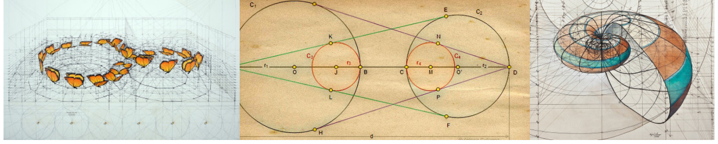


Concursul pentru ocuparea posturilor didactice

CERCUL

- **Referire la PROGRAMA PENTRU DISCIPLINA** ***MATEMATICĂ***
  - Anexa nr. 2 la OMECTS nr. 5620/ 11.11.2010

- **Selecție de probleme date la concursurile pentru ocuparea posturilor didactice: perioada 1994 – 2015**

  - enunțurile și soluțiile / indicații pentru subiectele selectate;

  - observații / sugestii rezultate teoretice folosite.

- **Bibliografie**

Cristina Timofte
Liceul Teoretic de Informatică „Grigore Moisil”
Iași

A. PROGRAMA PENTRU DISCIPLINA *MATEMATICĂ*

\- Anexa nr. 2 la OMECTS nr. 5620/ 11.11.2010

Programa pentru disciplina *Matematică* se adresează **absolvenţilor învăţământului superior de specialitate** şi **profesorilor** care se prezintă la *Concursul pentru ocuparea posturilor didactice/ catedrelor declarate vacante/ rezervate în unităţile de învăţământ preuniversitar.*

Programa pentru concurs este elaborată luând în considerare şi **programele şcolare în vigoare din învăţământul preuniversitar**, respectiv **programele pentru evaluările şi examenele naţionale la disciplina *Matematică***.

COMPETENŢE ALE PROFESORULUI DE MATEMATICĂ

Pe lângă conţinuturile ştiinţifice de specialitate şi cele de metodica predării matematicii, programa vizează competenţe pe care profesorul de matematică trebuie să şi le formeze, să le dezvolte şi să le probeze pe parcursul desfăşurării activităţii didactice. Aceste competenţe sunt:

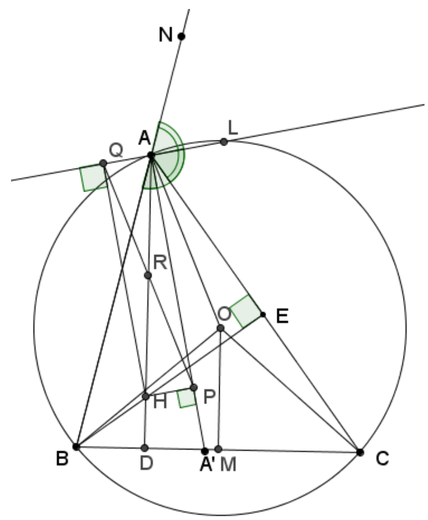
• **cunoaşterea conţinuturilor ştiinţifice de specialitate**, probată prin:	▪ identificarea unor date, relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite; ▪ prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunţuri matematice; ▪ utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete; ▪ exprimarea caracteristicilor matematice, cantitative sau calitative, ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora; ▪ analizarea şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii-problemă; ▪ modelarea matematică a unor situaţii variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii;
• **aplicarea principiilor didacticii matematicii şi a cunoştinţelor de metodica predării matematicii**, probate prin:	▪ capacitatea de proiectare a unui demers didactic pentru ciclul gimnazial sau liceal; ▪ adecvarea strategiilor didactice la conţinuturi şi la competenţele vizate, prin construirea unor demersuri didactice interactive, stimulative, participative; ▪ asigurarea concordanţei între strategii de evaluare, competenţe, conţinuturi şi instrumente de evaluare.
TEMATICA ŞTIINŢIFICĂ	**Cercul. Cercul înscris şi cercul circumscris unui triunghi. Coarde, arce şi unghiuri în cerc. Puterea unui punct faţă de un cerc, axă radicală a două cercuri. Poligoane înscrise sau circumscrise unui cerc, poligoane regulate. Lungimea cercului şi lungimea arcului de cerc.**

B. SUBIECTE DE LA CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE

TITULARIZARE 1994

1. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii (AB). Se notează cu N un punct oarecare pe AB, astfel ca A $\in$ (BN). Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor BAC și CAN în punctele P și Q. Să se arate că punctele M, P și Q sunt coliniare.

Rezolvare:
Vom trata cazul triunghiului ascuțitunghic (cazul triunghiului dreptunghic este degenerat: $H = P = Q = A$, iar cazul triunghiului obtuzunghic este analog cu cel ascuțitunghic).
Avem: $(AA'$ și $(AL$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAN$ (bisectoare interioară, exterioară) $\Rightarrow AA' \perp AL$; O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $P = pr_{AA'}H$, $Q = pr_{AL}H$, iar $AH \cap PQ = \{R\}$ și M este mijlocul lui (BC).
$HQ \perp AL$, $HP \perp AP$, patrulaterul $HPAQ$ este dreptunghi, prin urmare $AR = RH = QR = RP = \dfrac{AH}{2}$ și $\sphericalangle RAP \equiv \sphericalangle RPA$ ($\triangle RAP$ este isoscel) (2).
În $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle OAC \left(= \dfrac{\pi}{2} - \sphericalangle B \right)$ - AD și AO sunt ceviene izogonale - obținem: $\sphericalangle HAP \equiv \sphericalangle PAO$ (3)



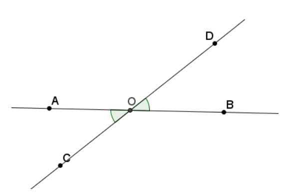
Din (2) și (3) $\Rightarrow \sphericalangle RPA \equiv \sphericalangle PAO$, deci $QP \parallel AO$. Cum $AD \perp BC$, $OM \perp BC \Rightarrow AR \parallel OM$. Dar $AH = 2R\cos A$ și din (1) deducem $AR = R\cos A$ (5).
Însă, $m(\sphericalangle BOC) = 2A \Rightarrow m(\sphericalangle BOM) = A \Rightarrow OM = R\cos A$, din triunghiul BOM (6).
Din relațiile (5) și (6) obținem $AR = OM$ și $AR \parallel OM \Rightarrow ARMO$ paralelogram, adică $RM \parallel AO$ (7).
Din (4) și (7) avem R, P, M coliniare, adică și Q, P, M sunt coliniare.

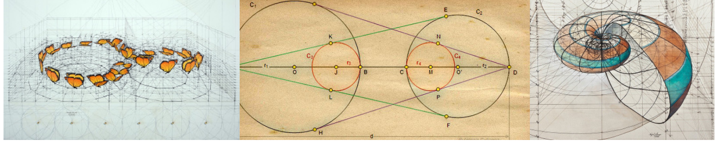
TITULARIZARE 1995

2. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Perpendiculara din B pe diametrul $[AD]$ în E, iar cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în F. Paralelele duse prin F la CD, respectiv CA intersectează CA, respectiv CD în G, respectiv H. Să se demonstreze că punctele E, G, H sunt coliniare.

Rezultate utile:

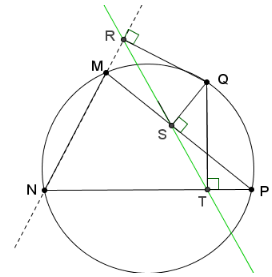
Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf:
Daca semidreptele (OA și (OB sunt opuse, iar semidreptele (OC și (OD sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOD)$, atunci punctele C, O și D sunt coliniare.





Dreapta lui Simson:

Proiecțiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile acestuia sunt trei puncte coliniare.

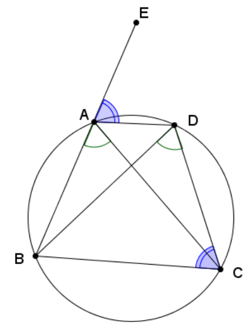


Definiție:

Numim patrulater inscriptibil un patrulater ale cărui vârfuri sunt pe un cerc. Punctele A, B, C, D sunt conciclice.

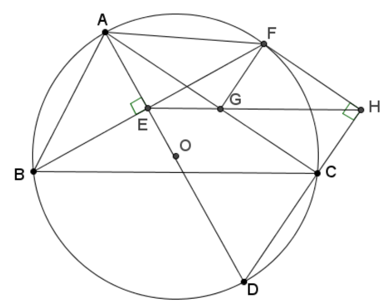
Teoreme:

1) Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.
2) Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă un unghi interior este congruent cu unghiul exterior opus.
3) Un patrulater este inscriptibil dacă unghiul format de o diagonală cu una dintre laturi este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.



Rezolvare:

$FG \parallel CD$, $G \in AC$, $FH \parallel AC$, $H \in CD$. Cum $[AD]$ este diametru, $m(\sphericalangle ACD) = 90^0 \Rightarrow AC \perp CD$, $FG \parallel CD \Rightarrow FG \perp AC$, deci G este proiecția lui F pe AC (1). Analog, $FH \perp AC$, $CD \perp AC$, conduc la H este proiecția lui F pe CD (2).
Evident, E este proiecția lui F pe AD (3).
Punctul F se află pe cercul determinat de punctele A, D, C și din (1), (2), (3) rezultă că punctele E, G, H sunt coliniare (dreapta lui Simson)



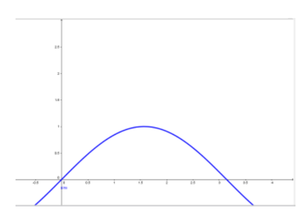
Demonstrăm că proiecțiile lui F pe laturile triunghiului ABC sunt coliniare.
Din $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle AGF \left(= 90^0\right)$, patrulaterul AEGF este inscriptibil. Așadar, $\sphericalangle EGA \equiv \sphericalangle EFA$ (4).
Din $m(\sphericalangle FGC) + m(\sphericalangle FHC) = 90^0$, patrulaterul FGCH este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle CGH \equiv \sphericalangle CFH$ (5).
Patrulaterul ADCF este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle FAD \equiv \sphericalangle FCH$ (6).
Triunghiurile EFA și HFC sunt dreptunghice, $m(\sphericalangle HFC) = 90^0 - m(\sphericalangle FCH)$, $m(\sphericalangle EFA) = 90^0 - m(\sphericalangle FAE)$.
Folosind relațiile (4), (5), (6) deducem că $\sphericalangle EGA \equiv \sphericalangle CGH$ și conform teoremei unghiurilor opuse la vârf, rezultă că E, G, H sunt coliniare.

TITULARIZARE 1997
ARGEȘ

3. Fie triunghiul ABC, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ trei puncte oarecare. Notând cu O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1 și respectiv CA_1B_1, arătați că raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ este mai mare decât raza cercului circumscris triunghiului ABC.

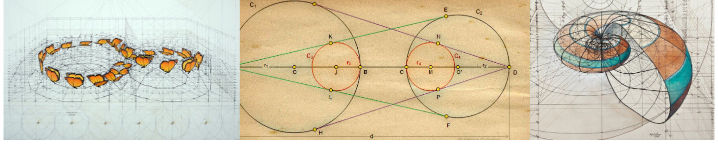
Rezultate utile:

1) Inegalitatea Jensen:
Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ (*I* interval real), este concavă pe *I*, atunci:



$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in I$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in (0, \infty)$, **cu** $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, **avem**

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$



2) Funcția $f(x) = \sin x$ este concavă pe $(0, \pi)$; într-un triunghi avem:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \le \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Aria unui triunghi ABC: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

4) Dacă S, R, r, p reprezintă aria triunghiului, raza cercului circumscris, raza cercului înscris, semiperimetrul triunghiului, atunci

$$R = \frac{abc}{4S} \Leftrightarrow S = \frac{abc}{4R}\ ;\quad r = \frac{S}{p};\quad r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};\quad p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

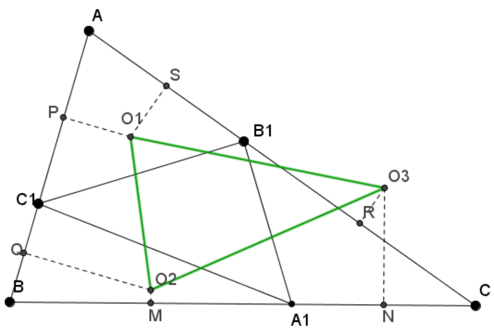
5) Inegalitatea lui Euler: În orice triunghi, $2r \le R$, unde r este raza cercului înscris, iar R este raza cercului circumscris triunghiului dat

Rezolvare:

Fie O_1P și O_2Q mediatoarele segmentelor (AC_1), respectiv (BC_1) și O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1. Atunci: $O_1O_2 \ge PQ = \dfrac{AC_1 + C_1B}{2}$ (PO_1 O_2Q este trapez dreptunghic),

de unde $O_1O_2 \ge \dfrac{AB}{2} \Rightarrow O_1O_2 \ge \dfrac{c}{2}$.

Analog $O_2O_3 \ge \dfrac{a}{2}$ și $O_1O_3 \ge \dfrac{b}{2}$.



Notații:

R_1 raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$

S' aria triunghiului $O_1O_2O_3$;

α, β, γ unghiurile triunghiului $O_1O_2O_3$;

a', b', c' lungimile laturilor triunghiului $O_1O_2O_3$.

Cu aceste notații, $a' \ge \dfrac{a}{2}$, $b' \ge \dfrac{b}{2}$, $c' \ge \dfrac{c}{2}$.

Folosind inegalitatea mediilor: $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \left(\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3$,

inegalitatea Jensen pentru funcția sin pe intervalul $(0, \pi)$:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \le \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

obținem: $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Cum: $S' = 2R'^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}R'$

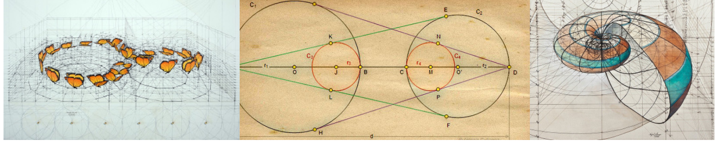
avem: $S' = \dfrac{a'b'c'}{4R'} \ge \dfrac{abc}{32R'}$, prin urmare, $\dfrac{abc}{32R'} \le S' \le \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(R')^2 \Rightarrow (R')^3 \ge \dfrac{abc}{24\sqrt{3}}$.

Dacă demonstrăm că $r^3 \le \dfrac{abc}{24\sqrt{3}}$, atunci obținem:

$r^3 \le (R')^3 \Rightarrow r \le R'$, adică ceea ce trebuie demonstrat.

$$r^3 \le \frac{abc}{24\sqrt{3}} \Leftrightarrow r^2 \cdot \frac{S}{p} \le \frac{abc}{24\sqrt{3}} \Leftrightarrow r^2 \cdot \frac{abc}{4Rp} \le \frac{abc}{24\sqrt{3}} \Leftrightarrow r^2 \le \frac{Rp}{6\sqrt{3}} \ (1);$$

$$2r \le R \Rightarrow 2rp \le Rp \Rightarrow \frac{2rp}{6\sqrt{3}} \le \frac{Rp}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{rp}{3\sqrt{3}} \le \frac{Rp}{6\sqrt{3}} \ (2).$$



Arătăm că:

$$r^2 \le \frac{rp}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}r \Leftrightarrow p \Leftrightarrow 3\sqrt{3}4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$$

Avem $\frac{\pi - C}{2} = \frac{A+B}{2} \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = tg\frac{A+B}{2}$, iar $ctg\frac{C}{2} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) = tg\frac{A+B}{2} = \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$,

iar cum

$$A+B+C = \pi \Rightarrow 0 = tg\pi = tg\left(A+B+C\right) = \frac{tgA + tgB + tgC - tgAtgBtgC}{1 - tgAtgB - tgAygC - tgBtgC} \Rightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\frac{A}{2} + ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2} = ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}$$

Astfel, $ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} = ctg\frac{A}{2} + ctg\frac{B}{2} + ctg\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}$ (inegalitatea mediilor),

de unde $ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$

TITULARIZARE 1997
BACĂU

4. Fie triunghiul *ABC*, *A*', *B*', *C*' picioarele perpendicularelor din *A*, *B*, *C* respectiv pe *BC*, *AC*, *AB*.

a) Să se arate că simetricele lui *H* față de mijloacele laturilor (*AB*), (*BC*), (*CA*) se află pe cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului *ABC*.

b) Să se arate că simetricele lui *H* față de *AB*, *AC*, *BC* se află pe $\mathcal{C}$.

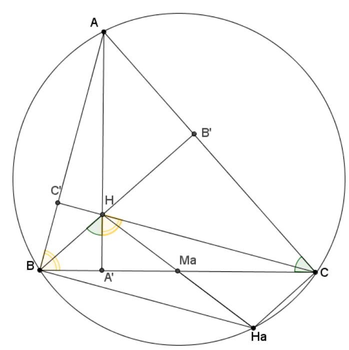
c) Să se afle locul geometric al ortocentrului *H* al triunghiului *ABC*, dacă *B* și *C* sunt fixe și *A* variază pe $\mathcal{C}$.

d) Să se arate că perpendicularele duse din *A*, *B*, *C* pe *B*'*C*', *A*'*C*' și *A*'*B*' sunt concurente.

Rezolvare:

a) **Cazul 1. Triunghiul ABC este ascuțitunghic**

Fie H_a simetricul punctului *H* față de mijlocul M_a al laturii (*BC*). Cum punctul *H* este interior triunghiului, demonstrăm că patrulaterul ABH_aC este inscriptibil, adică $H_a \in \mathcal{C}$.



M_a este mijlocul diagonalelor (HH_a) respectiv (*BC*), adică HBH_aC este paralelogram, prin urmare $\sphericalangle BH_aC \equiv \sphericalangle BHC$.

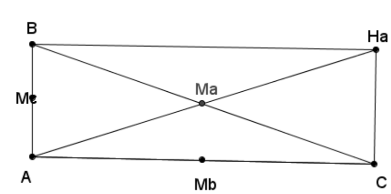
$m\left(\sphericalangle BHA'\right) = 90^0 - m\left(\sphericalangle HBC\right) = 90^0 - m\left(\sphericalangle B'BC\right) = m\left(\sphericalangle C\right)$.

$m\left(\sphericalangle CHA'\right) = 90^0 - m\left(\sphericalangle HCB\right) = m\left(\sphericalangle B\right)$.

Astfel, $m\left(\sphericalangle BH_aC\right) = m\left(\sphericalangle BHA'\right) + m\left(\sphericalangle CHA'\right) = m\left(\sphericalangle B\right) + m\left(\sphericalangle C\right)$.

Atunci $m\left(\sphericalangle A\right) + m\left(\sphericalangle BH_aC\right) = m\left(\sphericalangle A\right) + m\left(\sphericalangle B\right) + m\left(\sphericalangle C\right) = 180^0$, prin urmare patrulaterul ABH_aC este inscriptibil, adică $H_a \in \mathcal{C}$. Analog se demonstrează $H_b \in \mathcal{C}$, $H_c \in \mathcal{C}$.

Cazul 2. Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $m\left(\sphericalangle A\right) = 90^0$, H = *A*.



C este simetricul lui *H* față de M_b. *B* este simetricul lui *H* față de M_c. Deci *B*, $C \in \mathcal{C}$. Evident, ACH_aB este dreptunghi, prin urmare $H_a \in \mathcal{C}$.

Cazul 3. Triunghiul ABC este obtuzunghic, cu $m(\sphericalangle A) > 90^0$, patrulaterul HBH_aC este paralelogram, deci $\sphericalangle H \equiv \sphericalangle H_a$.

Avem: $m(\sphericalangle BHA) = 90^0 - m(\sphericalangle B'AH) = 90^0 - m(\sphericalangle A'AC) = m(\sphericalangle C)$.

$m(\sphericalangle CHA) = 90^0 - m(\sphericalangle C'AH) = 90^0 - m(\sphericalangle A'AB) = m(\sphericalangle B)$.

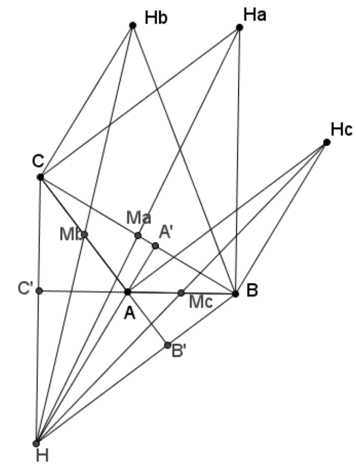
Obținem $m(\sphericalangle BHC) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle H_a)$;

$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle H_a) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^0$,

de unde patrulaterul ABH_aC este inscriptibil, adică $H_a \in \mathcal{C}$.

HAH_bC este paralelogram, $m(\sphericalangle CH_bA) = m(\sphericalangle CHA) = m(\sphericalangle B) \Rightarrow ABH_bC$ inscriptibil, de unde $H_b \in \mathcal{C}$.

HAH_cB este paralelogram, $m(\sphericalangle BH_cA) = m(\sphericalangle BHA) = m(\sphericalangle C) \Rightarrow ABH_cC$ inscriptibil, de unde $H_c \in \mathcal{C}$.

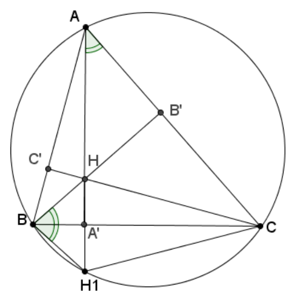


b) **Cazul 1. Triunghiul ABC este ascuțitunghic**

Dacă H_1 este simetricul ortocentrului față de BC, ΔBH_1H este isoscel, iar $\sphericalangle A'BH \equiv \sphericalangle A'BH_1$.

$m(\sphericalangle\sphericalangle A'BH) = 90^0 - m(\sphericalangle BHA') = 90^0 - m(\sphericalangle AHB') = m(\sphericalangle B'AH)$.

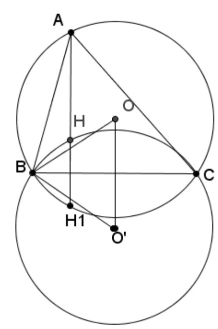
Astfel, $\sphericalangle A'BH_1 \equiv \sphericalangle A'AC$, de unde patrulaterul ABH_1C este un patrulater inscriptibil, adică $H_1 \in \mathcal{C}$. Analog, obținem simetricele $H_2 \in \mathcal{C}$, $H_3 \in \mathcal{C}$.
Cazurile **Triunghiul ABC este dreptunghic, respectiv obtuzunghic** se rezolvă analog.



c) **Cazul 1.** Punctele B și C sunt diametral opuse.
În acest caz, $m(\sphericalangle BAC) = 90^0 \Rightarrow H = A$

Locul geometric este $\mathcal{C} \setminus \{B, C\}$.

Cazul 2. Punctele B și C nu sunt diametral opuse.
Se demonstrează că locul geometric căutat este $\mathcal{C}(O', R)$ unde O' este simetricul lui O față de BC.
OHH_1O' este trapez isoscel, $O'H = OH_1 = R$ (diagonale); O este punct fix, BC este fixă$\Longrightarrow$ O' este punct fix, $O'H = R \Longrightarrow H \in \mathcal{C}(O', R)$.
Reciproc, se demonstrează că orice puncte de pe $\mathcal{C}(O', R)$ este ortocentrul triunghiului ABC, cu B, C fixe, iar $A \in \mathcal{C}(O', R) / \{B, C\}$.



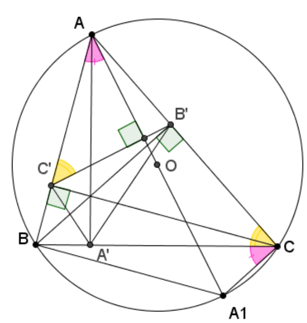
d) Notăm $d_a \perp B'C'$, iar A_1 este punctul diametral opus punctului A în $\mathcal{C}(O, R)$. Vom arăta că $O \in d_a$ (analog, O se află pe fiecare dintre $d_b \perp A'C'$, $d_c \perp A'B'$, prin urmare $d_a \cap d_b \cap d_c = \{O\}$).

Patrulaterul ABA_1C este inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle BCA_1 \equiv \sphericalangle BAA_1$;

$BB' \perp AC \Rightarrow m(BB'C) = 90^0$, de asemenea, $CC' \perp AB \Rightarrow m(\sphericalangle CC'B) = 90^0$; patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil (unghiuri drepte formate de diagonale cu laturi); astfel, $\sphericalangle BCB' \equiv \sphericalangle B'C'A$. Din construirea perpendicularei AA_1, $m(\sphericalangle B'C'A) + m(\sphericalangle BAA_1) = 90^0$. Obținem

$m(\sphericalangle ACA_1) = m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BCA_1) = m(\sphericalangle B'C'A) + m(\sphericalangle BAA_1) = 90^0$,

adică ΔACA_1 este dreptunghic, iar $[AA_1]$ este diametru al cercului, adică $O \in d_a$.



TITULARIZARE 1997
BUCUREȘTI

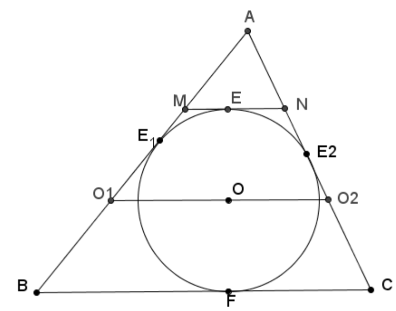
5. În triunghiul ABC se consideră cercul înscris. Tangenta la cerc, paralelă cu BC, intersectează (AB) și (AC) în punctele M și respectiv N. Să se arate că cercurile de diametre $[BM]$ și $[CN]$ sunt tangente.

Rezolvare:
Dacă demonstrăm că $r_1 + r_2 = O_1O_2$, atunci cercurile sunt tangente exterioare.
Notăm cu O_1 mijlocul lui (*BM*), cu O_2 mijlocul lui (*CN*). Atunci mijlocul lui O_1O_2 este linie mijlocie în trapezul *BCNM*, de unde $O_1O_2 = \dfrac{BC+MN}{2}$ și $BF = BO_1$, $ME = MO_1$, $NE = NO_2$, $CF = CO_2$ (tangente la cerc duse dintr-un punct exterior), punctele *E*, *F* fiind punctele de tangență cu *MN* respectiv *BC*. Obținem:

$$r_1 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(BO_1 + O_1M) = \frac{1}{2}(BF + ME),$$

$$r_2 = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{2}(CO_2 + O_2N) = \frac{1}{2}(CF + NE),$$

de unde $r_1 + r_2 = \frac{1}{2}(BC + MN) = O_1O_2$



TITULARIZARE 1997
HARGHITA

6. Fie punctele coliniare A, B, C cu $B \in (AC)$. O tangentă dusă din C la cercul de diametru $[AB]$ intersectează acest cerc în T. Cercul cu centrul în C de rază (CT) intersectează AB în M și N. Să se arate că $AM \cdot AN = AB \cdot AC$.

Rezultate utile:

1) Puterea unui punct față de cerc

Teoremă : Dacă A, B, C, D sunt patru puncte distincte situate pe un cerc $C(O,R)$ astfel încât $AB \cap CD = \{M\}$,atunci $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Demonstraţie : Deosebim cazurile :

1) $M \in Int\ C(O,R)$

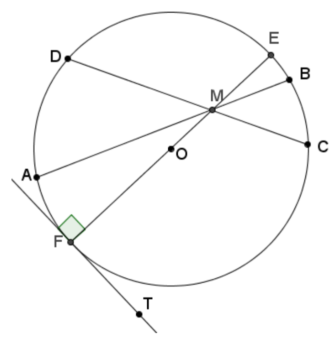
Deoarece $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MDB$ (subântind acelaşi arc) şi
$\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle MDB$ (opuse la vârf),

deducem $\Delta MAC \sim \Delta MDB$, de unde $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MB}$ sau

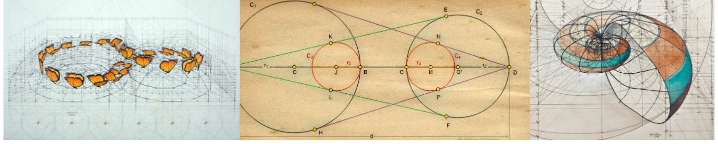
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = (R + MO)(R - MO) = R^2 - MO^2.$$

$M \in Int\ C(O,R)$:

$$\rho(M) = -MA \cdot MB = OM^2 - R^2$$



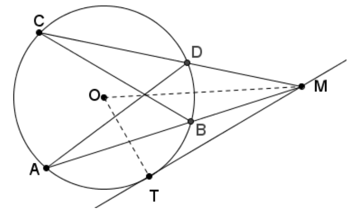
Dacă $M \in Int\ C(O,R)$ atunci pentru orice coardă (AB) care conţine punctul M , produsul $MA \cdot MB$ este constant. Valoarea constantă a acestui produs înmulţită cu (-1) se notează cu $\rho(M)$ şi se numeşte *puterea punctului interior M* faţă de cercul dat.



2) $M \in Ext\ C(O,R)$

Din $\Delta MBC \sim \Delta MDA$, obţinem $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{MC}{MA}$,
de unde aceeaşi egalitate $MA \cdot MB = MC \cdot MD$
Dacă MT e tangentă la cerc, punctul T fiind punctul de tangenţă , avem:
$\Delta MAT \sim \Delta MTB$, de unde:

$$\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MT^2$$

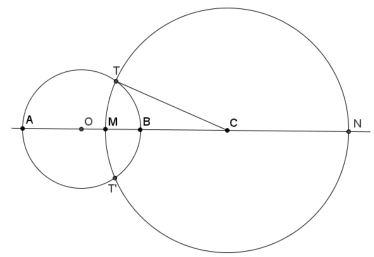


Dacă $M \in Ext\ C(O,R)$ atunci valoarea constantă a acestui produs se notează cu $\rho(M)$ şi se numeşte *puterea punctului exterior* M faţă de cercul dat.

$M \in Ext\ C(O,R)$

$\rho(M) = MA \cdot MB = OM^2 - R^2$.

Rezolvare:
Folosim puterea punctului C faţă de cercul de diametru AB :
$AM \cdot AN = (AC - CM)(AC + CN) = (AC - CT)(AC + CT) =$
$= AC^2 - CT^2 = AC^2 - BC \cdot CA = AC(AC - BC) = AC \cdot AB$.



TITULARIZARE 2008

7. Fie triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 7$ şi $BC = 5$. Fie O un punct situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât cercurile circumscrise triunghiurilor AOB, BOC şi COA să aibă aceeaşi rază R.
a) Să se calculeze măsura unghiului ABC.
b) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Fie P şi Q centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, respectiv COA. Să se demonstreze că $AQOP$ este romb.
d) Să se determine R.
e) Fie O' centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că punctele A, O, O' şi C sunt conciclice.
Indicații:

a) cos B = $\dfrac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle B) = 60^0$.

b) Din teorema sinusurilor rezultă raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

c) $QA = QO = PA + PO = R \Rightarrow AQOP$ romb.

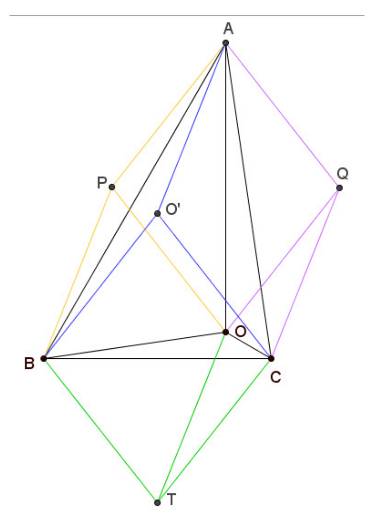
d) Fie T centrul cercului circumscris triunghiului BOC. Din faptul că $\Delta ABC \equiv \Delta TQP$ (justificare), se obține $R = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

e) Triunghiul ABC este ascuțitunghic, deci O' este în interiorul triunghiului ABC.

$\cos(\sphericalangle AOC) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = 120^0$.

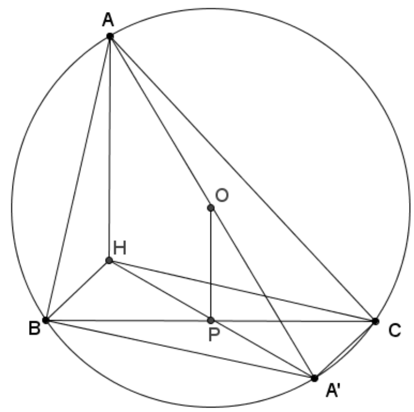
$m(\sphericalangle AO'C) = 2 \cdot m(\sphericalangle ABC) = 120^0$

patrulaterul $AO'OC$ este inscriptibil.



TITULARIZARE 2009
Brăila

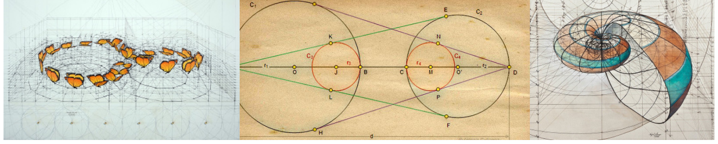
8. Fie ABC un triunghi, $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris ΔABC, H ortocentrul, G centrul de greutate și A' punctul diametral opus lui A în $\mathcal{C}(O, R)$.
a) Arătați că patrulaterul $A'BHC$ este paralelogram.
b) Dovediți că oricare ar fi punctul M din planul (ABC), $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2 \cdot \overrightarrow{MO}$.
c) Demonstrați că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
d) Să se arate că punctele O, G, H sunt coliniare și $OH = 3 \cdot OG$.
e) Dacă $D \in \mathcal{C}(O, R)$, $D \neq A$, $D \neq B$, iar H' este ortocentrul triunghiului ABD, atunci demonstrați că $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{CD}$.
Rezolvare:
a) Punctul A' este diametral opus punctului A, deci $m(\sphericalangle ABA') = 90^0 \Rightarrow A'B \perp AB$; $CH \perp AB \Rightarrow CH \parallel A'B$.
$m(\sphericalangle ACA') = 90^0 \Rightarrow A'C \perp AC$; $BH \perp AC \Rightarrow BH \parallel A'C$.



b) $A'BHC$ este paralelogram, cu diagonalele $[BC]$, $[A'H]$, iar $BC \cap A'H = \{P\}$; $[OP]$ este linie mijlocie în $\Delta AHA'$, adică, $2 \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AH}$.
$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MA} =$
$= \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2 \cdot \overrightarrow{MO}$.
c) În relația anterioară, particularizăm punctul M:
luăm $M = O$, obținem relația solicitată.
d) Folosind relația Leibniz, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OG} \underset{pct.c)}{=} \overrightarrow{OH}$
obținem, astfel, coliniaritatea punctelor O, G, H și $OH = 3 \cdot OG$.
e) Considerând ΔABD $\mathcal{C}(O, R)$ cercul circumscris ΔABD, H' ortocentrul triunghiului, aplicăm relația de la pct. c):
$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} =$
$= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.

Constanța și Hunedoara

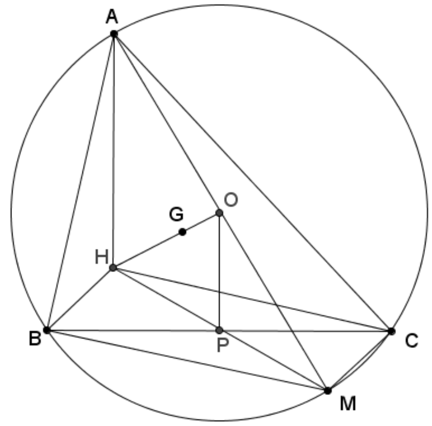
9. Se consideră triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c, cu R raza cercului circumscris și cu r raza cercului înscris . Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu G centrul de greutate, cu H ortocentrul și cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.
a) Să se arate că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.
b) Să se arate că $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG}$.
c) Să se arate că $9 \cdot OG^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.
d) Să se arate că $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{a+b+c}\left(a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}\right)$.
e) Să se arate că $OI^2 = R^2 - 2Rr$.



a) Considerăm un punct oarecare M în planul triunghiului.

Punctul D este mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -1$.

$G \in [AD] \Rightarrow \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GD}} = -2$



Obținem: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MG}\right) =$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MG}$. Particularizăm $M = O$, obținem relația solicitată.

b) Subiect rezolvat la subiectul Brăila – c), d).

c) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, avem $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}^2 =$

$= \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right)$

$= \frac{1}{9}\left(3R^2 + 2R^2 - c^2 + 2R^2 - b^2 + 2R^2 - a^2\right)$, de unde

$9OG^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

d) $(AA_1$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = -\frac{c}{b} = k$, astfel

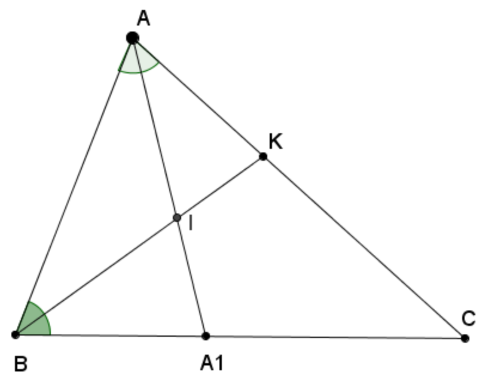
$\overrightarrow{OA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$.

În triunghiul ΔABA_1, $\frac{AI}{IA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IA_1}} = -\frac{b+c}{a}$

$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{OA_1} =$

(avem: $\overrightarrow{OA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$)

$= \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$



e) Notații:

Fie $\left(AI \cap C(O,R) = \{K\}\right.$, M diametral opus lui K,

D proiecția lui I pe latura (AB),

$OI \cap C(O,R) = \{P,Q\}$; α, β, γ unghiurile triunghiului ABC.

$[MK]$ diametru $\Rightarrow m(\sphericalangle MBK) = 90^0$.

$\Delta ADI \sim \Delta MBK \; (\sphericalangle DAI \equiv \sphericalangle BMK; \sphericalangle ADI \equiv \sphericalangle MBK) \Rightarrow \frac{ID}{KB} = \frac{AI}{MK}$

,de unde $AI \cdot KB = ID \cdot MK = r \cdot 2R \Rightarrow AI \cdot KB = 2rR$ (1).

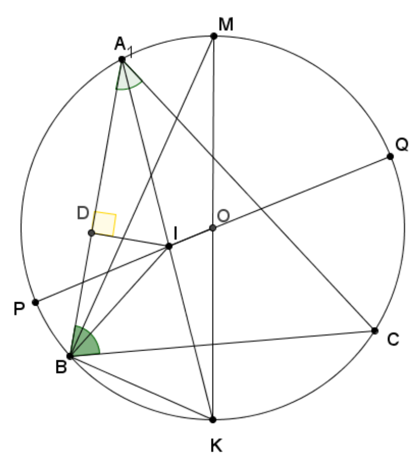
ΔBIK este isoscel, cu $IK = BK$. Înlocuind în (1), obținem:

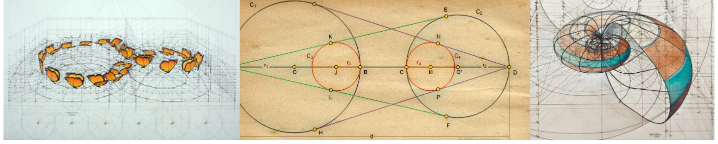
$2rR = AI \cdot KI$.

Folosim puterea punctului I față de cercul circumscris:

$PI \cdot QI = AI \cdot KI \Leftrightarrow PI \cdot QI = 2Rr \Leftrightarrow (OP - OI)(OQ + OI) = 2Rr$

$\Leftrightarrow R^2 - OI^2 = 2Rr \Leftrightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr$





Alte demonstrații pentru punctul c):

c_1) Dacă E este mijlocul lui (BC) şi $AE \cap C(O,R) = \{D\}$, putem scrie, folosind puterea punctului G faţă de cerc: $\rho(G) = OG^2 - R^2 = GA \cdot GD = \frac{2}{3} m_a \cdot (GE + ED) = \frac{2}{3} m_a \left(\frac{1}{3} m_a + ED \right)$;

Folosind acum puterea punctului E faţă de cercul $C(O,R)$,avem :

$AE \cdot ED = BE \cdot EC$,adică $m_a \cdot ED = \frac{a^2}{4}$ şi , revenind,ajungem la : $\rho(G) = \frac{2}{3} m_a \cdot (\frac{1}{3} m_a + \frac{a^2}{4 \cdot m_a})$.

Folosind teorema medianei : $m_a{}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, după efectuarea calculelor, obţinem relaţia c) c_1)

c_2) Egalitatea propusă se poate obţine şi folosind,de exemplu, relaţia $\sum MA^2 = 3MG^2 + \sum GA^2$ (Leibniz), adevărată pentru orice punct M din planul triunghiului ABC. E suficient să luăm $M = O$.

Observație: Alte demonstrații pentru punctul c): Din relația demonstrată la punctul e) putem deduce:
$R \geq 2r$ - inegalitatea Euler

Galați

10. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului.

a) Dacă notăm $AF = x$, $BD = y$, $CE = z$ și $a + b + c = 2p$, unde a, b, c sunt mărimile laturilor, calculați x, y, z în funcție de a, b, c, p.

b) Arătați că $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a}\left[(p-c)\overrightarrow{AB} + (p-b)\overrightarrow{AC} \right]$.

c) Demonstrați că $a \cdot \overrightarrow{AD} + b \cdot \overrightarrow{BE} + c \cdot \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

d) Dacă $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$, calculați lungimile AI, BI, CI.

Rezolvare:

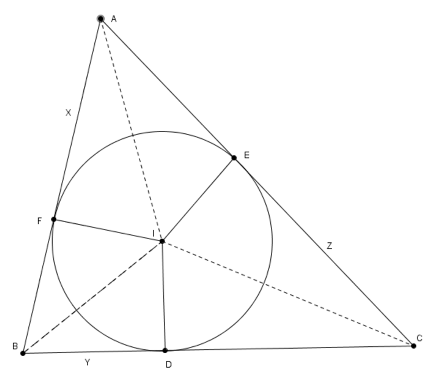
AE, AF sunt tangente exterioare la cerc $\Rightarrow AF = AE = x$

BD, BF sunt tangente exterioare la cerc $\Rightarrow BF = BD = y$

CD, CE sunt tangente exterioare la cerc $\Rightarrow CD = CE = z$

a) $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, de unde $x + y + z = p$, iar $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

b) $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{y}{z} = -\frac{p-b}{p-c} = k \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{p-c}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{p-b}{a}\overrightarrow{AC}$.



c) Folosind relația de la b), obținem succesiv:

$a\overrightarrow{AD} = (p-c)\overrightarrow{AB} + (p-c)\overrightarrow{AC}$,$b\overrightarrow{BE} = (p-a)\overrightarrow{BC} + (p-c)\overrightarrow{BA}$

$c\overrightarrow{CF} = (p-b)\overrightarrow{CA} + (p-a)\overrightarrow{CB}$; prin adunare:

$$a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BE} + c\overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$

d) Putem folosi $r = \frac{S_{ABC}}{p}$, teorema lui Pitagora.

Giurgiu

11. Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, 5)$, $\mathcal{C}_2(O_2, 3)$ astfel încât $O_1O_2 = 4\ cm$.

a) Arătați că cercurile sunt secante.

b) Notăm cu A și B punctele comune ale celor două cercuri. O secantă variabilă trecând prin A taie $\mathcal{C}_1$ în M și $\mathcal{C}_2$ în N. Arătați că $m(\sphericalangle MBN)$ este constantă.

c) Prin B se duce o secantă $PQ \parallel MN$, $P \in \mathcal{C}_2$, $Q \in \mathcal{C}_1$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

d) Să se determine poziția secantei MN astfel încât distanța să fie maximă.

Rezultate utile:

Poziții relative a două cercuri:

1) exterioare – nu au nici un punct comun și $d > R + r$;

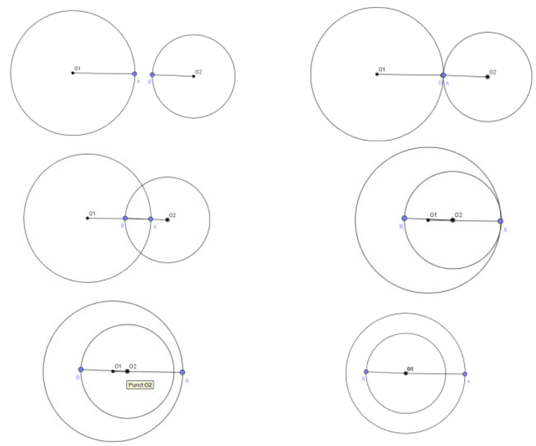
2) tangente exterior – un singur punct comun și $d = R + r$

3) secante – au două puncte comune și $R - r < d < R + r$

4) tangente interior – un singur punct comun și $d = R - r$

5) interioare – nu au nici un punct comun și $d < R - r$

6) concentrice – nici un punct comun, au același centru și $d = 0$.



Rezolvare:

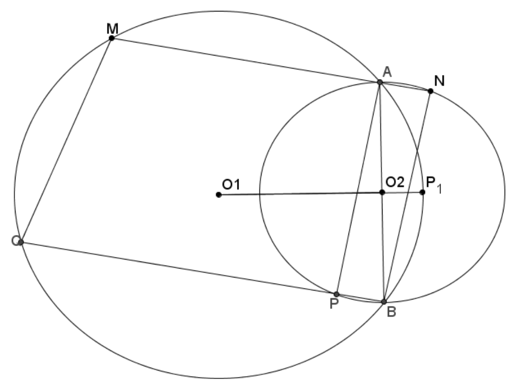
a) Observăm că : $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, așadar, cercurile sunt secante.

b) Dacă D este proiecția punctului A pe O_1O_2, obținem (axa radicală a cercurilor): $O_1D = \dfrac{O_1O_2^2 - (r_1^2 - r_2^2)}{2O_1O_2} = 4$,

prin urmare, $O_2 = D \Rightarrow O_2 \in (AB)$, iar $\triangle ABN$ este dreptunghic

$m(\sphericalangle MNB) = 90^0 \Rightarrow m(\sphericalangle MBN) = 90^0 - m(\sphericalangle NMB) =$

$= 90^0 - \dfrac{1}{2} m(\widehat{AB}) =$ constant.



c) $\triangle APB$ este dreptunghic. $MN \parallel BQ \Rightarrow MABQ$ este trapez isoscel, cu $BQ = B$, $AM = b$.

$AP \perp BQ \Rightarrow PB = NA = \dfrac{B-b}{2}$. Obținem:

$MN = MA + AN = \dfrac{B+b}{2}$, $PQ = BQ - BP = \dfrac{B+b}{2}$.

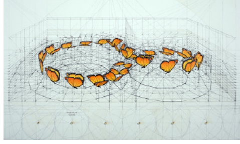
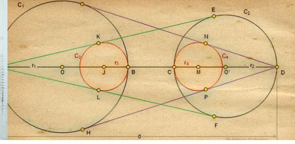
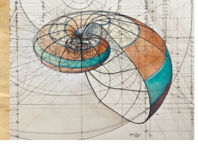
$MN \parallel PQ$, $MN = PQ \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.

Iași

12. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu laturile exprimate prin numere naturale.

a) Arătați că raza cercului înscris este număr natural.

b) Arătați că aria triunghiului dat este număr natural divizibil cu 6.

Indicații:

Dacă a este ipotenuza triunghiului, atunci: $a^2 = b^2 + c^2$, $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{bc}{P}$, p, P sunt semiperimetrul, respectiv perimetrul triunghiului dreptunghic. Un triunghi cu proprietățile din problemă există $\Leftrightarrow a = \frac{P^2 - 4S}{2P}$.

$a^2 = (b+c)^2 - 2bc \Rightarrow (b+c-a)(b+c+a) = 2bc$ - număr par, iar $r = \frac{b+c-a}{2} \in \mathbb{N}$. Analog se demonstrează b)

Satu Mare

13. Fie triunghiul oarecare ABC, A', B', C' mijloacele laturilor (BC), (AC) și respectiv (AB), D, E, F picioarele înălțimilor duse din vârfurile A, B, C ale triunghiului, H ortocentrul triunghiului și A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor (AH), (BH), (CH).

a) Arătați că punctele A', B', C' și D sunt conciclice.

b) Arătați că patrulaterul A', B', C', D este inscriptibil.

c) Să se arate că punctele A', B', C', D, E, F, A', B', C' sunt situate pe un cerc; determinați centrul și raza acestuia.

Indicații: http://www.viitoriolimpici.ro/uploads/attach_data/6/33/28//3e02c08.pdf – Cercul lui Euler. Dreapta lui Simson - I. Cicu, București, 2009.

TITULARIZARE 2010

14. În planul α se consideră punctele O_1, O_2, …, O_{100}, oricare trei necoliniare și mulțimea $M = \{ O_1, O_2, \ldots, O_{100}\}$. Se notează cu $\mathcal{C}_i$ cercul de centru O_i și rază 1, $\mathcal{C}_i \subset \alpha$, $i \in \{1,2,...,100\}$. Se știe că pentru orice $i, j, k \in \{1,2,....100\}$, există o dreaptă care intersectează cercurile $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$ și $\mathcal{C}_k$.

a) Arătați că într-un triunghi ABC cu $AB \leq AC$, distanța de la B la AC este mai mică sau egală decât distanța de la C la AB.

b) Determinați numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea M.

c) Arătați că triunghiul $O_1O_2O_3$ are o înălțime de lungime cel mult 2.

d) Pentru fiecare $i \in \{1,2,...,100\}$ se notează cu $\mathcal{D}_i$ cercul de centru O_i și rază 2, $\mathcal{D}_i \subset \alpha$. Arătați că există o dreaptă care intersectează toate cercurile $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, …, $\mathcal{D}_{100}$.

Indicații: Analizați baremul de la adresa: http://subiecte2010.edu.ro/Titularizare/ .

TITULARIZARE 2011

15. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și A', B', respectiv C', mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, respectiv $\overset{\frown}{AB}$ ale cercului circumscris triunghiului ABC. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

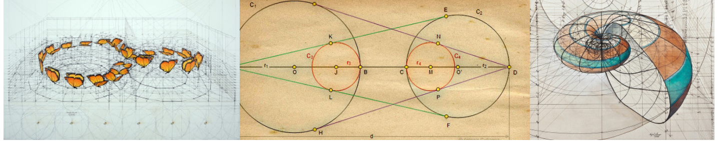
a) Demonstrați că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

b) Arătați că triunghiul BIA' este isoscel.

c) Demonstrați că punctul I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

d) Demonstrați că $AI = IA'$ dacă și numai dacă $r = R(1 - \cos A)$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Indicații: Analizați baremul de la adresa: http://subiecte2011.edu.ro/Titularizare/ .



Bibliografie / Webografie:

[1] C. Năstăsescu, I. Chițescu, C. Niţă, D. Mihalca - *Manual Matematică pentru clasa a IX a*, EDP, 2009.
[2] V. Nicula – *Geometrie plană (sintetică, vectorială, analitică). Culegere de probleme* , Ed. GIL, 2002.
[3] L. Nicolescu, V. Boskoff – *Probleme practice de geometrie* , Ed. Tehnică, 1990.
[4] O. Popescu, N. Angelescu, A. Lupu, O. Purcaru – *Concursul pentru ocuparea catedrelor vacante ,* Ed. Didactica, 1999.
[5] http://titularizare.edu.ro/2016/ , link – uri la site-urile Titularizare 2003 - 2015.
[6] http://www.viitoriolimpici.ro/ - http://www.viitoriolimpici.ro/uploads/attach_data/6/33/28//3e02c08.pdf – Cercul lui Euler. Dreapta lui Simson - I. Cicu, București, 2009.