Criterii de comutativitate a grupurilor

Marius Tărnăuceanu

10.03.2017

Abstract

În această lucrare vom prezenta mai multe condiţii suficiente de comutativitate a grupurilor.

MSC (2010): 20A05, 20K99.
Key words: grup, grup abelian, centrul unui grup, gradul de comutativitate al unui grup, produs de submulţimi ale unui grup.

1 Principalele rezultate

Studiul proprietăţii de comutativitate ocupă un loc central în cadrul teoriei grupurilor. De-a lungul istoriei au fost identificate numeroase condiţii suficiente pentru ca această proprietate să fie satisfăcută (a se vedea, spre exemplu, [1,2,4]). În cele ce urmează prezentăm câteva dintre acestea.

Condiţii relative la elemente:

Teorema 1.1. *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Atunci oricare din următoarele condiţii implică comutativitatea lui G:*

a) $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall\, x, y \in G$.

b) $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$.

c) $x^2 = e$ *sau* $x \in Z(G)$, $\forall\, x \in G$.

d) *Printre oricare* 3 *elemente distincte ale lui* G *există două care comută.*

e) *Există* $a \in G$ *astfel încât* $x^3 = axa$, $\forall\, x \in G$.

f) *În G are loc implicaţia "$xy^2 = z^2x \Longrightarrow y = z$".*

g) (i) $(xy)^2 = (yx)^2$, $\forall\, x, y \in G$;

(ii) *Ecuaţia $x^2 = a$ are soluţii în G, $\forall\, a \in G$ fixat.*

h) *Există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ cu $(\alpha, \beta) = 1$ astfel încât*

$$(xy)^\alpha = (yx)^\alpha \text{ şi } (xy)^\beta = (yx)^\beta, \forall\, x, y \in G.$$

i) *Există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ cu $(\alpha, \beta) = 1$ astfel încât*

$$xy^\alpha = y^\alpha x \text{ şi } xy^\beta = y^\beta x, \forall\, x, y \in G.$$

j) *Există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ cu $(\alpha, \beta) = 1$ astfel încât*

$$x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha \text{ şi } x^\beta y^\beta = y^\beta x^\beta, \forall\, x, y \in G.$$

k) *Există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$, cel puţin unul din ele fiind par, astfel încât*

$$x^\alpha y^\beta = yx, \forall\, x, y \in G.$$

Condiţii relative la morfisme:

Teorema 1.2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Pentru fiecare $i \in \mathbb{Z}$ considerăm aplicaţia $f_i : G \longrightarrow G$, $f_i(x) = x^i$, $\forall\, x \in G$. Atunci G este abelian în oricare din următoarele situaţii:*

a) *Există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\{f_{k-1}, f_k, f_{k+1}\} \subseteq End(G)$.*

b) *Există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\{f_k, f_{k+2}, f_{k+4}\} \subseteq End(G)$.*

c) *Există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\{f_{k+1}, f_{2k+1}, f_{3k+2}\} \subseteq End(G)$.*

d) *Există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\{f_{k+1}, f_{2k+1}, f_{4k-1}\} \subseteq End(G)$.*

e) *Există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ cu $(\alpha(\alpha - 1), \beta(\beta - 1)) = 2$ astfel încât $\{f_\alpha, f_\beta\} \subseteq End(G)$.*

Teorema 1.3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Atunci oricare din următoarele condiţii implică comutativitatea lui G:*

a) *G are exact un automorfism.*

b) *G are exact p automorfisme, unde p este un număr prim.*

c) *$f : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in G$, este endomorfism injectiv (surjectiv) al lui G.*

d) *Există $k \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât aplicaţiile $f, g : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^k$ şi $g(x) = x^{2k}$, $\forall\, x \in G$, sunt endomorfisme ale lui G şi f este surjectiv.*

e) *Există $a \in G$ şi f un endomorfism injectiv al lui G astfel încât*

$$f((f \circ f)(x)f(x)) = a, \forall\, x \in G.$$

f) *G este finit şi există un automorfism f al lui G astfel încât:*

   (i) *$f(x) = x \Longrightarrow x = e$;*
   (ii) *$(f \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in G$.*

g) *G este finit şi există un automorfism f al lui G astfel încât:*

   (i) *$f(x) = x \Longrightarrow x = e$;*
   (ii) *$|\{x \in G \mid f(x) = x^{-1}\}| > \frac{1}{2}|G|$.*

Observaţie. Are loc un rezultat mai puternic decât a) şi b) din Teorema 1.3, anume

$$Aut(G) \text{ ciclic } \Longrightarrow G \text{ abelian},$$

unde $Aut(G)$ este grupul automorfismelor lui G.

Condiţii relative la centru:

Teorema 1.4. *Fie $(G, \cdot)$ un grup, $Z(G)$ centrul lui G şi H un subgrup al lui G astfel încât $H \subseteq Z(G)$. Dacă grupul factor G/H este ciclic, atunci G este abelian. În particular,*

$$G/Z(G) \text{ ciclic } \Longrightarrow G \text{ abelian}$$

sau, echivalent,

$$Inn(G) \text{ ciclic } \Longrightarrow G \text{ abelian},$$

unde $Inn(G)$ este grupul automorfismelor interioare ale lui G.

Corolar 1.5. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup finit. Dacă* $|Z(G)| > \frac{1}{4}|G|$*, atunci* G *este abelian.*

Un rezultat de aceeaşi factură utilizează *gradul de comutativitate* al unui grup finit G, definit prin

$$d(G) = \frac{|\{(x,y) \in G^2 \mid xy = yx\}|}{|G|^2}$$

şi introdus în 1968 de către P. Erdös şi P. Turán.

Teorema 1.6. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup finit. Dacă* $d(G) > \frac{5}{8}$*, atunci* G *este abelian.*

Condiţii relative la aplicaţiile ordin:

Teorema 1.7. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup finit de ordin* n*,* L_n *laticea divizorilor lui* n*,* $L(G)$ *laticea subgrupurilor lui* G *şi aplicaţiile*

$$f : G \longrightarrow L_n,\ f(x) = ord(x),\ \forall\, x \in G,$$

respectiv

$$g : L(G) \longrightarrow L_n,\ g(H) = |H|,\ \forall\, H \in L(G).$$

Atunci injectivitatea oricăreia dintre aplicaţiile f *sau* g *implică comutativitatea lui* G*.*

Observaţie. Injectivitatea aplicaţiilor f sau g din Teorema 1.7 implică chiar mai mult, anume că G este grup ciclic.

Condiţii relative la latice de subgrupuri:

Teorema 1.8. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi* $L(G)$ *laticea subgrupurilor sale. Atunci* G *este abelian în oricare din următoarele situaţii:*

a) $L(G)$ *este distributivă.*

b) $L(\mathbb{Z} \times G)$ *este modulară.*

c) *Există* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*, astfel încât* $L(G^n)$ *este modulară.*

Condiţii relative la ordin:

Teorema 1.9. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ descompunerea în produs de factori primi a ordinului lui G. Dacă sunt satisfăcute condiţiile*

a) $n_i \leq 2, \forall\, i = 1, 2, ..., k,$

b) $(p_i, p_j^{n_j} - 1) = 1, \forall\, i \neq j,$

atunci G este abelian.

Corolar 1.10. *Orice grup de ordin p, p^2 sau pq, unde $p < q$ sunt numere prime şi $(p, q-1) = 1$, este abelian.*

Observaţie. Numerele naturale $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ ce satisfac condiţiile a) şi b) din Teorema 1.9 se numesc *numere abeliene*.

2 O nouă condiţie suficientă de comutativitate a grupurilor

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $k \in \mathbb{N}^*$. O submulţime A a lui G va fi numită *k-submulţime* dacă $|A| = k$. Date două submulţimi A şi B ale lui G vom nota cu AB produsul acestora (i.e. $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$). De asemenea, vom spune că *A şi B comută* dacă $AB = BA$.

Teorema 2.1. *Pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, dacă oricare două k-submulţimi ale lui G comută, atunci G este comutativ.*

Notăm că implicaţia de mai sus nu are loc pentru $k \geq 4$. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că oricare două 4-submulţimi ale grupului simetric S_3 comută (şi totuşi S_3 nu este comutativ!), lucru ce rezultă uşor din următoarea lemă.

Lema 2.2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi A, B două submulţimi ale lui G astfel încât $|A| + |B| > |G|$. Atunci $AB = G$.*

În final remarcăm că Lema 2.2 asigură comutativitatea *oricăror* două submulţimi A şi B ale lui G ce satisfac $|A| + |B| > |G|$. De asemenea, menţionăm că ea nu are loc dacă A şi B satisfac $|A| + |B| = |G|$, după cum arată următorul exemplu.

Exemplu. În S_3, considerând $A = B = A_3$, grupul altern de grad 3, avem $AB = A_3 \neq S_3$. Mai general, în orice grup finit G ce conţine un subgrup H de indice 2, considerând $A = B = H$, avem $AB = H \neq G$.

3 Demonstraţia noilor rezultate

3.1 Demonstraţia Teoremei 2.1

Avem de arătat că $xy = yx$, oricare ar fi $x, y \in G$. În cazul $k = 1$ acest lucru rezultă imediat din comutativitatea 1-submulţimilor $A = \{x\}$ şi $B = \{y\}$. Pentru $k = 2$ observăm că putem presupune $x \neq e$ şi $y \neq e$ (în caz contrar egalitatea $xy = yx$ fiind, evident, satisfăcută). Fie 2-submulţimile $A = \{e, x\}$ şi $B = \{e, y\}$. Atunci

$$AB = \{e, x, y, xy\} \text{ şi } BA = \{e, x, y, yx\},$$

deci $AB = BA$ implică $xy = yx$. Pentru $k = 3$ presupunem, prin absurd, că grupul $(G, \cdot)$ nu este comutativ. Atunci există un element $x \in G$ astfel încât

$$(*) \qquad x \neq x^{-1} \text{ şi } x \notin Z(G),$$

unde $Z(G)$ este centrul lui G. Într-adevăr, dacă pentru orice $x \in G$ am avea $x = x^{-1}$ sau $x \in Z(G)$, considerăm a şi b două elemente arbitrare ale lui G. Dacă cel puţin unul din ele aparţine lui $Z(G)$ obţinem $ab = ba$, iar dacă $a = a^{-1}$ şi $b = b^{-1}$ obţinem

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba \text{ în cazul } ab = (ab)^{-1},$$

respectiv

$$ab = ab^3 = [(ab)b]b = [b(ab)]b = [(ba)b]b = (ba)b^2 = ba \text{ în cazul } ab \in Z(G).$$

Aşadar G este comutativ, ceea ce contrazice ipoteza. Fie deci $x \in G$ satisfăcând proprietăţile $(*)$ şi $y \in G$ astfel încât $xy \neq yx$. Considerând 3-submulţimile $A = \{e, x, y\}$ şi $B = \{e, x^{-1}, y\}$, avem

$$AB = \{e, x, y, x^{-1}, y^2, xy, yx^{-1}\} \text{ şi } BA = \{e, x, y, x^{-1}, y^2, yx, x^{-1}y\},$$

deci $AB = BA$ implică $xy \in BA$, relaţie ce conduce uşor la o contradicţie. În concluzie, grupul $(G, \cdot)$ este comutativ. ∎

3.2 Demonstraţia Lemei 2.2

Trebuie să arătăm că orice element $x \in G$ poate fi scris sub forma $x = ab$, unde $a \in A$ şi $b \in B$. Fie $x \in G$ şi mulţimea $xB^{-1} = \{xb^{-1} \mid b \in B\}$.

Atunci $|xB^{-1}| = |B|$, deci $|A| + |xB^{-1}| > |G|$. Presupunem, prin absurd, că $A \cap xB^{-1} = \emptyset$. Atunci, utilizând Principiul Includerii şi Excluderii, obţinem

$$|G| \geq |A \cup xB^{-1}| = |A| + |xB^{-1}| > |G|,$$

o contradicţie. În concluzie, există $a \in A \cap xB^{-1}$, de unde $a = xb^{-1}$ pentru un anumit $b \in B$. Astfel $x = ab$, ceea ce încheie demonstraţia. $\blacksquare$

4 Bibliografie

[1] D. Heuberger, V. Pop, *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centrele de excelenţă*, clasa a XII-a, volumul I - Algebră, Editura Paralela 45, Piteşti, 2014.

[2] M. Tărnăuceanu, *Probleme de algebră*, volumul I, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2003.

[3] M. Tărnăuceanu, *Un criteriu de comutativitate a grupurilor*, Recreaţii Matematice, vol. XVIII (2016), 106-107.

[4] Colecţia *Gazeta Matematică*, 1990-2016.

Marius Tărnăuceanu
Facultatea de Matematică
Universitatea "Al.I. Cuza"
Iaşi, Romania
e-mail: `tarnauc@uaic.ro`