Câteva observații metodice cu privire la predarea matematicii în gimnaziu

Claudiu-Ștefan Popa

Expunerea care urmează își propune să prezinte câteva chestiuni metodice cu privire la predarea matematicii în gimnaziu, după cum urmează:

I. Folosirea limbajului matematic neformalizat (natural) în predare;
II. Continuitatea, în ceea ce privește limbajul folosit în predare, între ciclul primar și cel gimnazial, ilustrată prin sugestii metodice la predarea:
   A. unor formule matematice;
   B. descompunerii în factori a sumelor algebrice (cl. a VII-a, cl. a VIII-a);
   C. proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor naturale față de adunarea numerelor naturale (cl. a V-a);
   D. ecuațiilor (cl. a V-a).

I. Folosirea limbajului matematic neformalizat (natural) în predare.
Unul dintre obiectivele importante pe care le urmărim este formarea și dezvoltarea, la elevi, a limbajului specific disciplinei matematică , condiție necesară și prealabilă apariției unei gândiri matematice autonome. Realizarea acestui obiectiv este subminată de pătrunderea masivă a limbajului matematic formalizat, în dauna celui natural, până la clasele de început de gimnaziu. Fără un vocabular matematic îndeajuns de bogat și fără capacitatea de a lega noțiunile matematice învățate în limbajul specific disciplinei, învățarea la matematică se reduce la aplicarea unor algoritmi și la învățarea mecanică a rezolvării unor clase de probleme, proces supus cu ușurință uitării rapide. Formalizarea limbajului matematic are un caracter istoric și, tot așa, ea trebuie introdusă treptat în învățare, arătându-și beneficiile, adică rigoare, claritate și precizie, dacă cei care iau contact cu ea posedă deja un vocabular matematic dezvoltat din limbajul natural. Ea este benefică celor care posedă deja un început de cultură matematică bine închegată și trebuie să înceapă lent în primii doi ani de gimnaziu, urmând să fie mai bine reprezentată în liceu. Unul dintre motivele obiective pentru care se recurge mult la limbajul formalizat ține de încărcarea excesivă a programelor de matematică. Dacă viitorul imediat nu va aduce o „aerisire” a acestora, cred că o soluție ar fi compromisul de a se preda măcar

unele dintre noțiuni cu folosirea limbajului natural. De asemenea ținând cont de faptul că elevii mai mici scriu încet, poate fi benefic pentru profesor să recurgă la fișe cu aspecte teoretice formulate în limbajul natural și însoțite de exemple, înmânate fiecărui elev, la folosirea manualului ori a auxiliarelor, precum și la mijloace moderne de predare, cu ajutorul cărora se poate câștiga timp.

În continuare vor fi prezentate exemple de folosire a limbajului natural în predarea unor proprietăți:

Limbaj formalizat	**Limbaj neformalizat(natural)**
$(\forall)a \in \mathbb{N},\quad 1\|a$ (sau $a\vdots 1$)	Numărul 1 este divizor al fiecărui număr natural, ori Orice număr natural este multiplul numărului 1
$(\forall)a \in \mathbb{N},\quad a\|a$ (sau $a\vdots a$)	Fiecare număr natural este propriul său divizor(multiplu)
$(\forall)a \in \mathbb{N},(\forall)b \in \mathbb{N}^*, a\|b \Rightarrow a \le b$	Un divizor al unui număr natural nenul este cel mult egal cu acel număr, ori Un multiplu nenul al unui număr natural este cel puțin egal cu acel număr
$(\forall)a \in \mathbb{N}, a\|0$ (sau $0\vdots a$)	Orice număr natural este divizor al lui 0, ori Zero este multiplul fiecărui număr natural
$(\forall)a \in \mathbb{N},(\forall)b \in \mathbb{N}, a\|b$ și $b\|a \Rightarrow a=b$ sau ($a\vdots b$ și $b\vdots a \Rightarrow a=b$)	Dacă fiecare dintre două numere naturale este divizor(multiplu) al celuilalt, atunci ele sunt numere egale
$(\forall)a \in \mathbb{N},(\forall)b \in \mathbb{N},(\forall)c \in \mathbb{N}, a\|b$ și $b\|c \Rightarrow a\|c$	Divizorul(Multiplul) divizorului(multiplului) unui număr natural este divizor(multiplu) al acelui număr natural
$(\forall)d \in \mathbb{N},(\forall)a \in \mathbb{N},(\forall)b \in \mathbb{N}, d\|a$ și $d\|b \Rightarrow d\|a+b$	Un divizor al fiecărui termen al unei sume finite de numere naturale este și divizor al acelei sume, ori Dacă fiecare termen al unei sume de numere naturale este multiplu al unui număr natural, atunci și suma este multiplu al acelui număr natural.
$(\forall)d \in \mathbb{N},(\forall)a \in \mathbb{N},(\forall)b \in \mathbb{N}, d\|a$ și $d\|b \Rightarrow d\|a-b$, dacă $a \ge b$	Un divizor al fiecărui termen al unei diferențe de numere naturale este și divizor al acelei diferențe.

$(\forall)a\in\mathbb{N},(\forall)b\in\mathbb{N},(\forall)c\in\mathbb{N},\ a=b\cdot c$ $\Rightarrow b\mid a$ și $c\mid a$	Oricare dintre factorii unui produs este divizor al acelui produs, ori Un produs este multiplul fiecăruia dintre factorii săi
$(\forall)a\in\mathbb{N},(\forall)b\in\mathbb{N},(\forall)k\in\mathbb{N},\ a\mid b$ $\Rightarrow a\mid b\cdot k$	Divizorul unui număr natural este divizor al fiecărui multiplu al acelui număr natural, ori Orice multiplu al unui multiplu al unui număr natural este multiplu al acelui număr natural
$(\forall)a\in\mathbb{Z},\ -(-a)=a$	Opusul opusului unui număr întreg este acel număr întreg
$(\forall)a\in\mathbb{Q}^*,\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$	Inversul inversului unui număr rațional nenul este acel număr rațional
$n\in\mathbb{N},\ n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}\Rightarrow\tau(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$	Numărul tuturor divizorilor unui număr natural este dat de produsul succesorilor exponenților puterilor tuturor numerelor prime care apar în descompunerea lui în factori primi
Cu notațiile convenționale, în fiecare triunghi avem $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$, proprietate care arată că aria triunghiului este bine definită	Într-un triunghi, produsul dintre lungimile unei laturi și a înălțimii corespunzătoare ei este același pentru fiecare latură
Dacă *M, N, P* și *Q* sunt mijloacele laturilor *AB, BC, CD,* respectiv *AD* ale patrulaterului *ABCD,* atunci patrulaterul *MNPQ* este paralelogram	Mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram
Un patrulater *ABCD* este ortodiagonal dacă și numai dacă $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$	Un patrulater este ortodiagonal dacă și numai dacă suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi
Un patrulater convex *ABCD* este circumscriptibil dacă și numai dacă $AB+CD=AD+BC$	Un patrulater convex este circumscriptibil dacă și numai dacă sumele laturilor din fiecare pereche de laturi opuse sunt egale

Totuși, folosirea excesivă a limbajului matematic neformalizat poate lungi și îngreuia înțelegerea unei expuneri matematice, motiv pentru care nu trebuie abuzat de el. Există teoreme importante , de exemplu Teorema celor trei perpendiculare, care pot fi cu greu enunțate în limbaj natural.

II. <u>Continuitatea, în ceea ce privește limbajul folosit în predare, între ciclul primar și cel gimnazial, ilustrată prin sugestii metodice la predarea:</u>

A. unor formule matematice.

O altă chestiune care merită pusă în discuție este cea a modului în care comunicăm elevului diverse formule, expresii matematice. În clasele primare elevul învață că numele dat unei expresii numerice este cel al ultimei operații care trebuie efectuată, în sensul ordinii efectuării operațiilor. De exemplu, $5\cdot 3-4\cdot 2$ este o diferență, pentru că, dintre cele 3 operații care apar în expresie, ultima care trebuie efectuată este scăderea, iar expresia numerică $\left[\left(10-8\right)\cdot 3+4\right]:2$ este un cât, deoarece ultima operație care trebuie efectuată este împărțirea. Ulterior, la clasele de gimnaziu, această achiziție este uitată de către elevi pentru că mulți dintre profesori nu o mai folosesc în predare, în exprimare și nu cer elevilor să o folosească. Ea poate fi extinsă și la gimnaziu la expresiile algebrice, adică expresiile alcătuite dintr-o succesiune de operații cu numere reale scrise și cu ajutorul unor litere. Astfel, numele de operație al unei expresii algebrice va fi dat de ultima operație care trebuie efectuată, în sensul ordinii efectuării operațiilor, în expresia numerică obținută, prin înlocuirea numerelor reale exprimate prin litere cu valori numerice oarecare ale lor. Utilitatea acestei întreprinderi va fi justificată în continuare. Deocamdată, în tabelul următor, se vor lua în considerare diverse formule matematice și modul cum sunt „citite”:

Formula	„Citirea” formulei	„Citirea” recomandată a ei
$A_{\Delta}=\dfrac{a\cdot h_a}{2}$	Latura înmulțită cu înălțimea corespunzătoare ei, pe doi	Jumătate din produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei
$A_{\square}=l^2$	Latura la pătrat	Pătratul lungimii laturii sale
$A_{romb}=\dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$	Diagonala1 înmulțită cu diagonala 2, supra 2	Jumătate din produsul diagonalelor rombului
$A_{trapez}=\dfrac{\left(B+b\right)\cdot h}{2}$	Baza mare plus baza mică, înmulțită cu înălțimea, supra 2	Jumătate din produsul dintre suma bazelor sale și înălțimea sa, ori Produsul dintre linia mijlocie a trapezului și înălțimea sa, ori Produsul dintre media aritmetică a bazelor și înălțimea sa
$m_g=\sqrt{a\cdot b},\ a\geq 0, b\geq 0$	Radical din *a* ori *b*	Rădăcina pătrată a produsului numerelor *a* și *b*

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$	*a* pătrat plus *b* pătrat plus 2 ori *a* ori *b*	Suma între pătratele termenilor și dublul produsului termenilor

Acest ultim exemplu din tabel se arată productiv atunci când trebuie aplicată formula pătratului unui binom ai cărui termeni sunt niște produse, ca în exemplul $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y,\ x, y \in \mathbb{R}$. Greșelile tipice aici sunt $2x^2$ în loc de $(2x)^2 = 4x^2$ sau $3y^2$ în loc de $(3y)^2 = 9y^2$.

B. <u>descompunerii în factori a sumelor algebrice (cl. a VII-a, cl. a VIII-a);</u>

Utilitatea folosirii numelui de operație al unei expresii algebrice este dovedită pregnant la descompunerea în factori a unor sume algebrice. În exemplul următor se pune în evidență o greșeală tipică la descompunerea în factori a expresiei $x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$. Astfel, deseori, se scrie $x^2 - 3x + 2 = x(x-3) + 2$, care este o identitate, însă membrul drept al ei nu constituie o descompunere în factori. Ea provine din aceea că cel care o comite nu-și dă seama că $x(x-3)+2$ este o sumă și nu un produs. Observăm deci că identificarea numelui de operație al unei expresii algebrice este foarte importantă. Deoarece, la lecția „Descompuneri în factori” de la clasa a VII-a, mulți profesori trec direct la metode de descompunere în factori și la exemplificarea lor, fără o pregătire teoretică minimă, consider că, firesc ar fi să se parcurgă următoarele etape:

- reamintirea descrierii unei sume algebrice ca o succesiune finită de adunări și scăderi de numere reale exprimate și prin litere.
  Exemplu: $4a^3 - 2a^2 - 1 = 4a^3 + \left(-2a^2\right) + (-1),\ a \in \mathbb{R}$
- reamintirea faptului că termenii unui produs se numesc factori. Exprimarea „factori de produs” întâlnită la unii profesori este, prin urmare, inutilă.
- Definirea descompunerii în factori ca transformare a unei sume algebrice într-un produs, urmată de exemple:
  a) În cl. a VI-a se face „ Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime”, ori, mai simplu „ Descompunerea numerelor naturale în factori primi”. Se reamintește faptul că egalitatea $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ reprezintă și transformarea sumei $8 \cdot 10 + 4$ în produsul $2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

b) Dacă schimbăm între ei membrii egalității ce exprimă proprietatea de compatibilitate dintre înmulțirea numerelor reale și adunarea numerelor reale se obține „proprietatea de scoatere a factorului comun”:

$ax+ay=a\cdot(x+y),\ a,x,y\in\mathbb{R}$, care, reprezintă, totodată, o transformare a unei sume într-un produs.

c) Dacă schimbăm între ei membrii egalităților care exprimă formulele de calcul prescurtat învățate deja de elevi se obțin, de asemenea, descompuneri în factori :

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;\ a^2-b^2=(a+b)(a-b);$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2,\ a,b,c\in\mathbb{R},$

Cu observația, neevidentă pentru unii elevi, că puterea este un caz particular de produs, deci $x^2-6x+9=(x-3)^2$ reprezintă o descompunere în factori.

- Deoarece în gimnaziu profesorul nu are la dispoziție suportul teoretic al teoriei polinoamelor, deci nici noțiunea de polinom ireductibil peste o mulțime numerică, alcătuirea riguroasă a itemilor este mai dificilă, însă nu imposibilă. Astfel:

  Exemple: Dacă se cere descompuneți în factori expresia x^3-4x se pot obține răspunsuri de tipul $x^3-4x=1\cdot(x^3-4x)$ sau $x^3-4x=x(x^2-4)$ sau $x^3-4x=x(x-2)(x+2)$, dintre care doar ultimul este cel dorit de profesor. Pentru a obține doar ultima variantă putem formula itemul după cum urmează:

  „Găsiți numerele întregi *a, b* și *c* astfel încât $x^3-4x=$ $=(x+a)(x+b)(x+c)$”.

- Acum se poate trece la dezvoltarea procedeelor de descompunere în factori expuse la b) și c).
- O atenție aparte merită descompunerea în factori a trinomului de gradul al doilea peste $\mathbb{R}$. Deși ecuațiile de tipul $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}$, după programă, ar trebui predate la sfârșitul cl. a VIII-a, nu puțini profesori o fac mult mai devreme, cu justificarea că, în acest fel, se simplifică efortul elevilor de rezolvare a exercițiilor ce presupun descompuneri în factori, pentru că , dacă $\Delta\geq 0$, se poate folosi

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, unde x_1, x_2 reprezintă soluțiile, numere reale, ale ecuației atașate $ax^2+bx+c=0$ Desigur, dacă $\sqrt{\Delta}$ este număr irațional ori coeficienții trinomului sunt numere întregi ale căror module sunt numere mari, ori numere raționale, ori numere iraționale , aceasta este calea indicată. De exemplu, $x^2+2x-1=\left(x+1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)$, deoarece, rezolvând ecuația atașată obținem $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$. Se vede că aceeași descompunere se poate obține cu un mic artificiu,

$$x^2+2x-1=x^2+2x+1-2=(x+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(x+1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right).$$

Totuși, în marea majoritate a exercițiilor propuse spre rezolvare elevilor, coeficienții sunt numere întregi, nu prea mari în modul, ceea ce face ca descompunerea în factori a trinomului să se poată face mai rapid prin „spargerea” termenului în *x* în sumă de doi termeni și apoi gruparea termenilor doi câte doi în vederea scoaterii factorului comun. Se poate indica și o regulă simplă care să conducă la aflarea rapidă a celor doi termeni în care trebuie spart termenul în *x*, fără a efectua mai multe încercări: dacă trinomul este $ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{Z}^*$, se caută două numere întregi *u* și *v* astfel încât $u\cdot v=a\cdot c$ și $u+v=b$ și se „sparge” $bx=ux+vx$. De exemplu , pentru descompunerea în factori a trinomului $2x^2-x-10$, se caută *u* și *v* astfel încât $uv=2\cdot(-10)=-20$ și $u+v=-1$ Dacă se mai observă că cele două numere au semne diferite și că modulul celui negativ este mai mare decât modulul celui pozitiv, se găsește ușor că $u=-5,\ v=4$, iar

$$2x^2-x-10=2x^2-5x+4x-10=x(2x-5)+2(2x-5)=(x+2)(2x-5)$$

Cred că elevii vor avea de câștigat dacă vor fi învățați mai întâi această ultimă metodă la lecțiile de descompunere în factori din cl. a VII-a și a VIII-a. Consider , de asemenea, că este greșit să se ceară elevilor să învețe mecanic formule de descompunere în factori, după modele din unele culegeri, cum ar fi: $x^2\pm(u+v)x+uv=(x\pm u)(x\pm v), u,v\in\mathbb{R}$ ori $uvx^2\pm(u+v)x+1=(ux\pm1)(vx\pm1),\ u,v\in\mathbb{R}^*$ ori

$ux^2 \pm (u+v)x + v = (x \pm 1)(ux \pm v)$, $u \in \mathbb{R}^*, v \in \mathbb{R}$, măcar pentru faptul că metoda descrisă mai sus acoperă toate aceste formule. Mai observăm că într-o primă fază elevul poate discerne între trinoamele care se descompun pe $\mathbb{R}$ și cele care nu se descompun, arătând că cele care nu se descompun păstrează semn constant pe $\mathbb{R}$. Deși scrierea trinomului ca o sumă ori diferență de pătrate constituie un exercițiu mai dificil în gimnaziu, cei care-l vor stăpâni, vor fi avantajați în liceu, în diverse tipuri de exerciții, cum ar fi rezolvarea anumitor integrale definite.

C. <u>proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor naturale față de adunarea numerelor naturale (cl. a V-a)</u>

Această proprietate poate fi prezentată elevilor folosindu-se achizițiile pe care aceștia le au din ciclul primar, ajutându-i să o descopere. Se poate începe cu o problemă de cl. a II-a:

„Un elev cumpără de la papetărie 11(*n*) caiete de același fel, care se vând cu 2(*m*) lei bucata. Ulterior, el mai cumpără 7(*p*) caiete de același fel, cu același preț, pentru fratele lui mai mic. Cât au costat toate caietele cumpărate de elev?” Elevii vor furniza două soluții, ca în clasele mici:

Soluția 1.

1) Câte caiete a cumpărat, în total, elevul?
   $11+7=18$(caiete) sau $n+p$ (caiete)
2) Cât au costat toate caietele cumpărate de elev?
   $18 \cdot 2 = 36$(lei) sau $m \cdot (n+p)$ (lei)

   Exercițiul problemei este $(11+7) \cdot 2 = 36$(lei) sau $m \cdot (n+p)$(lei)

Soluția a 2-a.

1) Cât au costat caietele din prima cumpărătură?
   $11 \cdot 2 = 22$(lei) sau $m \cdot n$(lei)
2) Cât au costat caietele din cea de-a doua cumpărătură?
   $7 \cdot 2 = 14$(lei) sau $m \cdot p$ (lei)
3) Cât au costat toate caietele cumpărate de elev?
   $22+14=36$(lei) sau $m \cdot n + m \cdot p$ (lei)

   Exercițiul problemei este $2 \cdot 11 + 2 \cdot 7 = 36$(lei) sau $m \cdot n + m \cdot p$ (lei)

   Egalând membrii stângi ai exercițiilor corespunzătoare celor două soluții se obține $2 \cdot (11+7) = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 7$ sau

$m\cdot(n+p) = m\cdot n+m\cdot p$, ceea ce reprezintă formula care exprimă distributivitatea înmulțirii față de adunare în $\mathbb{N}$.
Este indicat să se dea definiția din DEX a cuvântului distributivitate, „proprietate a unei operații matematice de a putea fi efectuată separat asupra diferiților termeni dintr-o expresie, rezultatul obținut fiind același ca și în cazul când operația ar fi fost aplicată întregii expresii”, dar , mai important trebuie aplicată această definiție la exemplul pe care deja l-am dat. Concret, factorul 2 se distribuie(este repartizat) ca factor la fiecare termen al sumei 11 + 7 și tot așa, factorul *m* se distribuie(repartizează) ca factor la fiecare termen al sumei *n* + *p* .
Dacă schimbăm ordinea termenilor în formulă, obținem ceea ce se mai numește proprietatea de scoatere a factorului comun: $mn+mp=m(n+p),\ m,n,p\in\mathbb{N}$. Acum elevii trebuie să fie îndemnați să observe că în membrul stâng sunt 3 operații, 2 înmulțiri și o adunare, iar în membrul drept doar două operații, o adunare și o înmulțire . Exemple numerice adecvate îi pot convinge de utilitatea acestei formule: $12\cdot 34+12\cdot 66=12\cdot(34+66)=12\cdot 100=1200$.
Pentru cazul general $mn_1+mn_2+....+mn_p=m(n_1+n_2+....n_p)$, în membrul stâng sunt $2p-1$operații, iar în cel drept p operații și pentru $p\ge 2$ avem $2p-1>p$. Prin urmare, în membrul drept se fac cu $(2p-1)-p=p-1$ operaţii mai puţin şi cu cât p este mai mare, cu atât mai mare va fi diferenţa între numărul operaţiilor efectuate în membrul stâng şi cel drept.
Proprietatea de distributivitate a înmulțirii numerelor naturale față de adunarea numerelor naturale, cu considerațiile de mai sus, ar trebui predată în cadrul lecției „Proprietăți ale înmulțirii numerelor naturale” și continuată la tema imediat următoare din programă „Factor comun”.
D. <u>ecuațiilor (cl. a V-a).</u>
În predarea noțiunii de ecuație la cl. a V-a se pot folosi cunoștințe acumulate de elevi în ciclul primar sau așa numita metodă a balanței, metodă care face apel la un model practic pentru facilitarea înțelegerii proprietăților de compatibilitate ale egalității numerelor dintr-o anumită mulțime numerică cu operațiile de adunare, scădere,

înmulțire și împărțire definite pe aceeași mulțime. Cred că metoda balanței ar trebui folosită abia după predarea noțiunii de număr întreg, când se poate argumenta corect trecerea termenilor dintr-un membru în celălalt al unei ecuații odată cu schimbarea semnului lor. Până atunci se pot utiliza, cu succes cunoștințe dobândite de elev în ciclul primar la operații cu numere naturale:

- într-o sumă cu doi termeni, fiecare dintre termeni este egal cu diferența dintre sumă și celălalt termen;
- într-o diferență, descăzutul este suma dintre scăzător și rest, iar scăzătorul este diferența dintre descăzut și rest;
- într-un produs de doi factori, fiecare dintre factori este egal cu câtul dintre produs și celălalt factor;
- într-o împărțire, deîmpărțitul este egal cu produsul dintre împărțitor și cât, iar împărțitorul este egal cu câtul dintre deîmpărțit și cât;
- într-o sumă, fiecare dintre termeni este egal cu diferența dintre sumă și suma tuturor celorlalți termeni;
- într-un produs, fiecare dintre factori este egal cu câtul dintre produs și produsul tuturor celorlalți factori.

Cu aceste reguli se pot rezolva imediat ecuații ușoare, cum ar fi:

$x+3=5,\ x-2=1,\ 10-x=3,\ 3x=15,\ x:2=5,\ 16:x=8,\ x\in\mathbb{N}^*$

Ele pot fi folosite și în rezolvarea altor ecuații, cu condiția ca elevul, mai întâi, să identifice corect numele de operație al unei expresii:

- ecuația $4x-1=3x,\ x\in\mathbb{N}$, va fi privită ca o scădere în care descăzutul este $4x$, scăzătorul este 1 și diferența este $3x$, echivalentă cu $1=4x-3x \Leftrightarrow 1=x,\ S=\{1\}$
- ecuația $2x-3-1=x,\ x\in\mathbb{N}$ va fi privită ca o scădere astfel $(2x-3)-1=x \Leftrightarrow 2x-3=x+1$și , în continuare, o vom privi ca o scădere în care diferența între descăzutul *2x* și scăzătorul *3* este *x+1*, deci
  $2x=(x+1)+3 \Leftrightarrow 2x=x+(1+3) \Leftrightarrow 2x=x+4 \Leftrightarrow 4=2x-x \Leftrightarrow 4=x,\ S=\{4\}$
- ecuația $7+x=13-x,\ x\in\mathbb{N}$ poate fi privită ca o adunare în care termenii sunt 7 și *x*, iar suma este $13-x$, ori ca o scădere cu

descăzutul 13 și scăzătorul *x* și cu rezultatul scăderii 7+*x*. Sunt 4 variante corecte de continuare însă doar una dintre ele este potrivită cu nivelul de cunoștințe ale elevului de cl. a V-a.

$$7+x=13-x,\ x\in\mathbb{N} \Leftrightarrow 7=(13-x)-x \Leftrightarrow ?$$

$$\Leftrightarrow x=(13-x)-7 \Leftrightarrow ?$$

$$\Leftrightarrow x=13-(x+7) \Leftrightarrow ?$$

$$\Leftrightarrow 13=(7+x)+x \Leftrightarrow 13=7+2x \Leftrightarrow 13-7=2x \Leftrightarrow 6=2x \Leftrightarrow x=3,\ S=\{3\}$$

Cred că abia în clasele a VII-a și a VIII-a se poate trece la rezolvarea unor ecuații mai dificile, după predarea proprietăților egalității numerelor raționale(reale), precum și a proprietăților de compatibilitate între egalitate și operații cu numere reale.