ELEMENTE DE CONTINUITATE ÎN PREDAREA MATEMATICII LA CLASELE A IV-A ŞI A V-A.

Prof. Asaftei Petru, Colegiul Pedagogic" V. Lupu" din Iași

Sistemul cunoștințelor matematice din clasa a V-a se clădește pe achizițiile dobândite de elevi în clasele primare. Noile cunoștințe trebuie să fie o continuare firească a cunoștințelor anterior învățate. Profesorul de matematică trebuie să facă un inventar cât mai exact asupra conținuturilor programelor școlare din clasele primare. Conținuturile programei de clasa a V-a nu se îmbină foarte bine cu programele anterioare. La trecerea în clasa a V-a apar elemente de discontinuitate. Uneori parcă am vrea ca elevii să se urce în pod fără scară. Numai profesorul poate să preîntâmpine astfel de situații. Puntea de legătură între cele două clase este formată din cele patru operații și proprietățile lor. Să amintim câteva din ele: a) dacă termenul unei adunări se mărește/micșorează cu un număr, atunci și suma se mărește/micșorează cu acel număr; b) dacă descăzutul și scăzătorul se maresc/micșorează cu un număr, atunci rezultatul scăderii nu se modifică; c) dacă într-o egalitate adunăm/scădem același număr din fiecare membru,egalitatea se păstrează, etc. Toate aceste proprietăți trebuie foarte bine reactualizate/actualizate la începutul clasei a V-a. Altfel, vom întâmpina dificultăți în toate clasele de gimnaziu. Aceste proprietăți se folosesc des în rezolvarea exercițiilor și problemelor. Vom exemplifica prin rezolvarea unei probleme de aritmetică care poate fi modelată și algebric.

Enunț

Fiul observă că, atunci când îi mai trebuia un an până la jumătatea vârstei din prezent, tatăl avea vârsta de 12 ori mai mare decât a sa, iar când va avea 11 ani, vârsta lui va fi de 4 ori mai mică decât a tatălui. Să se afle vârsta fiului în prezent.

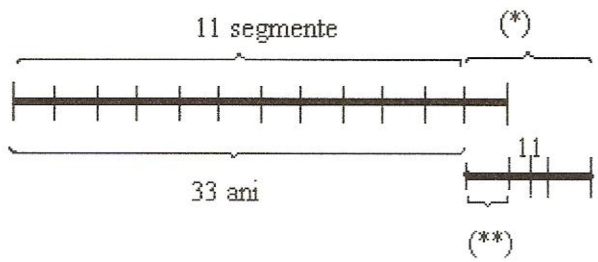
Soluţie :

1.Metodă aritmetică

Diferenţa dintre vârsta tatălui şi vârsta fiului este 4 x 11 - 11 = 33 ani. Figurarea mărimilor din problemă:

(*) - vârsta fiului în prezent

(**) - vârsta fiului când mai avea un an până la jumătatea vârstei din prezent.



Valoarea unui segment este 33 : 11 = 3 ani. Vârsta fiului în prezent este (3+1)x2=8 ani .

2.Metodă algebrică

Notăm cu a vârsta fiului când îi mai trebuia un an până la jumătatea vârstei din prezent.Conform datelor din problemă, în acel moment, tatăl avea vârsta $12a$ ani.

În prezent fiul are $2a+2$ ani, iar tatăl $12a+a+2=13a+2$ ani. Se știe că în orice etapă a vieții diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului este constant,33 ani în problemă. Pe de altă parte, diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului este $(13a+2) - (2a+2) = 13a - 2a = 11a$ ani. Această scădere a fost posibilă deoarece elevii de clasa a IV-a știu că dacă într-o scădere mărim descăzutul și scăzătorul cu același număr, rezultatul scăderii nu se schimbă.

Acum formăm relația literală /ecuația $11a = 33$, de unde se deduce $a = 3$ani. Vârsta fiului în prezent este 2 x 3+2 = 8 ani. Pentru ca rezolvarea să fie completă, trebuie să facem verificarea rezultatului obținut. Verificarea se face în textul inițial, altfel am putea utiliza relații care nu sunt adevărate.

Comentariu metodic.

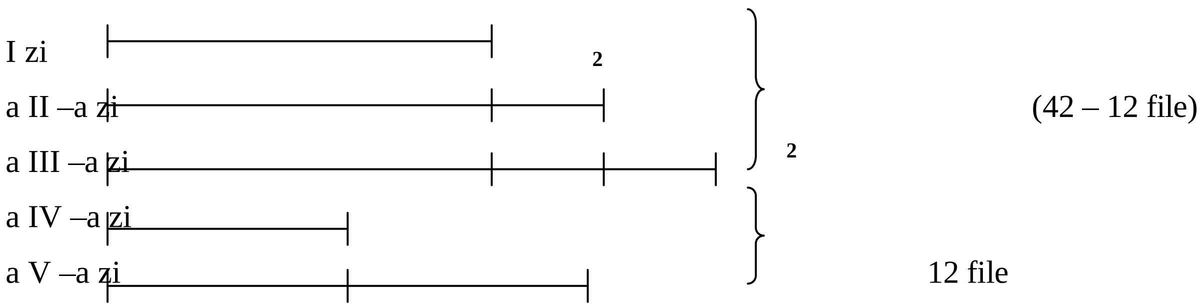
Metoda aritmetică de rezolvare are valențe formative mai puternice. Demersul aritmetic valorifică mai bine operațiile gândirii: analiza, sinteza, comparația, abstractizarea și generalizarea. În clasa a V-a se recomandă ca rezolvarea algebrică/literală a problemelor să fie precedată de rezolvarea aritmetică. În acest fel elevii vor înțelege mai ușor relațiile de tip cantitativ între mărimile ce intră în componența problemei, ceea ce va facilita scrierea ecuației ce stă la baza rezolvării algebrice a problemei. Nerespectarea acestor pași poate să-i pună pe unii elevi în imposibiltate privind asocierea modelului algebric de rezolvare a unei probleme de aritmetică. Metodele algebrice pot fi utilizate mai devreme în clasa a V-a numai dacă profesorul recapitulează foarte bine proprietățile operațiilor studiate de elevi în clasele primare. Eludarea unor norme metodologice poate conduce la îndepărtarea unor elevi de matematică, fenomen care uneori poate fi ireversibil. În continuare prezentăm un set de probleme complet rezolvate prin metoda aritmetică. Propunem cititorului să modeleze şi algebric rezolvările acestor probleme, cu condiția să respecte proprietățile operațiilor învățate în clasele primare.

PROBLEME DE ARITMETICĂ REZOLVATE

1). George şi-a propus să citească în cinci zile o carte ce are 42 file. Numărul filelor citite în primele trei zile este reprezentat de numere pare consecutive. În a patra şi a cincea zi a citit 12 file. Ştiind că în ultima zi a citit de două ori mai mult decât în ziua precedentă, să se afle câte file a citit George în fiecare zi.

Soluţie:

Să figurăm numărul de file citite de George în fiecare zi:

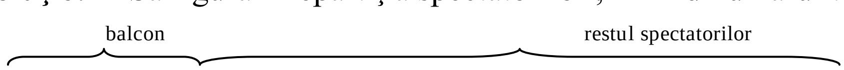


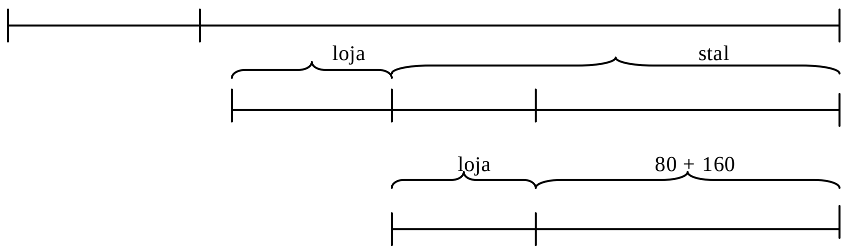
1. Câte file a citit în primele trei zile? 42 - 12 = 30
2. Care este triplul numărului de file citit în prima zi? 30 - 6 = 24
3. Câte file a citit în prima zi? 24 : 3 = 8
4. Câte file a citit în a doua zi? 8 + 2 = 10
5. Câte file a citit în a treia zi? 10 + 2 = 12
6. Câte file a citit în a patra zi? 12 : 3 = 4
7. Câte file a citit în a cincea zi? 4x2 =8

R: 8 file, 10 file, 12 file, 4 file, 8 file.

2. Câţi spectatori au fost aseară la Teatrul Naţional "Vasile Alecsandri", din Iaşi, dacă la balcon au fost 160 de spectatori, la lojă un sfert din restul spectatorilor, iar la stal cu 80 spectatori mai mult decât la lojă şi balcon împreună?

Soluţie: Să figurăm repartiţia spectatorilor , n fiind numărul total .





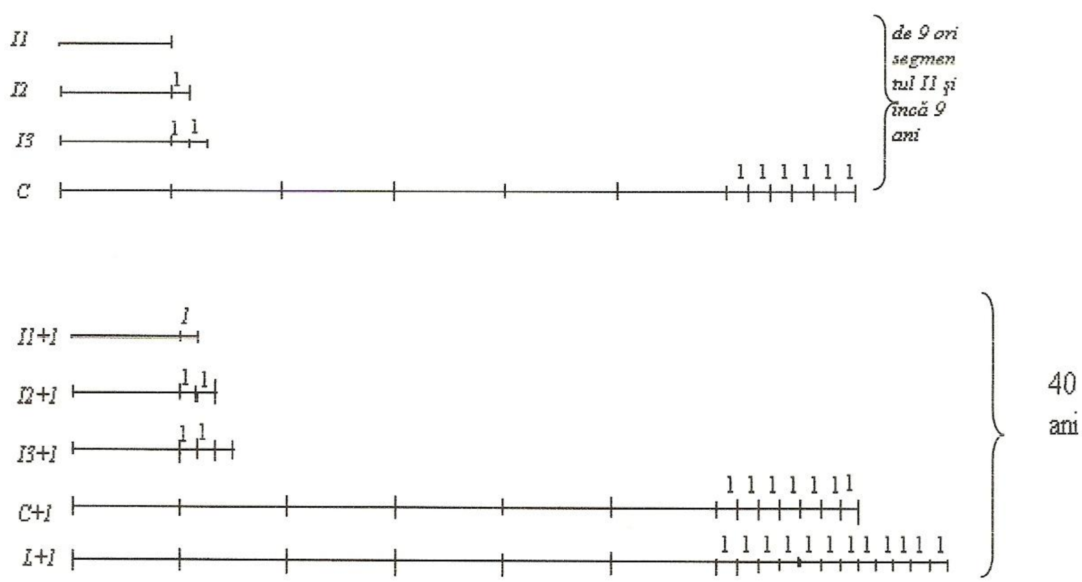
1. Cât reprezintă jumătate din restul spectatorilor? 80 + 160 = 240
2. Câţi spectatori au stat la lojă şi stal? 240 x 2 = 480
3. Câţi spectatori au fost la teatru? 480 + 160 = 640

R : 640 spectatori

3). Scriitorul Ion Creangă a publicat povestea "Capra cu trei iezi" în 1875. Se spune că pe atunci capra ar fi avut o vârstă egală cu dublul sumei vârstelor iezişorilor ei, anii acestora fiind exprimaţi prin numere naturale consecutive. Peste un an, când s-a abătut necazul asupra caprei, lupul avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor de atunci ale iezilor, iar toţi cinci aveau împreună 40 ani. Ce vârstă avea fiecare în anul publicării acestei poveşti?

Soluţie:

Să figurăm datele corespunzătoare anilor 1875 şi 1876.



Unde I1,I2,I3,C,L reprezintă vârstele celor cinci vieţuitoare în anul 1875.Analizând figurarea corespunzătoare anului 1876, putem scrie:

1. Care este numărul segmentelor ce reprezintă vârsta I1? 3 x1 + 2 x6 = 15
2. Câţi ani reprezintă aceste segmente? 40 - 25 = 15
3. Ce vârstă avea mezinul? 15 : 15 = 1
4. Ce vârstă avea iedul mijlociu? 1 + 1 = 2
5. Ce vârstă avea iedul cel mare? 2 + 1 = 3
6. Ce vârstă avea capra? (1 +2+3) x2 = 12
7. Ce vârstă avea lupul? (2+3+4) x2 - 1 = 17

R: 1an, 2ani, 3ani, 12ani, 17ani.

4). În curtea bunicii sunt 81 de păsări: raţe, gâşte şi găini. Ştiind că ele pot fi grupate astfel încât la o gâscă să corespundă trei găini, iar la două gâşte o raţă, aflaţi câte păsări de fiecare fel are bunica în curte.

Soluţie. Deoarece la două gâşte corespunde o raţă, iar la fiecare gâscă trei găini, putem face grupuri de câte o raţă, 2 gâşte şi 6 găini, ceea ce înseamnă 9 păsări de curte.În curte sunt 81:9=9 (grupuri). Vom avea soluţia 9x1=9 (raţe), 9x2=18 (gâşte), 9x6=54 (găini).

5). Lungimea unui dreptunghi reprezintă 3/8 din perimetrul său. Dacă adunăm 1/2 din lăţime cu lungimea, obţinem 105 cm. Aflaţi dimensiunile şi perimetrul dreptunghiului.

Soluţie:

Suma lungimilor reprezintă 6/8 din perimetru, iar suma lăţimilor reprezintă 2/8din perimetru.

Înseamnă că o lungime reprezintă 3/8din perimetru şi o lăţime 1/8 din perimetru. Cum jumătate din lăţime reprezintă 1/16 din perimetru, iar fracţia 3/8este egală cu 6/16,deducem ca 7/16 din perimetru reprezintă 105 cm apoi 1/16 din perimetru reprezintă 105:7=15(cm). Perimetrul este 16x15= 240(cm). Lungimea este 240:8X3=30x3=90 (cm), iar lăţimea este 240:8=30 (cm).

6). Dacă împărţim la patru fiecare termen al unui şir de numere, obţinem mai multe numere consecutive impare cu suma ultimelor două, adică 96, mai mare cu 16 decât dublul sumei primelor două numere. Să se găsească al cincilea termen al şirului.

Soluţie:

Dublul sumei primelor două numere impare consecutive este:

96-16=80. Suma primelor două numere consecutive impare este 80:2=40. Primul număr din şirul numerelor consecutive impare este (40-2):2=19. Al cincilea număr din şirul numerelor impare consecutive este 19+2+2+2+2=27. Numărul căutat este 27x4=108.

7). Arătaţi că dintre oricare patru numere naturale diferite, mai mici decât 1 000 000, se pot alege două a căror diferenţă să se împartă exact la 3.

Soluţie:

La împărţirea cu 3 resturile posibile sunt 0, 1, 2.Înseamnă că cel puţin două numere din cele patru vor da acelaşi rest la împărţirea cu 3.

Fie a = 3c + r, b = 3d + r, a > b. Avem a - b = 3c - 3d = 3(c - d).

8. 0 veveriţă descoperă un alun încărcat cu fructe şi îşi face provizii pentru iarnă transportând la scorbura sa alternativ: o dată două alune, o dată trei alune. După ce transportă 47 de alune, face o pauză pentru a se odihni. Să se calculeze ce distanţă a parcurs veveriţa în total, dacă de la alun la scorbura ei este o distanţă de x hm x dam x m, unde x are ca valoare cel mai mic număr natural posibil.

Soluţie:

Numărul x nu poate fi 0. Înseamnă că x este 1. Distanţa de la scorbură la alun este de 1hm ldam 1m= 111m. Pentru prima grupă de 5 alune parcurge traseul Alun-Scorbură-Alun-Scorbură, deci 3 x111m. Pentru fiecare grupă de 5 alune, din restul de 42, parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură-Alun-Scorbură, deci 4 x 111m.

Deoarece sunt 8 grupe, veveriţa va parcurge 8x 4x111m. Pentru restul de 2 alune va parcurge traseul Scorbură-Alun-Scorbură, deci 2x111m.

În total veveriţa parcurge (3 + 32 + 2) x 111m = 37x 111m = 4107m.

9). Un părinte îşi împarte averea astfel: la primul copil 10 milioane plus o cincime din rest, la al doilea copil 20 de milioane plus o cincime din noul rest, la al treilea 30 de milioane plus o cincime din noul rest şi aşa mai departe. Să se afle suma împărţită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind că toţi au moşteniri egale.

Soluţie:

Din faptul că primii doi copii au primit sume egale rezultă că

(Rl - R2) :5 = 10, adică Rl - R2 = 50.

Inseamnă că 4/5 din Rl depăşeşte pe R2 cu 20 milioane. Avem Rl - R2 =50 si 4xR1:5-R2=20 de unde rezultă R1:5=30.

Obţinem Rl = 5 x 30 = 150 şi S = 10 + 150 = 160 (milioane). Deci suma împărţită este de 160 milioane. Primul copil a primit 10 + 150 : 5 = 40 (milioane). Numărul copiilor este 160 : 40 = 4.

10). Ştiind că data de 1 Decembrie din anul 2001 a fost într-o zi de sâmbătă, să se afle care va fi următorul an în care ziua de 1 Decembrie se va sărbători într-o zi de duminică.

Soluţie:

De la 1.12.2001 până la 30.11.2002 sunt 365 zile. Deoarece 365 = 7x52+1, ziua de 30.11.2002 este într-o sâmbătă. Ziua de 1.12.2002 se va sărbători într-o zi de duminică.

11). Dănilă Prepeleac i-a propus dracului să se întreacă la trântă, dar pentru a-l pune la încercare i-a spus că are un unchi, moş Ursilă, bătrân de 999 ani şi 52 săptămâni, şi de-l va putea trânti pe dânsul, se vor întrece apoi amândoi . Dacă 1/4 din vârsta lui moş Ursilă depăşeşte cu 220 ani 5/8 din vârsta nepotului, ce vârstă are Danilă?

Soluţie:

Vârsta lui moş Ursilă este 999 ani +52 săptămâni = 1000 ani. O pătrime din vârsta lui moş Ursilă este 1000 : 4 = 250 ani. Cinci optimi din vârsta nepotului reprezintă 250 - 220 = 30 ani. Vârsta nepotului este 30 : 5 x8 = 6x8 = 48 ani.

12). Primele douăsprezece numere dintr-un şir de numere sunt: 1,2, 0, 3, 4, 1, 5, 6, 2, 7, 8, 0. Scrieţi următoarele 6 numere din şir;

Soluţie:

Observăm că: (1 + 2) : 3 = 1 (rest 0); (3 + 4) : 3 = 2 (rest 1);

(5 + 6) : 3 = 3 (rest 2). După fiecare grupă de două numere naturale consecutive a fost pus restul împărţirii sumei lor la 3. Următoarele şase numere sunt: 9, 10, 1, 11, 12, 2.

13). a). Câte numere trebuie adăugate şirului 1,2,4,5, 7, 8, ... , 97, 98 pentru a obţine toate numerele de la 1 la 98?

b).Efectuaţi 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + .. + 97 + 98 – 2x (3+4+5+ .. + 34).

Soluţie:

a). Lipsesc numerele : 3,6,9….96 care pot fi scrise 3x1,3x2,3x3…3x32.

Se observă că lipsesc 32 numere.

b). Expresia de calculat se poate scrie:

1+2+(4-3)+(5-3)+(7-4)+(8-4)+...+(97-34)+(98-34)

=1+2+(1+2+3+4+...+63+64)

=3+64x65:2 =3+2080=2083

14). Produsul a două numere naturale este 913 368.Unul dintre numere are cifra unităților şi cifra zecilor mai mare ca 2 şi mai mică decât 8. Dacă la acest număr mărim cifra zecilor cu 2 şi micşorăm cifra unităţilor cu 1, obţinem un produs egal cu 951 425. Aflaţi cele două numere.

Soluţie:

Fie a şi b numerele căutate.

Obţinem (a+20-1)xb=951 425 <=>ab+19b=951 425<=>

913 368+19b=951 425<=>b=2003=>a=913368:2003=456

15). În trei cutii sunt 212 bile. Din prima cutie se scoate un număr de bile, din a doua de 2 ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul numărului de bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de bile egal cu numărul total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fost în fiecare cutie?

Soluţie:

Notăm cu p numărul bilelor scoase din prima cutie. Rezultă că în fiecare cutie rămân 9p + 8 bile. Deducem că în toate cutiile au fost 36p + 32 bile. Aşadar, 36p + 32 = 212, de unde p = 5. În cele trei cutii au fost 58,65, respectiv 89 bile.

16). Efectuând o singură cântărire, să se ia 475 g dintr-un kilogram de zahăr utilizând două greutăţi, una de 200 g şi cealaltă de 150 g.

Soluţie:

Utilizăm o balanţă cu braţe egale. Distribuim kilogramul de zahăr şi câte una din cele două greutăţi, pe cele două talere, până realizăm poziţia de echilibru. Pe fiecare taler vom avea 675 g. Masa căutată este pe talerul în care se află greutatea de 200 g: 675 g - 200 g=475 g zahăr.

17). Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este 3. Diferenţa dintre cele două numere este 7. Care sunt cele două numere?

Soluţie:

Suma celor două numere poate fi 13 sau 31. Cum diferenţa numerelor este 7, în primul caz numerele sunt 3 şi 10, iar în al doilea numerele sunt 12 si 19.

18). Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se constată că la fiecare 30 minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut, iar celălalt avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasuri sunt: 18h 36 min şi 19 h 24 min. La ce oră au început să funcţioneze?

Soluţie:

Cele două ceasuri se abat cu acelaşi număr de minute faţă de ora exactă, unul prin lipsă iar celălalt prin adaos. În momentul citirii abaterea este :

(19 h 24 min-18 h 36 min) : 2 = 48 min : 2 = 24 min.

Ceasurile au fost citite la ora 19 h 24 min- 24 min = 19 h. Numărul de ore în care ceasurile au functionat este 24 : 2 = 12.

Ceasurile au inceput să funcţioneze la ora 19-12=7

19). Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un număr format din două cifre. Scoate din numărul format de 99 ori numărul format din trei cifre.

Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de două cifre şi scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se explică acest lucru?

Soluţie:

Fie $\overline{abc}$ numărul de trei cifre şi $\overline{xy}$ numărul de două cifre. Avem $\overline{abcxz}$= $\overline{abc00}$ + $\overline{xy}$ = 100 x $\overline{abc}$ + $\overline{xy}$, 100 x $\overline{abc}$+ $\overline{xy}$ – 99x $\overline{abc}$ = $\overline{abc}$+ $\overline{xy}$. În continuare folosim metoda figurativă.

În urma efectuării operaţiilor indicate în problemă se obţine dublul numărului de două cifre.

20). Fiecare pătrat din figura alăturată □□□ se colorează cu o altă culoare. În câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?

Soluţie:

Dacă alegem culorile C1, C2, C3 din cele patru, putem să colorăm pătratele în şase moduri diferite: (C1, C2, C3), (C1, C3, C2), (C2, C1, C3), (C2, C3, Cl),(C3, C1, C2), (C3, C2, C1). Cele trei culori pot fi alese în patru moduri diferite: (C1, C2, C3),(C1,C2,C4),(C1,C3,C4) şi (C2,C3,C4).Pentru fiecare alegere avem şase moduri diferite de colorare. În total avem 6x4 = 24 moduri diferite de colorare.

21). Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe de deasupra.

a). Câte sume diferite putem obţine?

b). Câte sume se pot forma în trei moduri diferite?

Soluţie:

a) Suma minimă care se poate forma este 1 + 1 = 2, iar cea maximă este 6 + 6 = 12. Toate numerele de la 2la 12 sunt sume posibile.

b) Singurele sume care se pot forma în trei moduri diferite sunt: 6 = 1 +5 = 2+4 = 3+3,

7 = 1 +6 = 2+5 = 3+4 şi 8 = 2+6 = 3+5 = 4+4.

În trei moduri diferite se pot forma trei sume.

22). Două oraşe sunt legate printr-o linie de cale ferată. La fiecare oră pleacă un tren din fiecare oraş către celălalt. Toate trenurile merg cu aceeaşi viteză şi fiecare călătorie de la un oraş la altul durează 6 ore. De câte ori fiecare tren, care parcurge distanţa între oraşe, se întâlneşte cu trenuri care merg în sens opus?

Soluţie:

Luăm un tren care pleacă din localitatea A spre localitatea B. Acesta întâlneşte un tren chiar în localitatea A (un tren care a plecat din B cu 6 ore înainte). Ultimul tren pe care îl întâlneşte este cel care va pleca din B în momentul sosirii sale. Între cele două momente s-au scurs 12 ore, timp în care au plecat 13 trenuri din B şi care întâlnesc trenul pe care l-am urmărit.

23). Să se arate că din feţele unui cub confecţionat din carton putem construi, fără resturi feţele a şase cuburi.

Soluţie:

Descompunem în pătrate fiecare faţă a cubului astfel. Avem 6x5=30 pătrate din care putem confecţiona 30:6=5 cuburi mici. Cu cele şase pătrate mari confecţionăm al şaselea cub.

<table>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2" rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

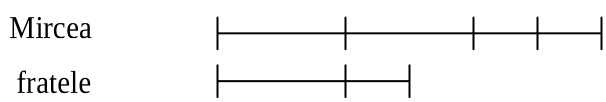
24). Să se afle cel mai mare număr natural de forma $\overline{abcd}$ *cu proprietăţile:* $a \neq b$, $b+c=5(a+d)$.

Soluţie: Din $b+c=5(a+d)$ rezultă că $b+c$ se împarte la 5. Cum b,c sunt cifre înseamnă că $b+c \leq 18$. Avem $b+c=15$ şi $a+d=3$. Luăm $a=3$, $b=9$, $c=6$ şi $d=0$.

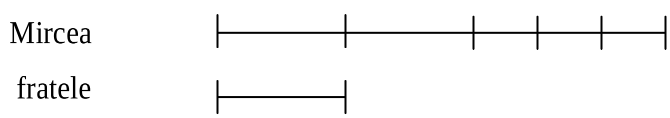
25). Mircea împreună cu fratele său au un număr de bomboane mai mic decât 30. Mircea are de trei ori mai multe decât fratele său. Aflaţi câte bomboane trebuie să îi dea Mircea fratelui său pentru a rămâne cu un număr de două ori mai mare decât al fratelui.Câte bomboane avea Mircea la început şi cu câte a rămas?

Soluţie.

După ce Mircea îi dă un număr de bomboane fratelui său, avem figurarea:



Înseamnă că figurarea iniţială este:



Deoarece Mircea avea de trei ori mai multe bomboane, înseamnă că trei segmente mici reprezintă tot atâtea bomboane cât un segment mare. Obţinem că numărul total de bomboane trebuie să se împartă la 4 şi la3. Putem avea 12 sau 24 de bomboane.

În primul caz Mircea îi dă fratelui 3:3=1 bomboane, iar în al doilea caz îi dă 6:3=2 bomboane. În primul caz Mircea avea 9 bomboane şi a rămas cu 8 bomboane şi în al doilea caz avea 18 bomboane şi a rămas cu 16 bomboane.

26). Se împart două numere naturale. Dacă împărţitorul, câtul şi restul sunt trei numere consecutive cu suma 30, să se afle deîmpărţitul.

Soluţie:

Cele trei numere consecutive sunt 9, 10 si 11. Formula împărţirii cu rest este D = Î x C + R, R < Î. Se observă că 11 nu poate fi rest. Avem

D = 10 x 11 + 9 = 119 sau D = 9x 11 + 10 = 109.

27). Observă regula şi completează, apoi verifică rezultatele găsite: 2+4 = 3+3; 2 + 4 + 6 = 4 + 4+4; 2 + 4 + 6 + 8 = 5 + 5 + 5+5; 2 + 4 + 6+ .. + 12 = □;

2 + 4 + 6 + ... + 14 = □ ... ; 2 + 4 + 6+- .. + (a + a) =□.

Soluţie:

2 + 6 = 3+3; 2 + 4+6 = (2+6) + 4 = 8 + 4 = 4 + 4 + 4; 2 + 4 + 6 + 8 =

(2+8) + (4+6) = 10 + 10 = 5 + 5 +5 + 5. Se observă că termenul care se repetă în membrul drept este jumătatea sumei dintre primul termen şi ultimul termen din membrul stâng. Acest termen se repetă de un număr de ori egal cu numărul termenilor din membrul stâng. În suma 2+4+6+ .. + 12 avem 6 termeni, iar 2+12 = 7+7.

Obţinem: $2+4+6+\ldots+12 = \underbrace{7+7+7+\ldots+7}_{6\text{ ori}}$; $2+4+6+\ldots+14 = \underbrace{8+8+\ldots+8}_{7\text{ ori}}$;

$2+4+6+\ldots+(a+a) = (\underbrace{a+1)+(a+1)+\ldots+(a+1)}_{a\text{ ori}}$.

28). O foaie de hârtie dreptunghiulară se îndoaie de-a lungul de 6 ori, formându-se 7 benzi egale si suprapuse. Dreptunghiul obţinut se îndoaie de-a latul de 9 ori, rezultând în final un pătrat cu perimetrul de 12 cm. Să se afle perimetrul dreptunghiului iniţial.

Soluţie:

După prima serie de îndoiri se obţine un dreptunghi care are lungimea egală cu lungimea dreptunghiului iniţial, iar lăţimea este egală cu latura pătratului obţinut în final, a cărui latură are lungimea 12cm : 4 = 3cm. Deoarece dreptunghiul iniţial a fost îndoit de-a lungul de 6 ori, înseamnă că lăţimea lui este 7x3cm = 21cm.

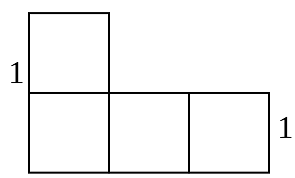
Ultimele 9 îndoiri sunt echivalente cu îndoirile de-a latul ale dreptunghiului iniţial, de unde rezultă că lungimea dreptunghiului iniţial este 10 x 3cm = 30cm. Perimetrul dreptunghiului iniţial este 2x (30cm + 21cm) = 2 x 51cm = 102cm.

29). Există numere naturale care împărţite la 12 să dea câtul 7, iar împărţite la 15 să dea restul 2?

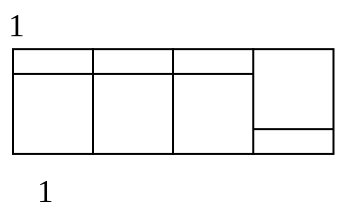
Soluţie:

Fie n = 12k+7=15p+2. Atunci n=3(4k+2)+1=3x5p+2,adică pe de o parte n dă la împărţirea prin 3 restul 1, pe de altă parte dă restul 2, imposibil.

30).Să se arate că pătratul de latura 36 poate fi acoperit cu piese de forma:



Soluţie: Prin îmbinarea a două piese putem obţine o piesă dreptunghiulară de forma alaturată.



Pentru acoperirea pătratului sunt necesare (36 : 4) x (36 : 2) = 162 piese dreptunghiulare. Pătratul poate fi acoperit cu 162 x 2=324 piese iniţiale.

31). Un dreptunghi are perimetrul de 624 cm, iar lungimea este dublul lăţimii.

Poate fi împărtit dreptunghiul într-o reţea de pătrate egale astfel încât suma perimetrelor lor să fie 6656 cm?

Soluţie:

Lăţimea dreptunghiului este 624 : 6 = 104 cm. Dacă împărţim dreptunghiul în n pătrate egale, atunci n poate fi 2, 8, 32, 128, 512, ... Suma perimetrelor este

4nl = 6656 cm, de unde nl = 1664 cm. Pentru n = 2 obţinem l = 832 cm> 104 cm, fals. Pentru n = 8 obţinem l = 208 cm > 104 cm, fals. Pentru n = 32 obţinem 1 = 52 cm, ceea ce înseamna ca lăţimea poate fi acoperită cu de două ori latura unui pătrat, ceea ce este fals, deoarece dreptunghiul trebuie acoperit cu 32 pătrate. Pentru n = 128 obţinem l = 13 cm. Atunci dreptunghiul poate fi acoperit cu (104 : 13) x (208 : 13) = 8 x 16 = 128 pătrate.

Pentru n > 128 nu avem soluţii.

32). Fie numărul $N = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$.

a) Care este cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui N?

b) Câte valori diferite poate avea numărul N?

Soluţie:

Avem $N = 222 \cdot (a + b + c)$.

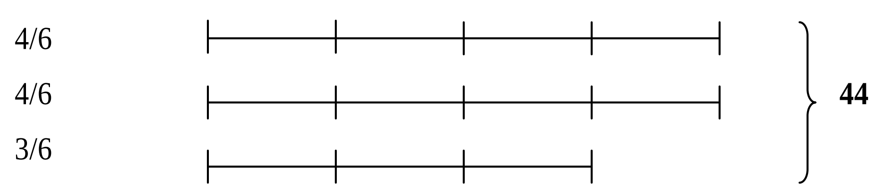
a) Cea mai mică valoare *a* lui *N* este 222x 3 = 666. Cea mai mare valoare *a* lui *N* este 222 x 27 = 5994.

b) Valorile sumei $a+b+c$ sunt de la 3 la 27. Numărul *N* poate lua 27-3+1 = 25 valori diferite.

33). În urma desfăşurării unui joc didactic matematic, învățătorul a oferit ca recompensă 44 baloane. Câte 4 baloane au primit un număr de participanţi ce reprezintă a şasea parte din totalul lor, câte două au primit a treia parte , iar restul participanţilor au primit câte un balon. Aflaţi numărul participanţilor la joc (soluţie aritmetică!).

Soluţie:

Presupunem că mai adăugăm elevi, în mod convenabil, astfel încât fiecare elev să primească câte un singur balon din cele 44.



Astfel, 1/6 se transformă în 4/6, 1/3 se transformă în 4/6, iar restul 1/2 se transformă în 3/6.

Să figurăm noua situaţie.

O şesime din numărul elevilor participanţi la concurs primeşte 44 : 11 = 4 baloane.

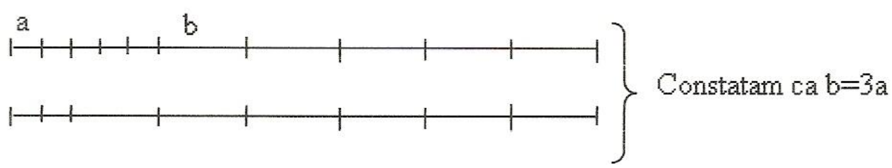
Numărul elevilor participanţi la concurs este 4x6=24.

34). Dan şi-a pus timbrele în clasor, câte 10 pe unele pagini, câte 30 pe alte pagini şi au rămas de 4 ori mai multe pagini goale decât folosite. Dacă ar pune câte 5 timbre pe fiecare pagină, toate paginile ar fi folosite. Câte pagini poate avea clasorul, ştiind că nu depăşeste 60 (soluţie aritmetică!)?

Soluţie:

Notăm cu *a* numărul de pagini cu câte 10 timbre şi cu *b* numărul de pagini cu câte 30 timbre. Din prima informaţie deducem că numărul paginilor clasorului este

5 *(a + b)*. Din a doua informaţie rezultă că numărul paginilor clasorului este *2a + 6b*. Să figurăm această situaţie.



Distingem cazurile:

a = 1 => b = 3 => 5 (1 +3) = 5 ·4 = 20 (pagini);

a = 2=>b = 3· 2 =>b = 6=>5 (2+6) = 5 ·8 = 40 (pagini);

a = 3 =>b = 3· 3 =>b = 9 =>5 (3+9) = 60 (pagini).

35). Ceasul lui Andrei o ia înainte cu 20 secunde pe oră. El a potrivit ceasul luni la ora 8 şi a citit din nou ceasul lunea următoare la aceeaşi oră. Ştiind că în această durată ceasul nu a funcţionat permanent, iar la ultima citire arată ora 8 h 50 min, să se afle cât nu a funcţionat ceasul.

Soluţie:

De luni, ora 8, până lunea următoare, ora 8, sunt 168 ore. Dacă ceasul ar fi funcţionat permanent, atunci ar fi avut un avans de 168x20 : 60 = 56 (minute).

În realitate, avansul este de 50 minute. Ceasul nu a funcţionat (56 - 50) · 60 : 20 = 18(ore).

36). La Concursul de matematică "Fl.T.Câmpan", etapa judeteană, au participat 100 elevi de clasa a IV -a, care au avut de rezolvat 3 probleme. Dacă 70 elevi au rezolvat bine prima problemă, 69 a doua problemă şi 64 a treia problemă, să se arate că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.

Soluţie:

Dacă fiecare elev a rezolvat bine numai câte două probleme, atunci numărul de rezolvări corecte este 100 x 2 = 200. În realitate numărul de rezolvări corecte este 70 + 69 + 64 = 203. Deoarece 203 - 200 = 3, înseamnă că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.

37). Într-o cutie sunt 34 bile, din care unele cântaresc cu 1 g mai mult. Dacă fiecare bilă cântăreşte un număr natural de grame, iar masa tuturor bilelor este 113 g, să se afle câte bile sunt mai grele.

Soluţie :

Dacă o bilă mai grea cântăreşte 3g, atunci masa maximă este

2g x1+3g x 33 = 101g < 113g. Dacă o bilă mai uşoară cântăreste 4g, atunci masa minimă este 4g x 33 + 5g x 1 = 132g > 113g. Înseamnă că o bilă mai grea cântăreşte 4g.

Dacă fiecare bilă cântăreşte 3 g, atunci masa tuturor bilelor este 3 g x 34 = 102g;

113g-102g=11g; 4g-3g=1g. Numărul bilelor mai grele este 11:1=11

38). Verificaţi dacă afirmaţia "A se împarte exact la 5, unde

A = 2000 +2x(1 + 2 + 3 + ... + 1999) + 1999 + 1997" este adevărată sau falsă.

Soluţie :

A = 2000+2000x1999+3996. Deoarece 3996 nu se împarte exact la 5, aceeaşi proprietate o are şi A.

Deci. afirmaţia din enunţ este falsă.

39). Mama Oanei a împlinit 17532 zile pe data de 1 ianuarie 2007. În ce an, lună şi zi a avut o vârstă de 3 ori mai mică?

Soluţie :

Din 17532 = 48 x 365 + 12 se deduce că anul naşterii este 2007 - 48 = 1959, pe 1 ianuarie. Restul 12 justifică că de la 1.01.1959 până la 1.01.2007 sunt 12 ani bisecţi. Din 17532 = 2 x 5844 şi 5844 = 16 x 365 + 4, rezultă că vârsta de 3 ori mai mică a avut-o pe 1 ianuarie 1975.

40). Doi elevi spun pe rând câte un număr natural, cel puţin egal cu 1 şi cel mult egal cu 7. Fiecare nou număr spus se adună la celelalte. Să se arate că primul elev poate să indice în aşa fel numerele încât să ajungă primul la suma 99.

Soluţie :

Avem $99 = 8 \cdot 12 + 3$.

Primul elev va spune, prima dată, numărul 3.

Al doilea elev trebuie să spună un număr n, $1 \leq n \leq 7$. În continuare, de fiecare dată când îi vine rândul, primul elev va spune un număr de forma 8 - n. În acest fel primul elev va completa o sumă de tipul $8 \cdot k + 3$, k fiind număr natural nenul.

Pentru k = 12 se obţine suma 99.

41). Paginile unei cărţi sunt numerotate de la 1 la 336. Din această carte se rup, la întâmplare, 111 foi. Să se arate că:

a)suma numerelor de pe foile rămase nu se împarte exact la 10;

b)produsul numerelor de pe foile rămase se împarte exact la 3.

Soluţie :

a) În total cartea are 336 : 2 = 168 foi.

Numărul foilor rămase este 168 - 111 = 57.

Suma numerelor de pe fiecare foaie este un număr impar.

Suma unui număr impar de numere impare este un număr impar. deci nu se poate împărţi exact la 10.

b) în şirul 1, 2, 3, ... , 336 avem 112 numere care se împart exact la 3. Acestea sunt: 1 x 3, 2 x 3, 3 x 3, ... , 112 x 3. Pe paginile celor 111 foi putem avea cel mult 111 numere care se împart exact la 3. Pe paginile rămase vom întâlni cel puţin un număr care se împarte exact la 3, deci şi produsul numerelor se împarte exact la 3.

42). Aşezaţi numerele 2, 3, 4, ... , 10 în pătratul alăturat astfel încât, pe fiecare linie, suma numerelor din primele două casete să fie egală cu numărul din ultima casetă. În câte moduri pot fi aşezate aceste numere?

Soluţie:

Suma numerelor de pe primele două coloane este egală cu suma numerelor de pe ultima coloană. Suma tuturor numerelor este 54, deci suma numerelor de pe ultima coloană este 27. Singura situaţie care satisface condiţia de pe ultima coloană este

8 + 9 + 10 = 27. Un exemplu de aşezare este prezentat alăturat.

		8
		9
		10

Numerele 8, 9 şi 10 pot fi aşezate în 3 x 2 x1 = 6 moduri pe ultima coloană. Deoarece :

$$\begin{cases} 2+6=6+2=8 \\ 4+5=5+4=9 \\ 3+7=7+3=10 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} 3+5=5+3=8 \\ 2+7=7+2=9 \\ 4+6=6+4=10 \end{cases}$$

înseamnă că avem (8 x 2) x 6 = 96 moduri de aşezare a celor 9 numere.