Cum se rezolvă?

Extinderi ale criteriilor de congruenţă a triunghiurilor (L.U.U. şi L.L.U.)

Cazurile clasice de congruenţă a triunghiurilor admit două extinderi. Pe cât de accesibil şi de prietenos este cazul L.U.U., pe atât de încăpăţânat este cazul L.L.U.; e pretenţios şi funcţionează doar în anumite condiţii; tratat neglijent poate conduce la capcane nedorite. Congruenţele de tip L.U.U. şi L.L.U. scurtează substanţial spaţiul de redactare şi de justificare a unor probleme, care impun utilizarea metodei triunghiurilor congruente. Articolul de faţă doreşte să îi dezvăluie secretele şi să limpezească modul în care poate fi el aplicat.

Pentru început, să facem un popas la metoda triunghiurilor congruente.

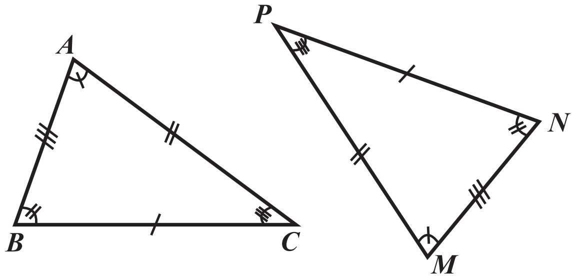

Figura 1

În figura 1 am reprezentat triunghiurile ABC şi MNP. Oricare dintre cele două triunghiuri poate fi deplasat astfel încât, la un moment dat, cele două triunghiuri să se suprapună.

Pentru a înţelege faptul că triunghiurile sunt congruente, trebuie să observăm cum se mişcă vârfurile triunghiurilor şi unde ajung acestea.

În figura 1, trebuie ca punctul A să ajungă în punctul M, B în N, C în P, adică să avem corespondenţele: $\sphericalangle A \longleftrightarrow \sphericalangle M, \sphericalangle B \longleftrightarrow \sphericalangle N, \sphericalangle C \longleftrightarrow \sphericalangle P$.

Spunem că între cele două triunghiuri din figura 1 avem corespondenţa $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta MNP$, care, la rândul ei, conduce şi la corespondenţa între laturile celor două triunghiuri, astfel: $[AB] \longleftrightarrow [MN], [AC] \longleftrightarrow [MP]$, $[BC] \longleftrightarrow [NP]$.

Corespondenţa $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta MNP$ se numeşte congruenţă *între cele două triunghiuri şi se notează $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.*

Congruenţa $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ conduce la următoarele relaţii:

$$[AB] \equiv [MN] \text{ sau } AB = MN; \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M \text{ sau } m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle M);$$
$$[AC] \equiv [MP] \text{ sau } AC = MP; \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \text{ sau } m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle N);$$
$$[BC] \equiv [NP] \text{ sau } BC = NP; \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \text{ sau } m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle P).$$

Observaţii

1. Puteţi utiliza oricare dintre aceste notaţii fără a produce confuzii.

2. În scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle M$, $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle N$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle P$ se numesc *unghiuri corespunzătoare* (*omoloage*).

Laturile care se opun unghiurilor corespunzătoare se numesc *laturi corespunzătoare* (*omoloage*).

3. Să ne imaginăm că avem desenate pe caiet două triunghiuri. Cum putem preciza, fără a le decupa şi apoi a le suprapune, dacă triunghiurile sunt sau nu congruente?

O metodă ar fi să măsurăm laturile şi unghiurile celor două triunghiuri şi să le comparăm, adică să facem 12 măsurători. Sunt cam multe!

Aici intervin criteriile de congruenţă a triunghiurilor, care reduc semnificativ numărul măsurătorilor.

Fiind familiarizaţi în privinţa cazurilor uzuale de congruenţă, notate prescurtat: L.U.L., U.L.U., L.L.L. (pentru triunghiurile oarecare), şi cu: C.C., C.I., I.U., C.U. (pentru triunghiurile dreptunghice), să ne ocupăm de alte tipuri particulare de congruenţă a triunghiurilor întâlnite în rezolvarea unor probleme de geometrie.

Congruenţa de tip L.U.U. (latură-unghi-unghi)

Pe două bucăţi diferite de carton, avem reprezentate două triunghiuri ABC (Figura 2.a) şi MNP (Figura 2.b).

Decupăm cele două triunghiuri cu un foarfece.

Mişcăm unul dintre triunghiuri până când cele două triunghiuri se suprapun, coincid (Figura 2.c).

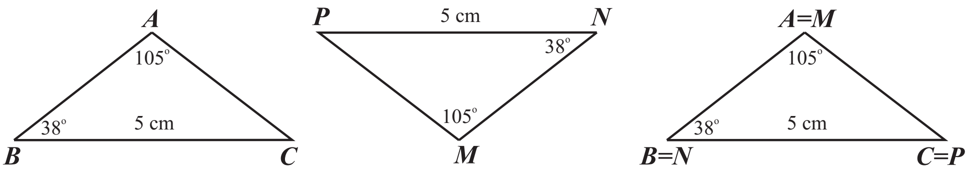

Figura 2.a Figura 2.b Figura 2.c

Din experimentul efectuat putem concluziona, apelând doar la intuiţie:

Dacă două triunghiuri au o latură şi două unghiuri (nu neapărat alăturate acesteia), respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Observaţie. Dacă unghiurile alăturate laturilor congruente ale celor două triunghiuri sunt respectiv congruente, atunci avem cunoscutul criteriu de congruenţă U.L.U.

Aşadar, noutatea constă în:

Criteriul de congruenţă L.U.U. *Dacă două triunghiuri oarecare au o latură, unghiul opus şi un unghi alăturat ei respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.*

Cu alte cuvinte, dacă triunghiurile oarecare ABC şi MPN au: $(BC) \equiv (NP)$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$ şi $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle P$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MPN$ (L.U.U.), de unde va rezulta că $(AB) \equiv (MP), (AC) \equiv (MN)$ şi $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle N$.

Observaţie. Cazul L.U.U. nu rezultă imediat din construcţia triunghiurilor, ci aplicând faptul că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180^o.

Demonstraţie. Într-adevăr, $m(\sphericalangle C) = 180^o - [m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)] = 180^o - [m(\sphericalangle M) + m(\sphericalangle P)] = m(\sphericalangle N)$, deci putem aplica cazul cunoscut U.L.U.

Observaţii.

1. În redactarea soluţiilor unor probleme este recomandată folosirea cazului L.U.U. pentru a reduce volumul argumentării afirmaţiilor.

2. Cazurile de congruenţă I.U şi C.U. sunt criterii de congruenţă de tip L.U.U.

Să urmărim, în continuare, modul în care putem aplica acest caz în rezolvarea a două probleme.

Problema 1. În figura 3, ştim că: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$. Să se arate că: $(AD) \equiv (BC)$ şi $(AC) \equiv (BD)$.

Ipoteza: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$
$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$
Concluzia: $(AD) \equiv (BC)$
$(AC) \equiv (BD)$

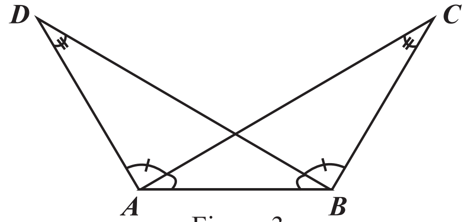

Figura 3

Rezolvare: Mai întâi, să punem în evidenţă elementele congruente ale triunghiurilor ABC şi BAD, care conţin congruenţele din ipoteză, dar şi pe cele din concluzie. Important este să observăm că latura $[AB]$ este comună celor două triunghiuri.

Aşadar, $(AB) \equiv (AB)$ (latură comună), $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ (ipoteză), $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$ (ipoteză), de unde - conform cazului L.U.U. - rezultă că $\Delta BAC \equiv \Delta ABD$, şi atunci $(AD) \equiv (BC)$ şi $(AC) \equiv (BD)$.

Problema 2. În figura 4, se ştie că: $(AC) \equiv (BC)$, $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ şi $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$. Arătaţi că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$.

Ipoteza: $(AC) \equiv (BC)$
$\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$
$\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$
Concluzia: $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$

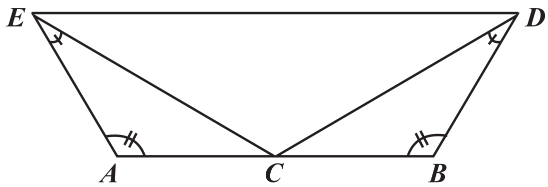

Figura 4

Rezolvare: Fiindcă $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză), este necesar să arătăm că $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle CDE$, adică triunghiul DCE este isoscel cu $(CE) \equiv (CD)$.

Ce triunghiuri congruente să utilizăm? Observând figura 4, datele din ipoteză şi concluzia, alegerea este evidentă: $\Delta ACE \equiv \Delta BCD$.

Într-adevăr, $(AC) \equiv (BC)$ (ipoteză), $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză) şi $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$ (ipoteză), de unde - conform cazului L.U.U. - avem că $\Delta ACE \equiv \Delta BCD$ şi atunci $(CE) \equiv (CD)$. Acum se finalizează cu uşurinţă problema.

Congruenţa de tip L.L.U. (latură-latură-unghi)

Să observăm: Triunghiurile din figura 5 au câte două laturi (cele însemnate cu liniuţe) şi câte un unghi (diferite de cele formate de cele două laturi), respectiv congruente.

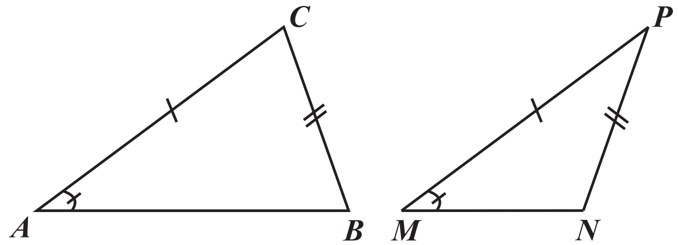

Figura 5

Sunt cele două triunghiuri congruente?

Observaţii.

1. Figura 5 ne sugerează că triunghiurile nu sunt congruente.

2. Într-adevăr, corespondenţa dintre cele două triunghiuri nu este o congruenţă, deoarece $m(\sphericalangle ACB) > m(\sphericalangle MPN)$, $m(\sphericalangle ABC) < m(\sphericalangle MNP)$ şi $AB > MN$.

3. Am apelat doar la intuiţie pentru a concluziona, însă intuiţia uneori ne poate întinde o capcană.

4. Vă prezentăm acum un contraexemplu, pentru a evita capcana L.L.U., prin următoarea problemă:

Problema 3. Se consideră triunghiurile ABC şi $A'B'C'$, astfel încât:
i) $AB = A'B', BC = B'C', \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$;
ii) unghiul C este obtuz şi unghiul C' este ascuţit.
Demonstraţi că cele două triunghiuri au înălţimile din B, respectiv B', congruente şi că unghiurile C şi C' sunt suplementare.

Etapa judeţeană, Botoşani, 2010

Ipoteza: $(BC) \equiv (B'C')$
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$
$(AB) \equiv (A'B')$
$m(\sphericalangle C) > 90^o$
$m(\sphericalangle C') < 90^o$
Concluzia: înălţimile din B şi B' sunt congruente
$m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle C') = 180^o$

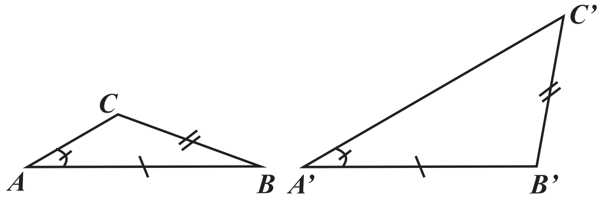

Figura 6.a

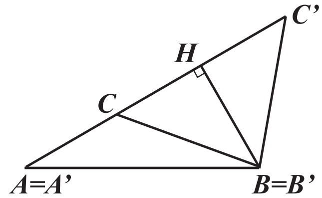

Figura 6.b

Rezolvare: Suprapunem cele două triunghiuri din figura 6.a ca în figura 6.b. Deoarece $BC = B'C'$, cercul cu centrul B şi raza BC conţine punctul C'. Fie $BH \perp AC, H \in AC$.

Fiindcă $m(\sphericalangle A'C'B') < 90^o$ şi $m(\sphericalangle ACB) > 90^o$, rezultă că $m(\sphericalangle BCC') < 90^o$ şi, cum $m(\sphericalangle A'C'B) < 90^o$, avem $H \in (CC')$. $\Delta BHC \equiv \Delta BHC'$ (I.C.), de unde $\sphericalangle BCC' \equiv \sphericalangle CC'B$. Însă, $m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BCC') = 180^o$, deci $m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle A'C'B') = 180^o$.

Atenţie! Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ nu sunt congruente pentru că $m(\sphericalangle C) \neq m(\sphericalangle C')$, chiar dacă au câte două laturi şi câte un unghi respectiv congruente. Există pericolul de a intra în capcana L.L.U.

Al doilea contraexemplu (să desenăm şi să observăm):

Problema 4. Desenaţi segmentul $[AB]$, cu $AB = 4$ cm, şi unghiul ABX, cu $m(\sphericalangle ABX) = 30^o$ (Figura 7).

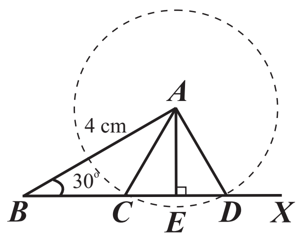

Figura 7

Cu centrul în A trasaţi un cerc cu raza de 3 cm. Notaţi cu C şi D, punctele de intersecţie a cercului cu dreapta $(BX$.

a) Precizaţi ce elemente congruente au triunghiurile ABC şi ABD.

b) Sunt triunghiurile ABC şi ABD congruente? Justificaţi.

Rezolvare. Mai întâi, este firesc să ne întrebăm dacă există configuraţii de tipul celei din figura 7 care să satisfacă cerinţele enunţului.

Să considerăm punctul E, astfel încât $AE \perp BX, E \in BX$. Avem că $AE = \dfrac{AB}{2} = 2$ cm, deci $E \in \operatorname{Int} \mathcal{C}(A, 3)$, iar cercul $\mathcal{C}(A, 3)$ intersectează semidreapta $(BX$ în două puncte C şi D, distincte, şi $C \in (BD)$, pentru că $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ADC) > 30^o$ (deoarece $AD < AB$).

a) Triunghiurile ABC şi ABD au: $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABD), (AC) \equiv (AD)$ (raze) şi $(AB) \equiv (AB)$.

b) Triunghiurile ABC şi ABD nu sunt congruente, deoarece $m(\sphericalangle ADB) < 90^o$ (unghi de la baza triunghiului isoscel ACD), iar $m(\sphericalangle ACB) = 180^o - m(\sphericalangle ADB) > 90^o$. Prin urmare, nici în acest caz congruenţa de tip L.L.U. nu funcţionează.

Al treilea contraexemplu:

Problema 5. Să considerăm triunghiul isoscel ABC, cu $(AB) \equiv (AC)$ şi punctul $D \in (BC)$, astfel încât $BD \neq DC$.

Să observăm că triunghiurile ABD şi ADC au: $(AB) \equiv (AC), \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$ (unghiurile de la baza triunghiului isoscel) şi $(AD) \equiv (AD)$.

Congruenţa de tip L.L.U., dacă ar funcţiona, ar implica faptul că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$, de unde ar rezulta că $(BD) \equiv (CD)$ şi $AD \perp BC$, contradicţie. Conchidem că nici în acest caz congruenţa de tip L.L.U. nu funcţionează.

Observaţii.

1. În urma analizei celor trei contraexemple apare întrebarea firească: În ce condiţii suplimentare funcţionează pentru două triunghiuri congruenţa de tip L.L.U.?

2. Evident, cazul I.C. pentru triunghiurile dreptunghice este un caz L.L.U.

3. Observaţiile efectuate pe cazurile prezentate ne conduc la concluzia că unghiurile opuse uneia dintre cele două laturi, respectiv congruente, ale celor două triunghiuri, trebuie să fie de acelaşi tip (ambele obtuze, ambele drepte - cazul I.C. - sau ambele ascuţite).

Să reformulăm şi să demonstrăm:

Cazul I. Dacă triunghiurile obtuzunghice ABC şi $A'B'C'$, cu $m(\sphericalangle A) > 90^o$ şi $m(\sphericalangle A') > 90^o$, au: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', (AB) \equiv (A'B')$ şi $(BC) \equiv (B'C')$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Ipoteza: ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ au $m(\sphericalangle A) > 90^o$ şi $m(\sphericalangle A') > 90^o$
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$
$(AB) \equiv (A'B'), (BC) \equiv (B'C')$
Concluzia: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

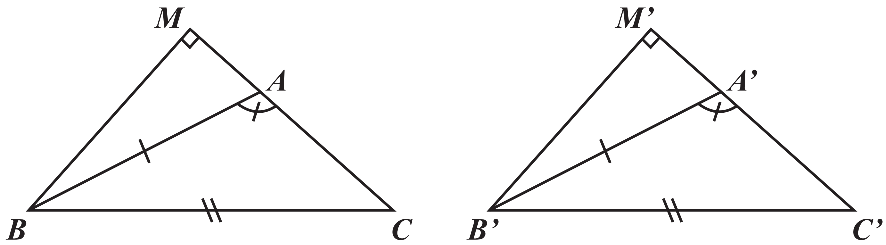

Figura 8

Observaţii.

1. Nu avem condiţii suficiente în ipoteză pentru a utiliza un criteriu cunoscut de congruenţă a triunghiurilor.

2. Suntem în situaţia de a efectua o construcţie auxiliară pentru a obţine triunghiuri, de regulă, dreptunghice, în care funcţionează unul dintre criteriile de congruenţă. Aşadar, să construim triunghiuri dreptunghice care să aibă congruente elementele date în ipoteză. Observăm că $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A') > 90^o$, deci suplementele acestor unghiuri sunt congruente şi ascuţite, de aceea suntem conduşi la a duce înălţimile BM şi $B'M'$, din vârfurile B, respectiv B' (Figura 8).

Demonstraţie. Avem că $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M'$ (I.U.), de unde $(BM) \equiv (B'M')$. Atunci, $\Delta MBC \equiv \Delta M'B'C'$ (I.C.), de unde $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle A'C'B')$. Finalizăm, observând că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (L.U.U.).

Prin urmare, în condiţiile impuse, congruenţa L.L.U. funcţionează.

Să aplicăm:

Problema 6. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Dacă $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) > 90^o$ şi $(AB) \equiv (CD)$, arătaţi că diagonala (AC) a patrulaterului conţine mijlocul diagonalei (BD).

Ipoteza: $ABCD$ patrulater convex
$m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) > 90^o$
$(AB) \equiv (CD)$
O este mijlocul diagonalei (BD)
Concluzia: $O \in (AC)$

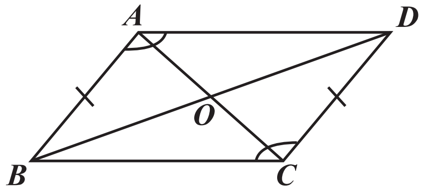

Figura 9

Rezolvare. Triunghiurile ABD şi CDB au: $(AB) \equiv (CD)$ (ipoteză), $(BD) \equiv (BD)$ (latură comună), $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) > 90^o$. Sunt îndeplinite condiţiile din ipoteza criteriului de congruenţă de tip L.L.U., deci $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$ (L.L.U.), de unde $(AD) \equiv (BC)$ (Figura 9). Patrulaterul $ABCD$ are laturile opuse congruente şi urmează că este paralelogram, de unde obţinem că $O \in (AC)$.

Cazul al II-lea. Tipul de congruenţă L.L.U. funcţionează şi pentru două triunghiuri ascuţitunghice care au câte două laturi şi un unghi opus uneia dintre acestea respectiv congruente.

Ipoteza: triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt ascuţitunghice
$(AB) \equiv (A'B'), (AC) \equiv (A'C')$
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$
Concluzia: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

Demonstraţie. Având, $(AB) \equiv (A'B')$ şi $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ suntem conduşi să construim câte două triunghiuri dreptunghice, ducând înălţimile $[AM]$ şi $[A'M']$. Punctele M şi M' sunt situate în interiorul segmentelor $[BC]$ şi $[B'C']$ pentru că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt ascuţitunghice. Avem $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M'$ (I.U.), de unde $[AM] \equiv [A'M']$. Deci, $\Delta AMC \equiv \Delta A'M'C'$ (I.C.), de unde $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. Aplicând criteriul de congruenţă L.U.U., obţinem concluzia.

Cazul al III-lea. Tipul de congruenţă L.L.U. mai funcţionează şi pentru două triunghiuri care au câte două laturi şi un unghi opus uneia dintre acestea respectiv congruente, iar unghiurile ce se opun celorlalte laturi congruente sunt de acelaşi tip (obtuze, drepte sau ascuţite).

Observaţie. Demonstraţia acestui caz de congruenţă de tip L.L.U. constă în a duce înălţimile din vârfurile comune laturilor, respectiv congruente, ale celor două triunghiuri.

În loc de concluzii

Menţionăm câteva sfaturi în abordarea problemelor de geometrie, chiar la clasa a VI-a, care solicită folosirea cazurilor de congruenţă a triunghiurilor.

1. Citiţi, mai întâi, cu deosebită atenţie enunţul problemei. Ce se dă? Ce se cere?
2. Folosiţi instrumente potrivite pentru a reprezenta figura, care trebuie să respecte informaţiile din enunţ.
3. Efectuaţi o figură cât mai mare posibil şi cât mai ingrijită. Figura nu vă rezolvă direct problema, dar vă poate ghida paşii spre rezolvare, apelând la intuiţia voastră.
4. Sesizaţi pe figură segmentele şi unghiurile congruente şi apoi justificaţi congruenţele de care aveţi nevoie, căutând să încadraţi elementele congruente de care dispuneţi în două triunghuri ce satisfac condiţiile unuia dintre criteriile de congruenţă.
5. Acordaţi o atenţie maximă elementelor omoloage în triunghiuri congruente, marcaţi cu liniuţe segmentele congruente şi cu arce de cerc cu liniuţe unghiurile.
6. Dacă utilizaţi congruenţa de tip L.L.U., asiguraţi-vă că sunt îndeplinite toate condiţiile în care acest tip funcţionează.

Pentru o mai bună înţelegere a ideilor articolului de faţă, vă recomand să abordaţi următoarele probleme:

Problema 7. Considerăm unghiul propriu XOY şi punctele $A, A' \in OX, A \neq A'$ şi $B, B' \in OY$, astfel încât: $(OB) \equiv (OA), (OB') \equiv (OA')$ şi $AB' \cap BA' = \{I\}$. Arătaţi că bisectoarea unghiului AIB este inclusă în dreapta OI.

Concursul Taberei de Matematică, Vatra Dornei, 2012

Problema 8. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Ştiind că: $BC \cap AD = \{E\}$, punctele C, D şi E sunt situate de aceeaşi parte a dreptei AB, $m(\sphericalangle AEC) \geq 90^o$, $(AD) \equiv (BC)$ şi $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ACB)$, arătaţi că triunghiurile ABE, OAB şi COD sunt isoscele, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

Artur Bălăucă

Problema 9. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele E şi F, astfel încât $(BE) \equiv (FC)$. Dacă $\{O\} = BF \cap CE$ iar triunghiul OBC este ascuţitunghic, cu $(OB) \equiv (OC)$, arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

Artur Bălăucă

Problema 10. Fie unghiul propriu XOY. În interiorul său se consideră semidreptele $[OZ$ şi $[OT$, cu proprietatea că $m(\sphericalangle XOZ) = m(\sphericalangle ZOT) =$

$m(\sphericalangle TOY)$, punctele $A \in (OX, B \in (OY, C \in (OZ, D \in (OT$, astfel încât $(OC) \equiv (OD)$, iar unghiurile OAD şi OBC sunt congruente. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, arătaţi că triunghiurile OAE şi OBE sunt congruente.

Sorin Furtună, Etapa Locală, Călăraşi, 2011

Notă. Această lucrare a fost prezentată elevilor de clasa a VI-a în Tabăra de Matematică de la Vatra Dornei. Am rămas cu impresia că elevii participanţi au manifestat un interes deosebit faţă de modul în care funcţionează aceste tipuri de congruenţă ale triunghiurilor.

Bibliografie

[1] Artur Bălăucă, *Aritmetică. Algebră. Geometrie. Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă. Clasa a VI-a*, Editura Taida, Iaşi, 2008.

[2] Artur Bălăucă, *Algebră. Geometrie. Olimpiade, concursuri şi centre de excelenţă. Clasa a VII-a*, Editura Taida, Iaşi, 2012.

[3] Artur Bălăucă, Ioan Ţicalo, Cătălin Budeanu, Gabriel Mîrşanu, *Olimpiadele Naţionale ale României şi Republicii Moldova. Olimpiadele Balcanice de Matematică pentru Juniori (OBMJ)*, Editura Taida, Iaşi, 2013.

[4] Dan Brânzei, Alexandru Negrescu, *Probleme de pivotare*, Editura Taida, Iaşi, 2012.

[5] Dan Brânzei, Sebastian Aniţa, Constantin Cocea, *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[6] Edwin E. Moise, Floyd L. Downs, Jr., *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

Artur Bălăucă