

Teoria grafurilor a apărut din rațiuni pur pragmatice. Un exemplu care ilustrează cea mai simplă modalitate de a utiliza grafurile este următoarea problemă:

Reprezintă printr-o schemă activitățile din programul de dimineață al lui Matei: Mă scol (1), apoi mă spăl (2'). Uneori fac gimnastică (2), alteori iau direct micul dejun pregătit de mama (3) (alteori îmi pregătesc singur micul dejun (3')). Apoi îmi verific ghiozdanul (4) și plec la şcoală (5).

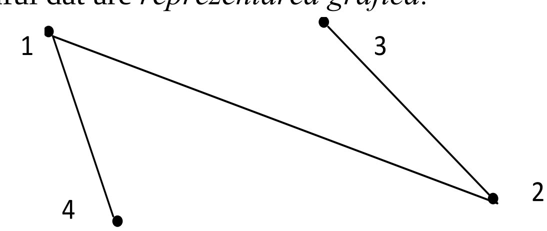
(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)



Secțiunea A: Grafuri. Noțiuni elementare

Definița 1. Se numeşte ***graf neorientat*** o pereche ordonată de mulțimi notată G=(V, M) unde V este o mulțime finită şi nevidă de elemente distincte ce se numesc ***vârfuri***, iar M este o mulțime de perechi neordonate de elemente din V; elementele lui M se numesc ***muchii***. Într-un graf neorientat muchia [x,y] este aceeaşi cu muchia [y,x].

Exemplu de graf neorientat: G=(V, M) unde: V={1,2,3,4}, M={[1,2],[2,3],[1,4]} (*reprezentarea textuală*). Graful dat are *reprezentarea grafică:*



Definița 2. Se numeşte ***graf orientat***, o pereche ordonată de mulțimi notată G=(N, A) unde N este o mulțime finită şi nevidă de elemente distincte ce se numesc ***noduri***, iar A este o mulțime de perechi ordonate de elemente distincte din N; elementele lui A se numesc ***arce***. Într-un graf orientat două noduri pot fi unite prin cel mult o muchie de un sens dat.

Definiția 3. Se numește ***ordinul vârfului*** (***gradul nodului***), numărul de muchii ce pleacă din vârf (nod) sau ajung în vârf (nod).

Definiția 4. Se numește ***ordinul*** (***gradul***) ***grafului neorientat*** (***orientat***), numărul de vârfuri (noduri) ale sale.

Definiția 5. Se numesc ***vârfuri*** (***noduri***) ***adiacente***, două vârfuri (noduri) unite printr-o muchie (arc).

Definiția 6. Se numesc ***muchii*** (***arce***) ***adiacente***, două muchii (arce) distincte cu o extremitate comună.

Definiția 7. Se numește graf complet, un graf în care orice două vârfuri sunt unite exact printr-o muchie.

Proprietatea 1. Într-un graf complet de ordinul n există n(n-1)/2 muchii.

Demonstrație: Din cele n vârfuri ale grafului neorientat complet de ordin n, se pot considera perechile neordonate de vârfuri din G, care sunt în număr de C_n^2, deci numărul muchiilor este n(n-1)/2.

Definiția 8. Se numește ***lanț*** (***drum***) în graful neorientat (orientat) G, o succesiune de vârfuri L=[z_1, z_2, …, z_k], unde z_1, z_2, …, z_k aparțin lui V, cu proprietatea că oricare două vârfuri (noduri) consecutive sunt adiacente, adică [z_1, z_2], [z_2, z_3], …,[z_{k-1}, z_k] $\in$ M. Vârfurile (nodurile) z_1 și z_k se numesc ***extremitățile*** lanțului (drumului), iar numărul de muchii (arce) care intră în componența sa reprezintă ***lungimea lanțului*** (***drumului***).

Definiția 9. Se numește ***lanț elementar*** (***drum elementar***) în graful neorientat (orientat) G, un lanț (drum) cu proprietatea că vârfurile (nodurile) sale sunt distincte două câte două.

Definiția 10. Se numește ***ciclu*** (***circuit***) în graful neorientat (orientat) G, un lanț (drum) în care z_1=z_k și muchiile (arcele) sale sunt distincte două câte două.

Definiția 11. Se numește ***ciclu elementar*** (***circuit elementar***) în graful neorientat (orientat) G, un ciclu (circuit) cu proprietatea că toate vârfurile (nodurile) cu excepția primului și a ultimului sunt distincte două câte două.

Definiția 12. Se numește ***graf conex***, un graf în care oricare două vârfuri (noduri) sunt unite printr-un lanț (drum).

Definiția 13. Se numește ***arbore***, un graf conex fără cicluri.

Lema 1. Într-un arbore, orice două vârfuri se pot uni printr-un lanț unic.

Demonstrație: Fie A un arbore și x_k, x_p două vârfuri ale lui A. Presupunem prin reducere la absurd că între cele două vârfuri există două lanțuri: L'=[x_k, x_i,…, x_j, x_p] și L"=[x_k, x_l,…, x_m, x_p]. Atunci lanțul L=[x_k, x_i,…, x_j, x_p, x_m,…, x_l, x_k] este ciclu, fapt ce contrazice ipoteza (graf conex fără cicluri). De unde se deduce concluzia lemei 1.

Lema 2. Într-un arbore există un vârf de grad 1.

Demonstrație: Fie A un arbore cu ordinul lui A=n și x_k un vârf al său. Presupunem prin reducere la absurd că orice vârf al arborelui are ordinul cel puțin egal cu 2. Cum A este arbore, deci graf conex, deducem că există lanțuri în A. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că există L=[x_1, x_2,…, x_{k-1}, x_k] un lanț elementar maximal din A, cu lungimea k. În plus, cum ordinul lui x_k este cel puțin egal cu 2, deducem că x_k este adiacent sau cu unul dintre vârfurile x_1,…, x_{k-2} (fie acesta x_j), sau cu vârful x_m, unde m>k. Așadar, fie putem construi ciclul C=[x_j, x_{j+1},…, x_{k-1}, x_k, x_j] (contradicție, deoarece A este arbore, deci fără cicluri), fie putem construi L'=[x_1,x_2,…, x_k, x_m] un lanț elementar din A, cu lungimea k+1 (contradicție cu maximalitatea lui L). De unde se deduce concluzia lemei 2.

Propoziția 2. Într-un arbore de ordinul n, există n-1 muchii.

Demonstrație: Demonstrăm inductiv. Pentru n=1 se obține un graf cu zero muchii, care prin convenție este arbore. Considerăm ipoteza inductivă: *Într-un arbore de ordinul k, există k-1 muchii*; unde k este un număr natural fixat. Considerăm un arbore A de ordinul k+1, care are un vârf terminal x, deci ordinul lui x este 1 (deci există o singură muchie care are pe x ca extremitate). Eliminând vârful x, obținem un nou arbore, A', cu ordinul k și, în baza ipotezei inductive, deducem că numărul său de muchii este k-1. Așadar, numărul de muchii ale lui A este k. De unde se deduce concluzia propoziției.

Teorema 1. Fiind date numerele naturale $0<d_1\leq\ldots\leq d_n$, $n\geq 2$, să se arate că există un arbore cu n vârfuri cu ordinele egale cu numerele date, dacă și numai dacă $d_1+d_2+\ldots+d_n=2n-2$.

Demonstrație: Fie un arbore cu n vârfuri cu ordinele egale cu numerele date $0<d_1\leq\ldots\leq d_n$. Dacă ordinul vârfului x_i este d_i cu $i\in\{1, 2,\ldots, n\}$, atunci, conform lemei 2, deducem că $d_1+d_2+\ldots+d_n$=dublul numărului muchiilor$=2n-2$, pentru că fiecare muchie are două extremități.

Reciproc, demonstrăm prin inducție. Pentru n=2, deci există două vârfuri și o muchie, așadar $d_1=d_2=1$, deci $d_1+d_2=2\cdot 2-2$, adevărat. Considerăm ipoteza inductivă: *Fiind date numerele naturale $0<d_1\leq\ldots\leq d_k$ cu $d_1+d_2+\ldots+d_k=2k-2$, există un arbore cu k vârfuri cu ordinele egale cu numerele date.*

Fie numerele naturale $0<d_1\leq\ldots\leq d_{k+1}$ cu $d_1+d_2+\ldots+d_{k+1}=2k$ (*). Din lema 2 deducem că există un vârf de ordin 1și din relația (*) deducem că $d_1=1$ și $d_2>1$. Așadar, (*) se poate rescrie ca $(d_2-1)+\ldots d_k+d_{k+1}=2k-2$ și, în baza ipotezei inductive, deducem că există un arbore A de ordinul k, ce are gradele vârfurilor $d_2-1,\ldots ,d_k, d_{k+1}$. Construim arborele A' de ordinul k+1, obținut din A prin adăugarea unui vârf de început care va avea gradul 1, gradul vârfului al doilea devine d_2 și gradul vârfului k+1 devine d_{k+1}, așadar ordinele vârfurilor vor fi $0<d_1\leq\ldots\leq d_{k+1}$ cu $d_1+d_2+\ldots+d_{k+1}=2k$. De unde se deduce concluzia teoremei.

Secțiunea B: Aplicații

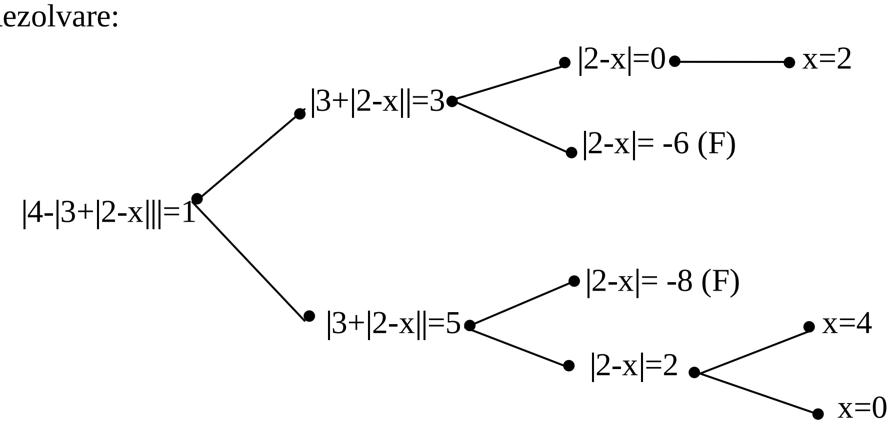
Cele mai importante aplicații ale arborilor sunt structurile decizionale.

Probleme:

1. *Scriind arborele asociat, rezolvați ecuația* |4-|3+|2-x|||=1.

(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)

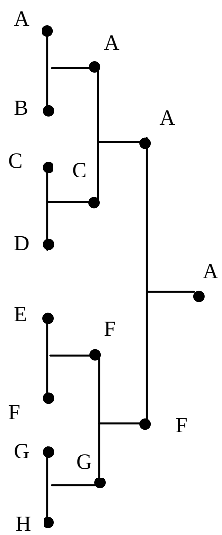
Rezolvare:



S={0, 2, 4}.

2. *Arborele de mai jos redă partidele de șah, dintr-o competiție în care s-a desemnat campionul. Care jucători au câștigat fiecare partidă? Câte partide s-au jucat pentru a desemna campionul? Care este numărul de perechi de jucători care nu se confruntă direct?*

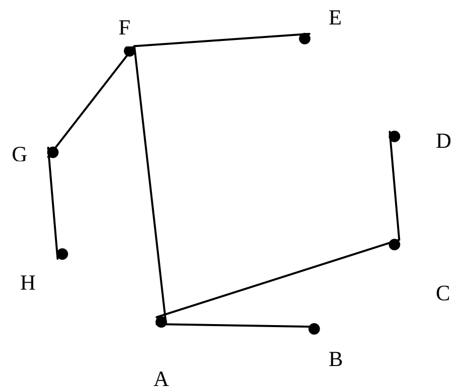
(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)



Rezolvare:

Jucătorii care se află în capetele muchiilor orizontale sunt cei care au câștigat partida, deci A, C, F, G. Numărul de partide coincide cu numărul de muchii ale grafului, deci s-au jucat 7 partide.

Asociem arborelui dat un graf care are 8 vârfuri (corespunzătoare celor 8 jucători) și 7 muchii (corespunzătoare partidelor jucate). Se obține graful:

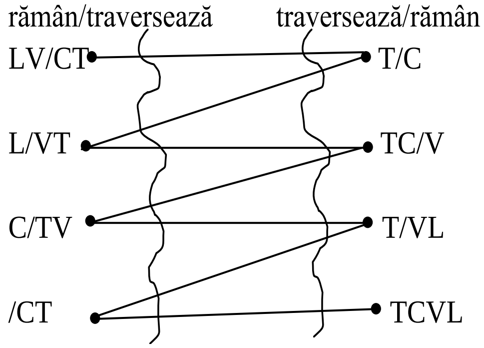


Jucătorii care se confruntă direct sunt reprezentați prin muchiile grafului, deci, deoarece există muchiile [A,B], [A,C], [A,F], [C,D], [E,F], [F,G], [G,H], conchidem că 7 jucători s-au confruntat direct. Cum într-un graf complet sunt n(n-1)/2 muchii, iar graful nostru are 8 vârfuri și 7 muchii, deducem că numărul perechilor de jucători care nu s-au confruntat direct este egal cu numărul muchiilor care lipsesc din graful asociat pentru a deveni un graf complet. Așadar, 8(8-1)/2-7=21.

3. *Un țăran (Ț) avea o capră (C), o varză (V) și un lup (L). Țăranul trebuie să traverseze* *un râu, dar nu poate să traverseze cu barca decât pe unul dintre ele. Cum reușește el să ajungă cu capra, varza și lupul pe malul celălalt al râului, astfel încât să nu le piardă pe niciuna.*

(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)

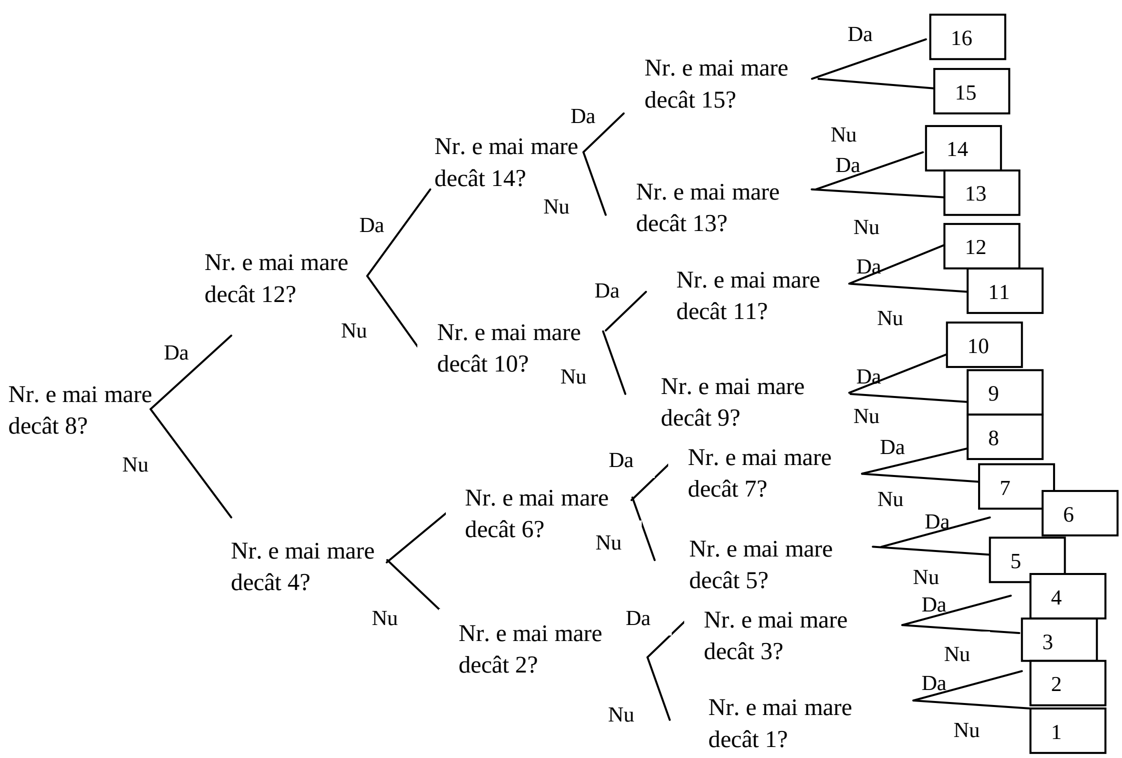
Rezolvare:



4. *Care este numărul minim de întrebări (la care să se răspundă prin da sau nu) care se pot pune pentru a ghici un număr natural cuprins între 1 și 16?*

(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)

Rezolvare: Procesul interogativ modelează funcția exponențială de tipul 2^k, cu k număr natural, prin urmare succesiunea de întrebări are legătură cu scrierea numerelor în baza 2. Cum $16=2^4$, deducem că numărul minim este de 4 întrebări. În general, pentru aflarea unui număr n, numărul minim de întrebări ce trebuie puse este fie $\log_2 n$, dacă n este putere a lui 2 fie $1+[\log_2 n]$, în caz contrar.



5. *Se dau 5 monede, dintre care una este falsă (are greutatea mai mică decât cele adevărate). Folosind o balanță, determinați din cel mult două cântăriri care este moneda falsă.*

(*Manual pentru clasa a XI-a, M5, Editura Sigma, M. Singer, C. Voinea*)

Rezolvare:

Cântărim monedele 1, 2 pe talerul din stânga și monedele 3, 4 pe talerul din dreapta. Balanța este echilibrată ?

- Da: Moneda 5 este falsă
- Nu: Talerul din stânga este mai ridicat ?
  - Da: Cântărim moneda 1 pe talerul din stânga și moneda 2 pe talerul din dreapta. Talerul din stânga este mai ridicat ?
    - Da: Moneda 1 este falsă
    - Nu: Moneda 2 este falsă
  - Nu: Cântărim moneda 3 pe talerul din stânga și moneda 4 pe talerul din dreapta. Talerul din stânga este mai ridicat ?
    - Da: Moneda 3 este falsă
    - Nu: Moneda 4 este falsă

6. Se dau cinci pungi, fiecare a câte cinci monede. Se știe că una din pungi conține numai monede false (au greutatea diferită față de cea a monedelor adevărate), fiecare tip de monedă are masa egală cu un număr natural, iar diferența maselor celor două tipuri de monede nu este multiplu de 4. Folosind cântarul electronic și cel mult trei cântăriri, aflați care este sacul cu monede false.

G. Havârneanu

Rezolvare:

Cântăresc o monedă din prima pungă și obțin valoarea numărului k.

Cântăresc 5 monede, câte o monedă din fiecare pungă, și obțin valoarea numărului m.

Cântăresc 15 monede, astfel alese: o monedă din prima pungă, două monede din a doua pungă ș.a.m.d cinci monede din a cincea pungă și obțin valoarea numărului n.

m-k ⁞ 4

- k este masa monedei false, deci masa monedei adevărate este $\frac{m-k}{4} \in$N, deci, diferența maselor lor este $\frac{|m-5k|}{4} \in$N. — Numărul pungii care conține monede false este $\frac{|15\cdot \text{masa monedei adevărate} - n|}{\text{diferența maselor lor}} \in$N.
- k este masa monedei adevărate, deci masa monedei false este $m - 4k \in$N, deci, diferența maselor lor este $|m - 5k| \in$N. — Numărul pungii care conține monede false este $\frac{|15\cdot \text{masa monedei adevărate} - n|}{\text{diferența maselor lor}} \in$N, (metoda falsei ipoteze pentru rezolvarea problemelor de aritmetică).

Bibliografie

M. Singer, C. Voinea, *Manual pentru clasa a XI-a*, M5, Editura Sigma, 2006.

I. Tomescu, *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.