PROBLEME DE COMBINATORICĂ

IOAN BUCATARU

Un element esenţial în abordarea unor probleme de combinatorică utilizează diversele interpretări ale coeficienţilor binomiali respectiv multinomiali.

Cele două probleme alese pentru a fi discutate în cadrul lecţiei de astăzi folosesc următoarea interpretare a coeficienţilor multinomiali:

$\dfrac{n!}{k_1!....k_m!}$ reprezintă numărul cuvintelor de lungime n formate cu litere din alfabetul $\{a_1, ..., a_m\}$, astfel încât în fiecare cuvânt litera a_i apare de k_i ori, $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Folosind această interpretare a coeficienţilor multinomiali, vom arăta că cele două probleme alese pot fi încadrate în următorul tip general de probleme.

Determinaţi numărul cuvintelor de lungime n care se pot forma folosind literele unui alfabet $\{a_1, ..., a_m\}$, ştiind că, în fiecare cuvânt, numărul de apariţii ale literelor a_i, k_i, satisfac o anumită relaţie.

Problema 1. *Opt monede sunt aşezate într-un şir pe o masă, fiecare din ele având capul în sus. La fiecare mutare se pot întoarce două monede adiacente, existând condiţia ca acestea să arate aceeaşi faţă (cap sau pajură). Câte aranjări diferite se pot obţine după un număr de mutări? ([1], BIMC 2013, problema 3, proba individuală)*

Problema 2. *Câte cuvinte de lungime n se pot forma folosind alfabetul $\{a, b, c\}$, astfel încât litera a apare de un număr par de ori? ([2], problema 4, pagina 25)*

O problemă mai uşoară care ne va ajuta în rezolvarea Problemei 2.
Să se determine numărul cuvintelor de lungime n, formate cu literele $\{a, b\}$, ştiind că în fiecare cuvânt litera a apare de un număr par de ori.

Soluţia 1. Coeficientul binomial $C_n^{k_1} = C_n^{k_2} = \frac{n!}{k_1!k_2!}$ reprezintă numărul cuvintelor de lungime n, folosind litere din alfabetul $\{a, b\}$, litera a apare de k_1 ori iar litera b de k_2 ori, $n = k_1 + k_2$. Obţinem deci că numărul cuvintelor de lungime n, formate cu literele $\{a, b\}$, cu proprietatea că în fiecare cuvânt litera a apare de un număr par de ori, este dat de

$$N_2 = \sum_{k_1+k_2=n,\ k_1\ par} \frac{n!}{k_1!k_2!} = \sum_{k\geq 0} C_n^{2k} = 2^{n-1} = \frac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2}. \tag{0.1}$$

Soluţia 2. Vom arăta că există o corespondenţă bijectivă între mulţimea a cărui cardinal trebuie sa îl găsim şi mulţimea cuvintelor de lugime $n-1$, formate cu litere din alfabetul $\{a, b\}$. Corespondenţele dintre cele două mulţimi pot fi descrise astfel:

- fiecărui cuvânt de lungime n, format cu literele $\{a, b\}$ şi în care litera a apare de un număr par de ori, îi asociem cuvântul de lungime $n - 1$ obţinut prin suprimarea ultimei litere;
- fiecărui cuvânt de lungime $n - 1$, format cu literele $\{a, b\}$, îi adaugăm pe ultima poziţie o literă astfel:
  - dacă iniţial avem un număr par de litere a, îi adăugăm litera b,
  - dacă iniţial avem un număr impar de litere a, îi adăugăm litera a.

Aceste corespondenţe bijective permit determinarea numărului căutat 2^{n-1}.
Observaţii.

- N_2 reprezintă şi numărul submulţimilor de cardinal par ale unei mulţimi cu n elemente.
- Se pot impune şi alte restricţii numărului de apariţii ale literei a: să fie multiplu de 3, numărul de apariţii pe poziţii pare să fie acelaşi cu numărul de apariţii pe poziţii impare (cazul Problemei 1), etc.

Revenim la Problema 2.
Soluţia 1. Coeficientul multinomial $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$ reprezintă numărul cuvintelor de lungime n, formate cu litere din alfabetul $\{a, b, c\}$, în care litera a apare de k_1 ori, litera b de k_2 ori, iar litera c de k_3 ori.

Soluţia problemei este dată de

$$N_3 = \sum_{k_1+k_2+k_3=n,\ k_1\ par} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$$

În cazul unui alfabet cu două litere, suma era cunoscută (sau uşor de dedus). În cazul nostru, plecăm de la dezvoltarea

$$(a+b+c)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}. \tag{0.2}$$

În relaţia (0.2) facem pe rând $a = b = c = 1$, $a = -1, b = c = 1$ şi apoi adunăm relaţiile. Obţinem

$$N_3 = \sum_{k_1+k_2+k_3=n,\ k_1\ par} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} = \frac{3^n+1}{2} = \frac{(1+1+1)^n + (-1+1+1)^n}{2}. \tag{0.3}$$

Soluţia 2. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ cu $2k \leq n$ alegem $2k$ poziţii ale cuvântului de lungime n pe care le completăm cu litera a. Avem C_n^{2k} moduri. Celelalte $n - 2k$ poziţii pot fi completate cu celelalte două litere b, c în 2^{n-2k} moduri. Obţinem numărul dorit

$$N_3 = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} 2^{n-2k}.$$

Acest număr poate fi scris în forma (0.3) folosind dezvoltarea binomială $(x + y)^n$. Considerând $x = 1$, $y = 2$, respectiv $x = -1$, $y = 2$ şi adunând termen cu termen, obţinem

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} 2^{n-2k} = \frac{3^n+1}{2}.$$

Generalizăm numărul literelor alfabetului şi de câte ori se repetă o anumită literă. Câte cuvinte de lungime n se pot forma cu cele m litere ale alfabetului $\{a_1, ..., a_m\}$, ştiind că în fiecare cuvânt numărul de apariţii ale literei a_1 este multiplu de k. Pentru $k = 2$ discuţiile anterioare ne conduc direct la formula

$$N_m = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} (m-1)^{n-2k} = \frac{m^n + (m-2)^n}{2}.$$

O reformulare a Problemei 2. Într-un grup sunt n copii care se pot îmbrăca în tricouri roşii, galbene sau albastre. În câte moduri distincte se poate realiza aceasta, ştiind că de fiecare dată un număr par de copii poartă tricouri galbene?

Problema 1.
Soluţia 1.

Vom numerota monedele cu numere de la 1 la 8, pe cele cu capul în sus le vom considera colorate în alb, pe cele cu pajura în sus le vom considera colorate în negru. Vom nota cu i_a numărul de monede de pe poziţii de rang impar colorate în alb, cu i_b numărul de monede de rang impar colorate în negru, şi cu p_a, p_b numărul monedelor de rang par colorate în alb, respectiv negru.

Pentru cele două modalităţi de colorarea a monedelor se pleacă de la configuraţia $i_a = p_a = 4$, echivalent cu $i_b = p_b = 0$.

Numărul de monede ales implică $i_a + i_b = 4$ şi $p_a + p_b = 4$.

La fiecare mutare se poate schimba culoarea a două monede adiacente, dacă au aceeaşi culoare. În consecinţă obţinem următoarele relaţii, invariante la mutările permise şi care sunt esenţiale pentru rezolvarea problemei

$$i_a = p_a \Longleftrightarrow i_b = p_b \Longleftrightarrow i_a + p_b = 4 \Longleftrightarrow i_b + p_a = 4, \quad i_a, p_a, i_b, p_b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{0.4}$$

Soluţia propusă de eleva Iustina Şerbănescu [1] presupune să numărăm în câte moduri pot colora cele opt monede respectând oricare din relaţiile (0.4):

- 4 colorări pare albe şi tot atâtea impare albe: $C_4^4 \cdot C_4^4$;
- 3 colorări pare albe şi tot atâtea impare albe: $C_4^3 \cdot C_4^3$;
- 2 colorări pare albe şi tot atâtea impare albe: $C_4^2 \cdot C_4^2$;
- 1 colorări pare albe şi tot atâtea impare albe: $C_4^1 \cdot C_4^1$;
- 0 colorări pare albe şi tot atâtea impare albe: $C_4^0 \cdot C_4^0$,

adică

$$N = \sum_{k=0}^{4} C_4^k C_4^k = 70. \tag{0.5}$$

În soluţia propusă, eleva Iustina Şerbănescu [1] demonstrează că numărul obţinut în relaţia (0.5) poate fi efectiv atins plecând de la configuraţia iniţială şi folosind un număr de mutări permise de problemă.

Suma care apare în relaţia (0.5) este uşor de recunoscut în identităţile combinatoriale

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k = C_{2n}^n \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n \tag{0.6}$$

Există soluţii frumoase şi intutitive pentru a doua identitate combinatorială (0.6).

Vom prezenta o soluţie care face apel la a interpreta diferit cei doi membri ai identităţii date. Într-o urnă avem $2n$ bile, n albe şi n bile negre. În câte moduri putem alege n din cele $2n$ bile? Răspuns evident, C_{2n}^n, membrul drept al identităţii. Putem însă verifica şi dacă alegem bile albe sau negre şi astfel putem avea: 0 albe şi n negre, 1 albe şi $(n-1)$ negre, ..., n albe şi 0 negre, de unde rezultă membrul stâng al identităţii.

Identitatea combinatorială (0.6) permite o nouă soluţie a Problemei 1.

Soluţia 2. Folosim oricare din ultimele două relaţii (0.4). Din cele 8 monede alegem 4, lucru pe care îl putem face în C_8^4 moduri. Acest număr este soluţia problemei (0.5), în virtutea identităţii combinatoriale (0.6).

Unde sunt colorările? Din 4 monede alese, pe cele impare le colorăm în alb, pe cele pare în negru, pe cele impare nealese le colorăm în negru, pe cele pare nealese le colorăm în alb. Obţinem o colorare care satisface oricare din relaţiile (0.4). Reciproc, pentru orice colorare care satisface (0.4), reţinem 4 monede din cele 8, imparele albe şi parele negre, $4 = i_a + p_b$.

O reformulare a Problemei 1: *Câte cuvinte de lungime* 8 *putem forma cu literele* $\{a, b\}$ *astfel încât numărul de apariţii ale literei a pe poziţii de rang par coincide cu numărul de apariţii ale literei a pe poziţii de rang impar?*
Altă reformulare a Problemei 1: *Într-un grup sunt* 4 *fete şi* 4 *băieţi care se pot îmbrăca folosind tricouri albe sau negre. Iniţial toţi poartă tricouri albe. La fiecare pas, o fată şi un băiat, care poartă tricouri de aceeaşi culoare, îşi pot schimba tricourile, existând condiţia ca ele să fie de aceeaşi culoare. Câte aranjări diferite se pot obţine?*

Generalizăm numărul de monede. n monede sunt aşezate într-un şir pe o masă, fiecare din ele având capul în sus. La fiecare mutare se pot întoarce două monede adiacente, existând condiţia ca acestea să arate aceeaşi faţă (cap sau pajură). Câte aranjări diferite se pot obţine după un număr de mutări?
Soluţie. Dacă $n = 2m$, configuraţia iniţială este $i_a = p_a = m$. Folosind identitatea (0.5) şi ideile dezvoltate la Soluţiile 1 sau 2 ale Problemei 1 se obţine C_{2m}^m.
Dacă $n = 2m + 1$, configuraţia iniţială este $i_a = m + 1 = p_a + 1$. Soluţia este

$$C_{2m+1}^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{m+1}^{k+1} \Longleftrightarrow C_{2m+1}^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{m+1}^{m-k}. \tag{0.7}$$

Obţinem soluţia generală a problemei

$$N = C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

Observaţie. Soluţia problemei, pentru configuraţia iniţială dată, reprezintă termenul (termenii) maxim(i) de pe linia n a triunghiului lui Pascal. Următoarea generalizare arată că de fapt orice număr combinatorial poate fi gasit ca soluţie a problemei, pentru o alegere convenabilă a configuraţiei iniţiale.
Generalizăm configuraţia iniţială. n monede sunt aşezate într-un şir pe o masă. La fiecare mutare se pot întoarce două monede adiacente, existând condiţia ca acestea să arate aceeaşi faţă (cap sau pajură). Câte aranjări diferite se pot obţine după un număr de mutări?
Soluţie. Analizăm cazurile n par, respectiv impar.
Pentru $n = 2m$ considerăm o configuraţie iniţială arbitrară

$$i_a = p_a + k, \quad k \in \{-m, ..., 0, ..., m\}$$

invarintă la mutările permise de problemă. Folosind şi relaţia

$$i_a + i_b = m = p_a + p_b,$$

obţinem două noi relaţii echivalente, invariante la mutările permise

$$i_a + p_b = m + k, \Longleftrightarrow i_b + p_a = m - k.$$

Oricare din cele două relaţii determină soluţia problemei

$$C_{2m}^{m+k} = C_{2m}^{m-k} = \sum_{i=0}^{m-|k|} C_m^i C_m^{|k|+i}.$$

Cazul $n = 2m + 1$ implică

$$i_a + i_b = m + 1 = p_a + p_b + 1.$$

O configuraţie iniţială

$$i_a = p_a + k, \quad k \in \{-m+1, ..., 0, ..., m\},$$

care rămâne invariantă la mutările permisive poate fi rescrisă

$$i_a + p_b = m + k \Longleftrightarrow i_b + p_a = m + 1 - k,$$

ceea ce conduce la soluţia problemei

$$C_{2m+1}^{m+k} = C_{2m+1}^{m+1-k} = \sum_{i=0}^{m+1-|k|} C_m^i C_{m+1}^{|k|+i}.$$

Generalizăm numărul de culori. n monede sunt aşezate într-un şir pe o masă şi sunt colorate folosind una din culorile $a_1, a_2, ..., a_k$, $k \geq 2$. La fiecare pas, două monede adiacente având aceeaşi culoare pot fi recolorate folosind o aceeaşi altă culoare. Câte colorări diferite se pot obţine după un număr de paşi?

Alte generalizări posibile.

- Puttem schimba numărul de monede care pot fi recolorate la fiecare pas.
- Pot renunţa la condiţia ca monedele care pot fi recolorate la fiecare pas trebuie să fie adiacente.
- Monedele pot fi aşezate şi altfel decât în şir, de exemplu circular.

Bibliografie

[1] http://www.math.uaic.ro/continut/studenti/seminar_didactica/Mathematics_Future_Mankind_29_oct_2016.pdf
[2] Valentin Vornicu, *Olimpiada de Matematică de la provocare la experienţă*, Editura Gil, 2003.