Aplicaţii ale calculului vectorial în determinarea unor puncte importante în triunghi - Coordonate baricentrice
Seminar informal de Didactica matematicii

20 aprilie 2018

Georgeta Creţu

Cuprins

1. Introducere 1
1.1. Avantajele folosirii coordonatelor baricentrice 1
2. Elemente de geometrie afină 2
2.1. Spaţii afine. Definiţie 2
2.2. Exemple de spaţii afine 2
2.3. Spaţiul liniar tangent T_PX 2
2.4. Aplicarea unui vector într-un punct 3
2.5. Combinaţii afine de puncte 3
2.6. Dependenţă şi independenţă afină 4
2.7. Repere afine 4
2.8. Trecerea de la coordonate afine la coordonate carteziene 4
2.9. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate afine 4
2.10. Exemple 5
3. Teoreme importante 6
4. Centrul de greutate al unui triunghi 6
5. Centrul cercului înscris în triunghi 7
6. Ortocentrul unui triunghi 9
7. Centrul cercului circumscris unui triunghi 11
8. Dreapta lui Euler 15
Bibliografie 15

1. Introducere

În geometrie, sistemul de coordonate baricentrice este un sistem de coordonate în care locaţia unui punct al unui simplex (triunghi, tetraedru etc.) este specificată ca fiind centrul de masă sau baricentrul, de obicei, de mase inegale plasate în vârfurile sale. Coordonatele se extind, de asemenea, în afara simplexului, unde una sau mai multe coordonate devin negative.

Coordonatele baricentrice au fost introduse pentru prima oară de către August Ferdinand Mobius în cartea "Calcul Baricentric", publicată în 1827. Acelaşi sistem a fost studiat de către Fauvel în 1993. Möbius a pornit de la problema de determinare a unui centru de greutate pentru o tijă cu greutăţi ataşate în două puncte distincte. Cu alte cuvinte, el a vrut să găsească centrul în care ar putea fi plasat un punct de sprijin pentru a echilibra tija (Wildberger, 2010). În calculele sale, pentru determinarea centrului, Möbius a atribuit şi greutăţi negative. Deşi acest lucru poate părea contra-intuitiv, o greutate negativă poate fi considerată un obiect care aplică o forţă ascendentă, cum ar fi un balon. În acest caz, a observat că centrul de greutate nu se află între cele două obiecte ataşate.

1.1. **Avantajele folosirii coordonatelor baricentrice.**

(1) Expresii simple pentru drepte în general, făcând fezabilă din punct de vedere computaţional intersectarea dreptelor.
(2) Formule simple pentru coordonatele unor puncte comune (centrul de greutate, centrul cercului înscris în triunghi, ortocentrul, centrul cercului circumscris triunghiului ...)
(3) Manipularea foarte bună a rapoartelor de lungimi.
(4) O formulă convenabilă pentru arie.
(5) Obţinerea unor formule pentru distanţa dintre puncte, uşor de utilizat.

Acest arsenal de instrumente utlizat în partea de calcul baricentric este mult mai extins decât cel al multor alte tehnici computaţionale care utilizează coordonatele carteziene.

În majoritatea problemelor coordonatele carteziene pot fi dificil utilizat, deoarece expresiile care intervin sunt de obicei complicate. Utilizarea coordonatelor baricentrice ne conduce către o serie de rezolvări mai scurte şi mai elegante pentru problemele menţionate anterior.

2. Elemente de geometrie afină

2.1. Spaţii afine. Definiţie.

Definiţia 1. Se numeşte spaţiu afin peste un câmp $\mathbb{K}$ un triplet $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ unde X este o mulţime nevidă, $\overrightarrow{X}$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi :

$$\Phi : X \times X \to \overrightarrow{X},$$
$$(P, Q) \mapsto \Phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ},$$

este o aplicaţie pentru care sunt satisfăcute următoarele axiome:

(1) există $O \in X$ astfel încât

$$\Phi_0 : X \to \overrightarrow{X}$$
$$P \mapsto \Phi_O(P) = \Phi(O, P),$$

este o aplicaţie bijectivă.

(2) Relaţia lui Chasles

$$\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R),$$

pentru oricare $P, Q, R \in X$.

Elementele mulţimii X se numesc puncte, spaţiul vectoriale $\overrightarrow{X}$ se numeşte spaţiul vectorial director al spaţiului afin $\mathcal{A}$, iar aplicaţia Φ se numeşte morfismul de structură al spaţiului afin $\mathcal{A}$.

Observaţia 1. Dimensiunea spaţiului afin $\mathcal{A}$ este egală cu dimensiunea spaţiului său liniar director. Se poate demonstra că dacă are loc prima axiomă din definiţia precedentă, atunci pentru orice $O \in X$ funcţia $\Phi_O : X \to \overrightarrow{X}$ este bijectivă.

Propoziţia 1.

2.2. Exemple de spaţii afine.

(1) **Spaţiul afin geometric.** Consider S mulţimea punctelor spaţiului geometric, V spaţiul liniar real al vectorilor liberi şi:

$$\Phi : S \times S \to V,$$
$$\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}.$$

Observăm că Φ satisface proprietăţile din definiţia precedentă. Bazându-ne pe acest exemplu vom nota în general, pentru un spaţiu afin arbitrar $\Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$. Prin urmare, pentru orice $\bar{u} \in V, \Phi_A^{-1}(\bar{u})$ este punctul B unic determinat de condiţia $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$.

(2) **Structura afină a unui spaţiu vectorial.** Fie V un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial şi:

$$\Phi : V \times V \to V$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{v} - \bar{u}.$$

Atunci (V, V, Φ) este un $\mathbb{K}-$spaţiu afin.

Observaţia 2. Orice două spaţii afine de aceeaşi dimensiune finită sunt izomorfe, adică există un morfism afin bijectiv între spaţiile lor de puncte. De aceea spaţiul afin geometric este izomorf cu $\mathbb{R}^3$.

2.3. Spaţiul liniar tangent T_PX. Fie $P \in X$ fixat arbitrar . Aplicaţia $\Phi_P : X \to \overrightarrow{X}$ este bijecţie deci transportă structura de spaţiu vectorial a lui $\overrightarrow{X}$ pe X astfel încât $\Phi_P : (X, +_P, \cdot_P) \to (\overrightarrow{X}, +, \cdot)$ devine izomorfism de spaţii liniare, unde $+_P$ şi $\cdot_P$ sunt definite prin: $+_P : X \times X \to X$ şi $\cdot_P : \mathbb{K} \times X \to X$ prin:

$$A +_P B = \Phi_P^{-1}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}), \ \forall A, B \in X$$
$$\alpha \cdot_P A = \Phi_P^{-1}(\alpha \overrightarrow{PA}).$$

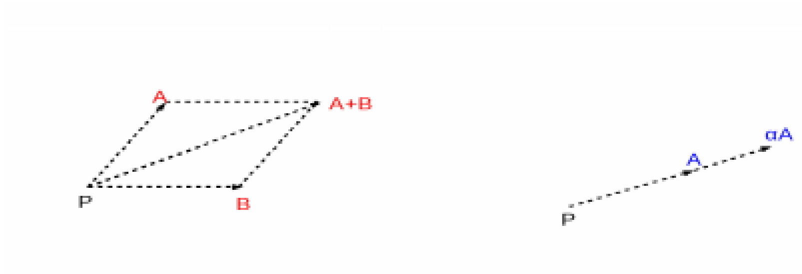
Teorema 1. *Mulţimea X împreună cu legile de compoziţie definite anterior are o structură de spaţiu liniar peste $\mathbb{K}$ şi $\Phi_P : X \to \overrightarrow{X}$ este izomorfism de spaţii liniare.*

Observaţia 3. Structura de spaţiu liniar a lui X depinde de alegerea lui P, de aceea notăm spaţiul liniar obţinut cu T_PX şi îl numim vectorializatul lui X în P sau spaţiul liniar tangent la X în P.

Observaţia 4. În cazul spaţiului afin geometric observăm că depind de alegerea lui P:

(1) $A +_P B = C$, unde C este unic determinat de $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$

(2) $\alpha \cdot_P A = D$ unde D este unic determinat de $\alpha \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD}$.



2.4. **Aplicarea unui vector într-un punct.**

Definiţia 2. Dat spaţiu afin $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ definim o operaţie de adunare a punctelor cu vectori prin:

$$+ : X \times \overrightarrow{X} \to X$$

$$P + \bar{u} = Q \Leftrightarrow \bar{u} = \overrightarrow{PQ}$$

Această operaţie reprezintă acţiunea la dreapta a grupului abelian $(\overrightarrow{X}, +)$ pe mulţimea X.

Teorema 2. *Operaţia definită anterior are următoarele proprietăţi:*

(1) $A + (\bar{u} + \bar{v}) = (A + \bar{u}) + \bar{v}, \ \forall A \in X, \ \bar{u}, \bar{v} \in \overrightarrow{X}$
(2) $A + \bar{0} = A, \ \forall A \in X$
(3) $\forall A, B \in X, \ \exists! \bar{v} \in \overrightarrow{X}$ *a.î.* $B = A + \bar{v}$.

Observaţia 5. Observăm că putem defini un spaţiu afin ca un triplet $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$, cu $+ : X \times \overrightarrow{X} \to X$o lege de compoziţie ce satisface proprietăţile (1),(2),(3) din teorema anterioară. Atunci, considerăm $\Phi : X \times X \to \overrightarrow{X}$, definită prin $\Phi(A, B) = \bar{u}$ unic determinat de condiţia $A + \bar{u} = B$. Se verifică faptul ca Φ este o structură afină pe X.

2.5. **Combinaţii afine de puncte.** Considerăm în cele ce urmează $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un spaţiu afin peste $\mathbb{K}$.

Definiţia 3. Se numeşte **combinaţie afină** de puncte o expresie de tipul

$$\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \cdots \alpha^n A_n, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha^i = 1, \ \alpha^i \in \mathbb{K}, \ \forall i \in \overline{1, n}.$$

Observaţia 6. Condiţia $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i = 1$ este importantă pentru ca expresia $\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \cdots \alpha^n A_n$ să nu depindă de spaţiul liniar $T_P X$ în care s-a definit.

Demonstraţie. Ne propunem să demonstrăm că dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i = 1$ punctul $M = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \cdots \alpha^n A_n, \ M \in X$ nu depinde de alegerea punctului $P \in X$ în care este definit spaţiul tangent.
Pentru combinaţia afină definită anterior avem următoarea relaţie:

$$\overrightarrow{PM} = \alpha^1 \overrightarrow{PA_1} + \cdots \alpha^n \overrightarrow{PA_n} \tag{1}$$

Fie $P' \in X$ atunci:

$$\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overrightarrow{P'P} + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i (\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overrightarrow{P'A_i}. \tag{2}$$

Din relaţia precedentă se observă independenţa de spaţiul în care s-a definit această combinaţie. □

2.5.1. *O definiţie echivalentă pentru baricentrul unui sistem de puncte.*

Definiţia 4. Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un spaţiu afin peste câmpul $\mathbb{K}$, $S = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset X$ şi $\alpha^1, \ \alpha^2, \cdots, \ \alpha^n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 1$. Se numeşte **baricentrul sistemului** S, cu ponderile $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^n$, unicul punct $P \in X$ care satisface

$$\overrightarrow{MP} = \alpha^1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha^n \overrightarrow{MA_n}, \ \forall M \in X \tag{3}$$

Definiţia 5. Fie mulţimea nevidă $M \subset X$. **Înfăşurătoarea afină** a lui M este mulţimea tuturor combinaţiilor afine finite de puncte din M:

$$\langle M \rangle_{af} = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha^i P_i, | P_i \in M, \alpha^i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{m} \alpha^i = 1, \ m \in \mathbb{N}\}.$$

2.6. **Dependenţă şi independenţă afină.**

Definiţia 6.
- Un sistem de puncte $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ se numeşte **afin dependent** daca $\exists i \in \mathbb{N}$ astfel încat P_i să fie baricentrul cu anumite ponderi ale celorlalte puncte din sistem.
- Un sistem finit de puncte se numeşte **afin independent** dacă conţine un singur punct sau dacă nu este afin dependent .
- O mulţime infinită de puncte $S \subset X$ se numeşte afin independentă dacă orice sistem finit de puncte ale sale este afin independent.

Teorema 3. *Sistemul de puncte $\{P_1, \cdots, P_n\}$ este afin dependent (respectiv afin independent) dacă şi numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}, \cdots \overrightarrow{P_1P_n}\}$ este liniar dependent (liniar independent)*

Observaţia 7. În acest caz sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_iP_1}, \overrightarrow{P_iP_2}, \overrightarrow{P_iP_3}, \cdots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iP_n}\}$ este liniar dependent (liniar independent), $\forall i \in \overline{2, n}$.

Observaţia 8.
- Orice două puncte afin independente sunt distincte. Numim segment un sistem de doua puncte afin independente.
- Trei puncte sunt afin independente dacă şi numai dacă sunt necoliniare. Un sistem de trei puncte afin independente se numeşte triunghi. De asemenea patru puncte sunt afin independente dacă şi numai dacă sunt necoplanare. Ele formează un tetraedru.

2.7. **Repere afine.**

Definiţia 7. Presupunem că $dim\mathcal{A} = n$. Se numeşte **reper afin** un sistem de $n+1$ puncte afin independente $\mathcal{R}_a = \{A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset X$.

Teorema 4. *Dacă $\mathcal{R}_a = \{A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ este un reper afin în $\mathcal{A}^n$, atunci oricărui punct $P \in X$ i se asociază în mod unic scalarii $\alpha^i \in \mathbb{K},\ i \in \overline{0, n}$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^i = 1$ astfel încât $P = \alpha^0 A_0 + \alpha^1 A_1 + \cdots \alpha^n A_n$.*

Definiţia 8. Numerele $\alpha^i \in \mathbb{K},\ i \in \overline{1, n}$ se numesc coordonatele baricentrice (sau afine) ale lui P în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a$.

2.8. **Trecerea de la coordonate afine la coordonate carteziene.** Observăm că dat un reper afin $\mathcal{R}_a = \{A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset X$, îi putem asocia un reper cartezian definit prin $\mathcal{R}_c = \{A_0; \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ cu $\bar{e}_i = \overrightarrow{A_0A_i},\ i = \overline{1, n}$, adică o mulţime formată dintr-un punct fixat A_0 numit origine şi o bază $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ în $\overrightarrow{X}$. Presupunem că $P = \alpha^0 A_0 + \alpha^1 A_1 + \cdots \alpha^n A_n$.
Vectorializând relaţia precedentă în A_0 obţinem:

$$\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \bar{e}_i,$$

deci punctul P are coordonate carteziene $\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^n$.

Observaţia 9. Reperului afin $\mathcal{R}_a$ îi putem asocia $n+1$ repere carteziene diferite. În funcţie de alegerea originii A_i şi coordonatele lui P vor fi diferite în raport cu reperul cartezian.

2.9. **Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate afine.** Reciproc, presupunem că se dă un reper cartezian $\mathcal{R}_c = \{O, \bar{f}_1, \cdots \bar{f}_n\}$ în $\mathcal{A}^n$ şi fie punctul P de coordonate carteziene $\beta^1, \beta^2, \cdots \beta^n$ în raport cu reperul $\mathcal{R}_c$.

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \beta^i \bar{f}_i.$$

Definim un reper afin astfel:
Considerăm punctele

$$Q_i = O + \bar{f}_i \Leftrightarrow \bar{f}_i = \overrightarrow{OO_i},\ i = \overline{1, n}.$$

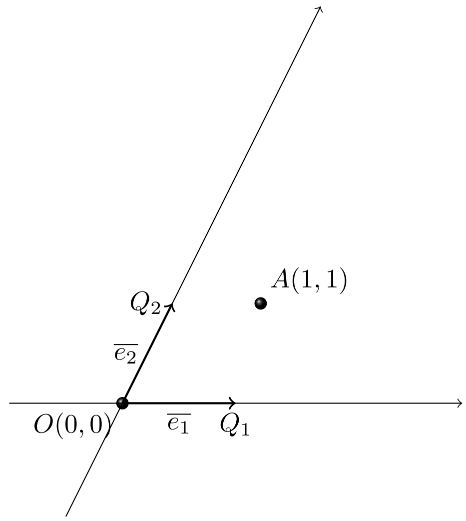
Atunci $\mathcal{R}_a = \{O, Q_1, \cdots, Q_n\}$ este un reper afin al lui $\mathcal{A}$. Observăm că

$$\overrightarrow{OP} = \left(1 - \sum_{i-1}^{n} \beta^i\right) \overrightarrow{OO} + \sum_{i=1}^{n} \beta^i \overrightarrow{OQ_i} \Leftrightarrow P = \left(1 - \sum_{i-1}^{n} \beta^i\right) O + \beta^1 Q_1 + \cdots + \beta^n Q_n.$$

Deci punctul P are coordonatele baricentrice: $1 - \sum\limits_{i-1}^{n} \beta^i,\ \beta^1, \cdots, \beta^n$.

2.10. **Exemple.**

2.10.1. *Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate afine.*



Fie $\mathcal{R}_c = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ un reper cartezian şi punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$. Ne propunem să găsim coordonatele afine ale punctelor A şi B în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = \{O, Q_1, Q_2\}$, unde punctele Q_1 şi Q_2 le găsim aplicând vectorii reperului cartezian în originea reperului, adică:

$$O + \bar{e}_1 = Q_1 \Leftrightarrow \bar{e}_1 = \overrightarrow{OQ_1} \tag{4}$$

$$O + \bar{e}_2 = Q_2 \Leftrightarrow \bar{e}_2 = \overrightarrow{OQ_2} \tag{5}$$

Obţinem $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OO}$, deci $A(-1,1,1)$ în reperul afin $\mathcal{R}_a$ ales.
Dorim să facem acelaşi lucru şi pentru punctul $B(2,3)$.
Ne propunem să găsim coordonatele afine ale punctului B în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = \{O, Q_1, Q_2\}$ unde Q_1 şi Q_2 se obţin din relaţiile (4) şi (5). Obţinem

$$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OQ_1} + 3\overrightarrow{OQ_2} - 4\overrightarrow{OO} = -4\overrightarrow{OO} + 2\overrightarrow{OQ_1} + 3\overrightarrow{OQ_2},$$

deci B are coordonatele afine $B(-4,2,3)$.

2.10.2. *Trecerea de la coordonate afine la coordonate carteziene.* Vom lucra cu cele două exemple prezentate anterior. Considerăm punctul A de coordonate afine $A(-1,1,1)$ în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = \{O, Q_1, Q_2\}$. Ne propunem să determinăm coordonatele carteziene ale acestui punct în raport cu un reper $\mathcal{R}_c$ pe care îl vom construi după cum urmează: Dacă $A = -O + Q_1 + Q_2$ vom vectorializa în cele trei puncte diferite ale reperului afin şi vom obţine trei repere carteziene diferite prezentate în cele ce urmează:

(1) Dacă vectorializăm $A = -O + Q_1 + Q_2$ în O vom obţinem $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}$, deci $A(1,1)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{O, \overrightarrow{OQ_1}, \overrightarrow{OQ_2}\}$.
(2) Dacă vectorializăm $A = -O + Q_1 + Q_2$ în Q_1 vom obţine $\overrightarrow{Q_1A} = -\overrightarrow{Q_1O} + \overrightarrow{Q_1Q_2}$, deci $A(-1,1)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{Q_1, \overrightarrow{Q_1O}, \overrightarrow{Q_1Q_2}\}$.
(3) Dacă vectorializăm $A = -O + Q_1 + Q_2$ în Q_2 vom obţine $\overrightarrow{Q_2A} = -\overrightarrow{Q_2O} + \overrightarrow{Q_2Q_1}$, deci $A(-1,1)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{Q_2, \overrightarrow{Q_2O}, \overrightarrow{Q_2Q_1}\}$.

Dorim să găsim coordonatele carteziene ale punctului B de coordonate afine $B(-4,2,3)$. Dacă $A = -4O + 2Q_1 + 3Q_2$ vom vectorializa în cele trei puncte diferite ale reperului afin şi vom obţine trei repere carteziene diferite prezentate în cele ce urmează:

(1) Dacă vectorializăm $B = -4O + 2Q_1 + 3Q_2$ în O vom obţinem $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OQ_1} + 3\overrightarrow{OQ_2}$, deci $B(2,3)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{O, \overrightarrow{OQ_1}, \overrightarrow{OQ_2}\}$.
(2) Dacă vectorializăm $B = -4O + 2Q_1 + 3Q_2$ în Q_1 vom obţine $\overrightarrow{Q_1B} = -4\overrightarrow{Q_1O} + 3\overrightarrow{Q_1Q_2}$, deci $B(-4,3)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{Q_1, \overrightarrow{Q_1O}, \overrightarrow{Q_1Q_2}\}$.
(3) Dacă vectorializăm $B = -4O + 2Q_1 + 3Q_2$ în Q_2 vom obţine $\overrightarrow{Q_2B} = -4\overrightarrow{Q_2O} + 2\overrightarrow{Q_2Q_1}$, deci $B(-4,2)$ în reperul cartezian $\mathcal{R}_c = \{Q_2, \overrightarrow{Q_2O}, \overrightarrow{Q_2Q_1}\}$.

3. Teoreme importante

3.0.1. *Calcul baricentric. Raportul simplu.*

Definiţia 9. Fie $\mathcal{A} = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un spaţiu afin real şi $A,\ B,\ C \in X$ trei puncte coliniare distincte. Se numeşte raportul simplu al punctelor $A,\ B,\ C$ unicul scalar notat $\lambda = (A, B; C),\ \lambda \neq -1, 0$ pentru care:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Observaţia 10. Următoarele condiţii sunt echivalente:

(1) $(A, B; C) = \lambda$
(2) $(A, C; B) = -(1 + \lambda)$
(3) $(B, A; C) = \frac{1}{\lambda}$
(4) $(B, C; A) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$
(5) $(C, A; B) = -\frac{1}{1+\lambda}$
(6) $(C, B; A) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$

Observaţia 11. Dacă $(A, B : C) = \lambda \Rightarrow C = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B$.

3.0.2. *Exprimarea în coordonate afine a teoremei lui Menelaus.*

Teorema 5. *Fie $\mathcal{A}_2 = (X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un $\mathbb{K}-$spaţiu afin de dimensiune 2. Fie $A,\ B,\ C \in X$ puncte afin independente şi $A',\ B',\ C' \in X$ astfel încât:*

$$(B, C; A') = \lambda_1,\ (C, A; B') = \lambda_2,\ (A, B; C') = \lambda_3;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^* - \{-1\}.$$

Atunci $A',\ B',\ C'$ sunt afin dependente dacă şi numai dacă

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1.$$

În continuare vom determina coordonatele afine ale punctelor importante în triunghi în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$.

4. Centrul de greutate al unui triunghi

Definiţia 10. Punctul de concurenţă al medianelor unui triunghi ABC se numeşte **centrul de greutate** al triunghiului ABC şi se notează cu G.

Exerciţiul 1. Să se determine coordonatele baricentrice ale centrului de greutate al triunghiului ABC.

Vom considera $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$. Dorim să găsim $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ cu $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ astfel încât:

$$G = \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C.$$

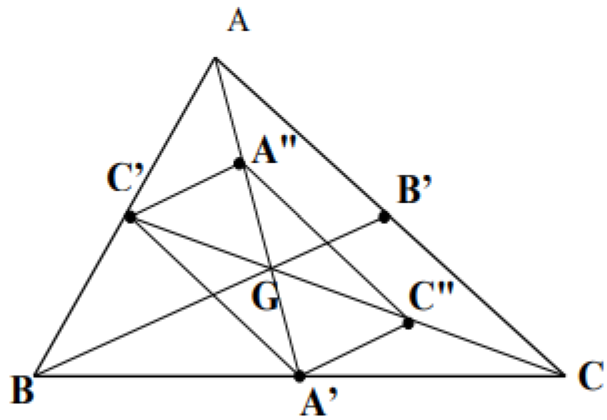
Pentru început dorim să reamintim demonatraţia următoarei proprietăţi a centrului de greutate al unui triunghi:

Propoziţia 2. *Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la o treime de mijlocul laturii şi la două treimi de vârf.*

Observaţia 12. Concurenţa medianelor într-un triunghi este un rezultat care poate fi demonstrat cu uşurinţă utilizând o serie de aspecte legate de liniile mijlocii ale unui triunghi. Odată cu demonstrarea concurenţei medianelor, notăm nunctul de intersecţie al acestora cu G.

Demonstraţie. Fie A', B', C' mijloacele laturilor [BC], [AC], [AB] ale triunghiului ABC. Vom demonstra ca punctul G aparţine şi medianei $[BB']$. Mijloacele segmentelor $[AG]$, $[CG]$ vor fi notate cu A'' respectiv C''

$$AA'' = A''G,\ CC'' = C''G$$



Obţinem $[A''C'']$ linie mijlocie în triunghiul GAC, ceea ce implică:

$$A''C'' \parallel AC,\ A''C'' = \frac{1}{2}AC \tag{6}$$

Analog $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul BAC şi se obţine:

$$A'C' \parallel AC,\ A'C' = \frac{1}{2}AC \tag{7}$$

Din (7) şi (6), folosind tranzitivitatea relatţiei de paralelism şi a celei de egalitate, rezultă:

$$A'C' \parallel A''C'',\ A'C' = A''C'', \tag{8}$$

deci patrulaterul $A'C'A''C''$ este un paralelogram, cu G punctul de intersecţie al diagonalelor, ceea ce implică:

$$A'G = GA'',\ C'G = GC''. \tag{9}$$

Cum

$$AA'' = A''G,\ CC'' = C''G, \tag{10}$$

rezultă:

$$GA' = \frac{1}{3}AA',\ GC' = \frac{1}{3}CC'.$$

Analog se consideră $AA' \cap BB' = \{G'\}$ şi se demonstrează că $\frac{G'A'}{G'A} = \frac{1}{2}$. Deoarece $G,\ G' \in (AA') \to G = G'$, deci medianele sunt concurente în G. $\square$

Utilizând cele demonstrate anterior putem concluziona că centrul de greutate al triunghiului ABC împarte fiecare mediană în următorul raport simplu:

$$(A, A'; G) = (B'B'; G) = (C, C'; G) = 2 \tag{11}$$

Din (11) obţinem

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A' \tag{12}$$

Dar A' este mijlocul segmentului $[BC]$, deci $A' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. În final obţinem:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C, \tag{13}$$

deci G are coordonatele baricentrice $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ în raport cu $\mathcal{R}_a$.

5. Centrul cercului înscris în triunghi

Definiţia 11. Se numeşte centrul cercului înscris în triunghi punctul de intersecţie al bisectoarelor interioare ale triunghiului. Acest punct se va nota în continuare cu I.

Propoziţia 3. *Bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Notăm $[AA'$ şi $[BB'$ bisectoarele unghiurilor BAC şi ABC ale triunghilui ABC şi I punctul lor de intersecţie. Aceste bisectoare sunt concurente, altfel ar fi paralele ceea ce ar însemna ca unghiurile BAA' şi ABB' ar fi unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei AB, iar suma măsurilor lor ar fi de 180 grade , ceea ce este imposibil căci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este 180 grade.

Folosind proprietatea ca numai punctele de pe bisectoare sunt egal depărtate de laturile triunghiului putem scrie:

(14) $$IM = IN \text{ şi } IN = IP,\ M \in (AB),\ N \in (BC),\ P \in (AC), IM \perp AB, IN \perp BC, IP \perp AC.$$

Folosind proprietatea de tranzitivitatea a egalităţii numerelor reale, rezultă

$$IN = IM$$

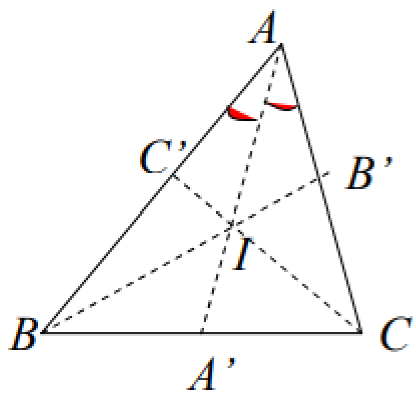
deci punctul I se afla şi pe bisectoarea unghiului ACB. □

Teorema 6. *[Teorema Bisectoarei] Fie un triunghi ABC şi D un punct pe segmentul BC. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) Semidreapta $[AD$ este bisectoarea interioară unghiului BAC.
(2) Avem relaţia:

(15) $$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Conform teoremei bisectoarei avem în triunghiul ABC următoarele seturi de relaţii.



(16) $$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b},\ \frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c},\ \frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a},$$

unde $A',\ B',\ C'$ reprezintă intersecţia dintre bisectoare şi latura opusă, iar $AB = c,\ BC = a,\ AC = b$.

Exerciţiul 2. Determinaţi coordonatele baricentrice ale centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

Vom considera $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$. Dorim să găsim $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ astfel încât:

$$I = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C.$$

Metoda I-utilizăm teorema bisectoarei
Ne concentrăm atenţia asupra raportului segmentelor $\frac{IA}{IA'}$.
Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul ABA' şi obţinem:

(17) $$\frac{IA}{IA'} = \frac{BA}{BA'}$$

Folosim proportii derivate în următoarea relaţie:

(18) $$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{A'B}{A'B + A'C} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \frac{A'B}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow A'B = \frac{ac}{b+c}$$

Din (17) şi (18) obţinem:

(19) $$\frac{IA}{IA'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

Din (19) obţinem:

(20) $$(A, A'; I) = \frac{b+c}{a},\ (B, C; A') = \frac{c}{b}$$

Din (20) obţinem:

$$A' = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C \tag{21}$$

şi

$$I = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}A + \frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}}A' = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b+c}{a+b+c}A' \tag{22}$$

În concluzie din (22) şi (21) am obţinut:

$$I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C,$$

deci

$$\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c},\ \alpha_2 = \frac{b}{a+b+c},\ \alpha_3 = \frac{c}{a+b+c}, \tag{23}$$

Astfel I are coordonatele baricentrice $I\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$ în raport cu $\mathcal{R}$

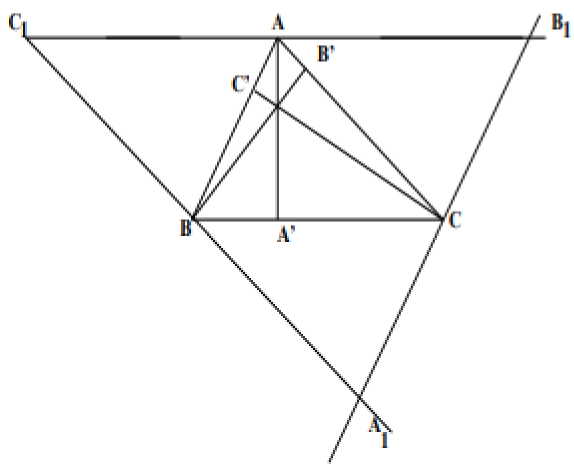
Metoda II-aplicăm teorema lui Menelaus Putem aplica teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'C$ şi transversalei $B-I-B'$ pentru a obţine a doua parte a demonstraţiei precedente. Vom exemplifica această metodă pentru determinarea coordonatelor afine ale ortocentrului unui triunghi.

6. Ortocentrul unui triunghi

Definiţia 12. Punctul de intersecţie al înălţimilor unui triunghi se numeşte **ortocentru**. Vom nota acest punct cu H.

Propoziţia 4. *Înălţimile unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie. Consideram un triunghi ABC, cu înalţimile $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $(AA' \perp BC, BB' \perp AC, CC' \perp AB)$.



Paralelele prin varfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează în punctele A_1, B_1, C_1. Din congruenţa laturilor opuse ale paralelogramelor obţinute rezultă că punctele A, B, C sunt mijloacele laturilor $[B_1C_1], [C_1A_1], [A_1B_1]$ ale triunghiului. Din $AA' \perp BC$ şi $C_1B_1 \parallel BC$ rezultă $AA' \perp C_1B_1$. Analog pentru celelalte laturi se gaseşte că $BB' \perp C_1A_1$ şi $CC' \perp A_1B_1$. Constatăm că înălţimile triunghiului ABC sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$, deci sunt concurente. □

Exerciţiul 3. Determinaţi coordonatele baricentrice ale ortocentrului triunghiului ABC.

Vom considera $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$. Dorim să găsim $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ cu $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1$ astfel încât:

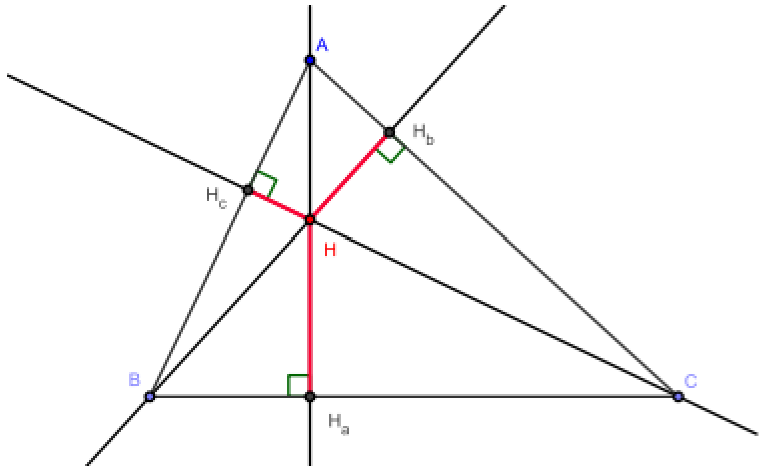
$$H = \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 C.$$

Un prim pas în determinarea coordonatelor baricetrice este demonstrarea următorului rezultat ajutător. Pentru simplitate, vom analiza un triunghi ascuţitunghic şi vom folosi rapoarte de segmente obişnuite.

Propoziţia 5. *Fie H ortocentrul unui triunghi nedreptunghic ABC şi H_a, H_b, H_c picioarele înălţimilor coborâte din vârfurile A, B, C. Sunt satisfăcute egalităţile:*

$$\frac{BH_a}{H_aC} = \frac{tgC}{tgB},\ \frac{CH_b}{H_bA} = \frac{tgA}{tgC},\ \frac{AH_c}{H_cB} = \frac{tgB}{tgA} \tag{24}$$

Demonstraţie.



În triunghiurile dreptunghice BH_aA şi CH_aA avem următoarele relaţii:

(25) $$tgB = \frac{AH_a}{BH_a} \text{ şi } tgC = \frac{AH_a}{CH_a}$$

Din (25) obţinem

$$\frac{BH_a}{H_aC} = \frac{tgC}{tgB}.$$

Similiar, considerăm triunghiurile dreptunghice AH_bB şi CH_bB şi obţinem:

$$\frac{CH_b}{H_bA} = \frac{tgA}{tgC}.$$

În final, scriind formulele pentru tangentă în triunghiurile CH_cA şi CH_cB vom obţine şi ultima egalitate:

$$\frac{AH_c}{H_cB} = \frac{tgB}{tgA}.$$

□

Ca şi în cazul punctelor studiate anterior dorim să găsim o relaţie între ortocentrul şi extremităţile unei înălţimi pe care este situat H. Utilizăm teorema lui Menelaus în triunghiul AH_aC cu transversala $B - H - H_b$.

(26) $$(H_a, C; B) \cdot (C, A; H_b) \cdot (A, H_a; H) = -1$$

În (26) avem:

(27) $$(H_a, C; B) = -\frac{tgC}{tgB + tgC} \text{ şi } (C, A; H_b) = \frac{tgA}{tgC}$$

Obţinem din cele de mai sus următorul raport simplu:

(28) $$(A, H_a; H) = \frac{tgB + tgC}{tgA}$$

şi

(29) $$(B, C; H_a) = \frac{tgC}{tgB}$$

Din (28) obţinem:

(30) $$H_a = \frac{1}{1 + \frac{tgC}{tgB}} B + \frac{\frac{tgC}{tgB}}{1 + \frac{tgC}{tgB}} C = \frac{tgB}{tgB + tgC} B + \frac{tgC}{tgB + tgC} C$$

şi

(31) $$H = \frac{1}{1 + \frac{tgB+tgC}{tgA}} A + \frac{\frac{tgB+tgC}{tgA}}{1 + \frac{tgB+tgC}{tgA}} H_a = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC} A + \frac{tgB + tgC}{tgA + tgB + tgA} H_a$$

În final:

$$H = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}A + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}B + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}C \tag{32}$$

Am obţinut următoarele coordonate baricentrice pentru ortocentrul unui triunghi:

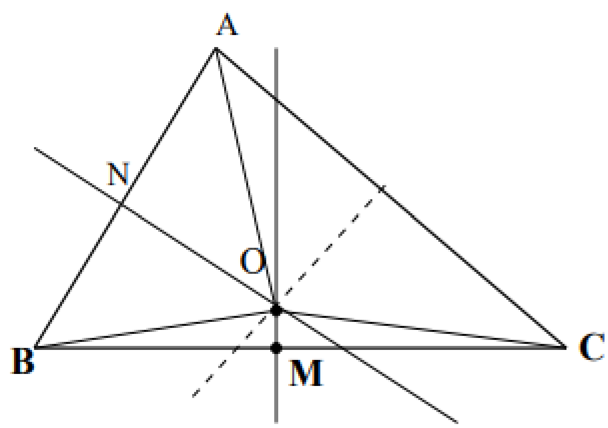
$$H\left(\frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}, \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}, \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}\right).$$

7. Centrul cercului circumscris unui triunghi

Definiţia 13. Punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi ABC se numeşte **centrul cercului circumscris** triunghiului ABC şi se notează cu O.

Propoziţia 6. *Mediatoarele unui triunghi sunt concurente.*

Demonstraţie.



Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AB]$ ale triunghiului ABC. Punctul mediatoarele acestor laturi va fi notat cu O. Cele două mediatoare sunt concurente, altfel punctele A, B, C ar fi coliniare, ceea ce este imposibil. Folosind proprietatea punctelor de pe mediatoare de a fi la egală distanţă faţă de capetele segmentului şi reciproc putem scrie $OA = OB$, ON fiind mediatoarea lui $[AB]$ şi $OB = OC$, OM fiind mediatoarea lui $[BC]$. Rezultă din tranzitivitatea relaţiei de egalitate că $OA = OC$, deci punctul O se afla şi pe mediatoarea laturii $[AC]$. □

Observaţia 13. O altă metodă pentru demonstrarea concurenţei liniilor importante întru-un triunghi este folosirea reciprocei teoremei lui Ceva.

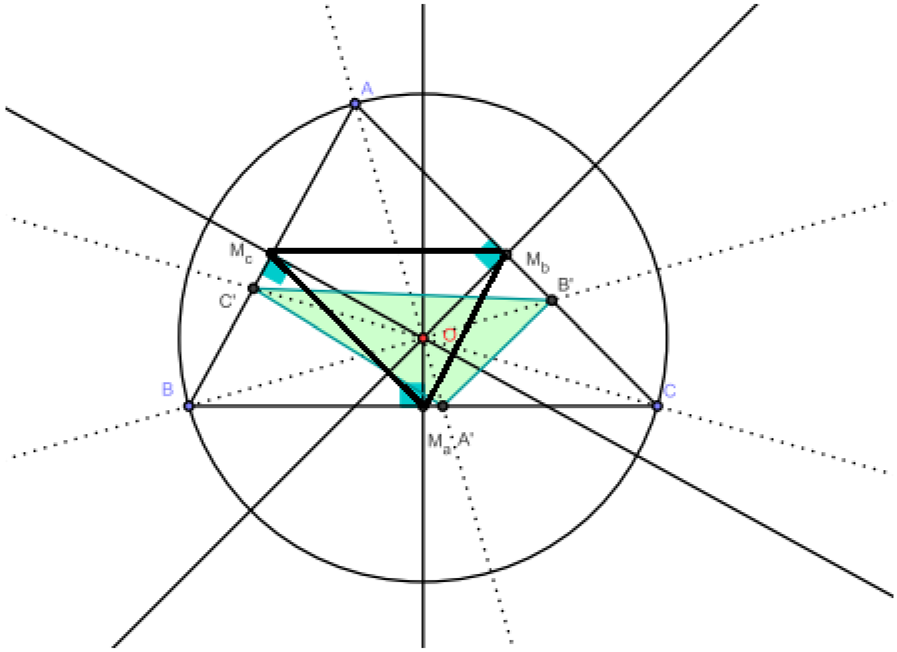
Exerciţiul 4. Determinaţi coordonatele baricentrice ale centrului cercului circumscris unui triunghi.

Vom considera $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$. Dorim să găsim $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$ cu $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1$ astfel încât:

$$O = \eta_1 A + \eta_2 B + \eta_3 C.$$

7.0.1. *Metoda I.* Observăm că mediatoarele nu mai sunt ceviene în triunghiul ABC, deci metoda anterioară nu se mai poate aplica.

Observaţia 14. Centrul cercului cirumscris unui triunghi este ortocentrul triunghiului median.



Din paragraful anterior, putem scrie următoarele coordonate baricentrice pentru centrul cercului circumscris triunghiului ABC, gândit ca ortocentrul triunghiului $M_aM_bM_c$.

$$O = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC}M_a + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC}M_b + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC}M_c \tag{33}$$

În relaţia precedentă vom înlocui pe rând M_a, M_b, M_c ţinând cont de faptul că ele reprezintă mijloacele laturilor triunghiului ABC.

$$M_a = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C,\ M_b = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C,\ M_c = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \tag{34}$$

Din (33) şi (34) obţinem:

$$O = \frac{tgB + tgC}{2(tgA + tgB + tgC)}A + \frac{tgA + tgC}{2(tgA + tgB + tgC)}B + \frac{tgA + tgB}{2(tgA + tgB + tgC)}C \tag{35}$$

Deci centrul cercului circumscriu triunghiului ABC are următoarele coordonate baricentrice:

$$O\left(\frac{tgB + tgC}{2(tgA + tgB + tgC)}, \frac{tgA + tgC}{2(tgA + tgB + tgC)}, \frac{tgA + tgB}{2(tgA + tgB + tgC)}\right). \tag{36}$$

7.0.2. *Metoda II.* Fie $\{A'\} = AO \cap BC$, $\{B'\} = BO \cap AC$, $\{C'\} = CO \cap AB$. Triunghiul $A'B'C'$ se numeşte triunghiul pedal.

Propoziţia 7. *Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci au loc următoarele relaţii:*

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sin 2C}{sin2B},\ \frac{B'C}{B'A} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C},\ \frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A} \tag{37}$$

Demonstraţie. În triunghiul desenat anterior, utilizând faptul că O este centrul cercului circumscris, putem scrie următoarele relaţii:

$$m(\widehat{BAO}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{C}) \tag{38}$$

$$m(\widehat{CAO}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{B}) \tag{39}$$

$$m(\widehat{BCO}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{A}) \tag{40}$$

În continuare vom aplica teorema sinusurilor în triunghiurile ABA' şi ACA'.

$$\frac{A'B}{\sin(BAB')} = \frac{AA'}{\sin B} \Rightarrow \frac{A'B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} = \frac{AA'}{\sin B} \tag{41}$$

$$\frac{A'C}{\sin(CAA')} = \frac{AA'}{\sin C} \Rightarrow \frac{A'C}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = \frac{AA'}{\sin C} \tag{42}$$

Din (41) şi (42) obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sin C}{cosC}\frac{cosB}{\sin B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}. \tag{43}$$

Analog vom considera triunghiurile BAB' şi BCB', aplicăm din nou teorema sinusurilor şi obţinem:

$$\frac{\sin B}{BB'} = \frac{\sin(\widehat{B'BA})}{AB'} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C}\right)}{AB'} = \frac{cosC}{AB'} \tag{44}$$

$$\frac{\sin C}{BB'} = \frac{\sin(\widehat{B'BC})}{B'C} = \frac{\sin(\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A}\right)}{B'C} = \frac{cosA}{A'C} \tag{45}$$

Din (44) şi (45) obţinem:

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C} \tag{46}$$

În final, aplicând aceaşi teoremă şi în triunghiurile BCC' şi ACC' vom obţine şi ultimul set de egalităţi. □

Ne propunem să determinăm raport în care împarte centrul cercului circumscris triunghiului ABC fiecare ceviană a triunghiului pedal. Pentru a obţine acest raport ne vom folosi de următorul rezultat:

Propoziţia 8. *Fie $A'B'C$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci:*

$$(A, A'; O) = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A},\ (B, B'; O) = \frac{\sin 2A + \sin 2C}{\sin 2B}\ (C, C'; O) = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C} \tag{47}$$

Demonstraţie. Vom aplica teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'C$ cu transversala $B - O - B'$ doar pentru prima egalitate, celelalte se demonstrează în aceeaşi manieră.

$$(A', C; B) \cdot (C, A; B') \cdot (A, A', O) = -1, \tag{48}$$

unde $(A', C; B) = -\frac{sin2C}{sin2B+sin2C}$, $(C, A; B') = \frac{sin2A}{sin2C}$. Obţinem din (48) $(A, A'; O) = \frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}$. □

Din cele demonstrate anterior putem conchide:

$$(A, A'; O) = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A} \tag{49}$$

şi

$$(B, C; A') = \frac{\sin 2C}{\sin 2B} \tag{50}$$

De unde:

$$A' = \frac{1}{1 + \frac{\sin 2C}{\sin 2B}}B + \frac{\frac{\sin 2C}{\sin 2B}}{1 + \frac{\sin 2C}{\sin 2B}}C = \frac{\sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C}B + \frac{\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}C \tag{51}$$

şi

$$O = \frac{1}{1 + \frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}}A + \frac{\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}}{1 + \frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}}A' = \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}A + \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}A' \tag{52}$$

În final se obţine:

$$O = \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}A + \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}B + \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}C \tag{53}$$

Deci, coordonatele baricentrice ale centrului cercului circumscris sunt:

$$O\left(\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}\right). \tag{54}$$

Observaţia 15. Observăm că am obţinut două seturi diferite de coordonate baricentrice pentru centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Vom demonstra în cele ce urmează că aceste coordonate sunt egale.

$$\begin{cases} \frac{tgB+tgC}{2(tgA+tgB+tgC)} = \frac{\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C} \\ \frac{tgA+tgC}{2(tgA+tgB+tgC)} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C} \\ \frac{tgA+tgB}{2(tgA+tgB+tgC)} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}. \end{cases} \tag{55}$$

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi următoarele formule de calcul:

Propoziţia 9. *Dacă $A+B+C=\pi$ sunt satisfăcute următoarele identităţi trigonometrice:*

(56)
$$tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC,\ tgA+tgB=\frac{sin(A+B)}{cosAcosB}$$

şi

(57)
$$sin2A+sin2B+sin2C=4sinAsinBsinC,$$

Demonstraţie. Demonstrăm prima relaţie din (56). Pentru aceasta, pornim de la faptul că:

(58)
$$A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$$

Considerăm identitatea:

(59)
$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}$$

Aplicăm formula precedentă în (58) şi obţinem:

(60)
$$\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=\frac{tg\pi-tgC}{1+tg\pi tgC}\Rightarrow\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=-tgC$$

Înmulţim (60) cu $1-tgAtgB$ şi obţinem:

(61)
$$tgA+tgB=-tgC+tgA\cdot tgB\cdot tgC\Rightarrow tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$$

Pentru a demonstra (57) amintim mai întâi următoarele formule trigonometrice:

(62)
$$sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$$

(63)
$$cos(\pi-\theta)=-cos(\theta)$$

(64)
$$sin(2\theta)+sin(2\phi)=2sin(\theta+\phi)cos(\theta-\phi)$$

(65)
$$cos(\theta-\phi)-cos(\theta+\phi)=2sin\theta\sin\phi$$

Folosind cele scrise anterior avem:

(66)
$$sin(2A)+sin(2B)=2sin(A+B)cos(A-B)=2sin(\pi-C)cos(A-B)=2sinCcos(A-B)$$

Deci

(67)
$$sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)=2sinCcos(A-B)+2sinCcosC=2sinC\big(cos(A-B)+cosC\big)$$

Utilizăm din nou faptul că lucrăm cu unghiurile unui triunghi şi obţinem:

(68)
$$sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)=2sinC\big(cos(A-B)+cos(\pi-(A+B))\big)=2sinC\big(cos(A-B)-cos(A+B)\big)$$

Utilizând (65) obţinem:

(69)
$$sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)=4\sin A\sin B\sin C$$

□

Vom demonstra doar prima egalitate din (55):

(70)
$$tgB+tgC=\frac{sin(B+C)}{cosBcosC}=\frac{sin(\pi-A)}{cosBcosC}=\frac{sinA}{cosBcosC}$$

Deci:

(71)
$$\frac{tgB+tgC}{2(tgA+tgB+tgC)}=\frac{sinA}{cosBcosC}\frac{1}{2tgAtgBtgC}=\frac{sinA}{cosBcosC}\frac{cosAcosBcosC}{2sinAsinBsinC}=\frac{2sinAcosA}{4sinAsinBsinC}=\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

Se procedează analog şi pentru celelalte egalităţi. □

Recapitulare

Am obţinut următoarele coordonate baricentrice:

(1) **Centrul de greutate** $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(2) **Centrul cercului înscris în triunghi** $I\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$

(3) **Ortocentrul unui triunghi** $H\left(\frac{tgA}{tgA+tgB+tgC},\frac{tgB}{tgA+tgB+tgC},\frac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\right)$

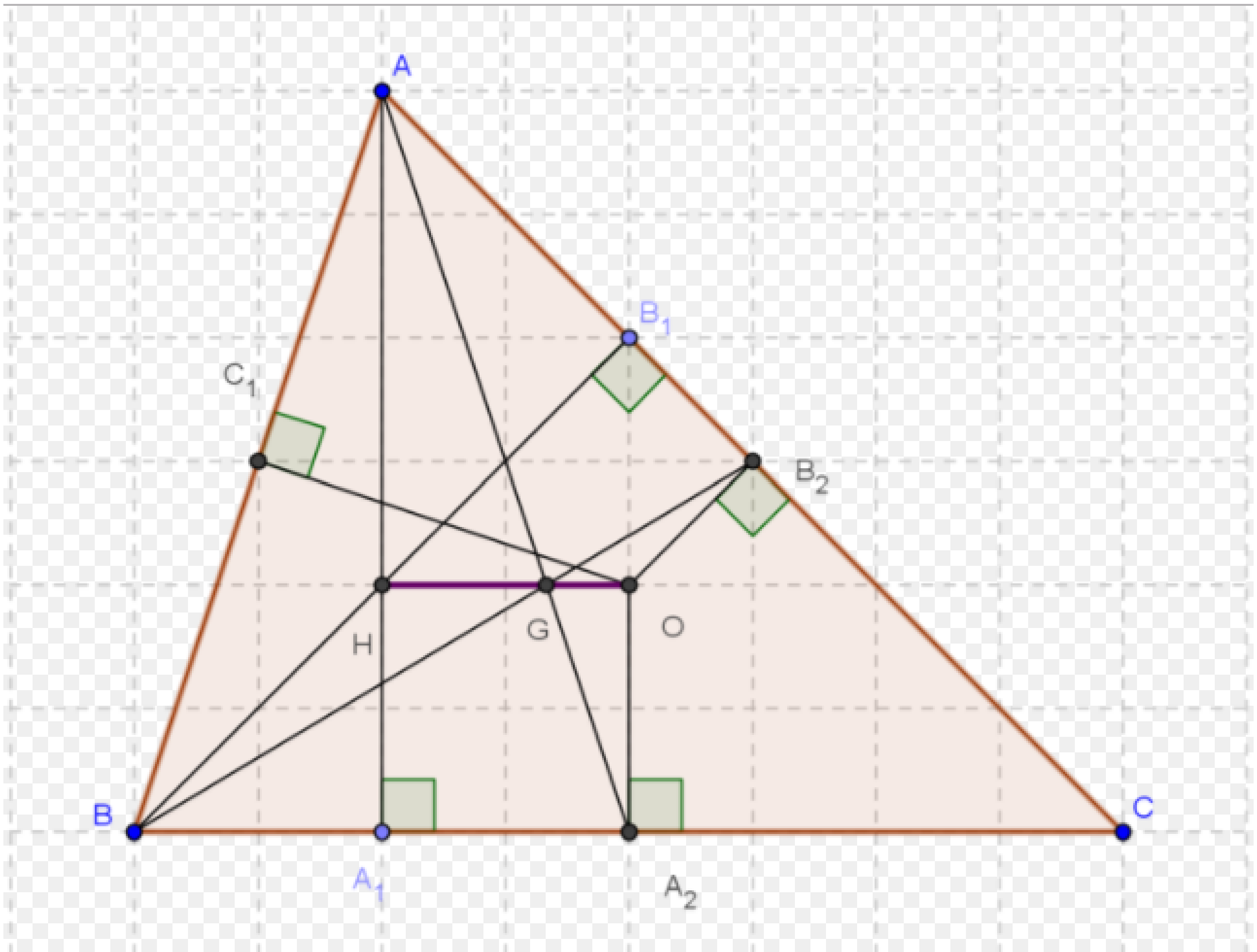
(4) **Centrul cercului circumscris unui triunghi** $O\left(\frac{tgB+tgC}{2(tgA+tgB+tgC)},\frac{tgA+tgC}{2(tgA+tgB+tgC)},\frac{tgA+tgB}{2(tgA+tgB+tgC)}\right)$

8. Dreapta lui Euler

Teorema 7. *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G centrul de greutate şi H ortocentrul triunghiului. Punctele H, G şi O se găsesc pe o dreaptă (dreapta lui Euler) şi satisfac:*

(72) $$(H, O; G) = 2$$

Demonstraţie.



Din calculele precedente am obţinut:

(73) $$G + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

(74) $$H = \frac{1}{tgA + tgB + tgC}\left(tgA \cdot A + tgB \cdot B + tgC \cdot C\right)$$

(75) $$O = \frac{1}{2(tgA + tgB + tgC)}\left[(tgB + tgC) \cdot A + (tgA + tgC) \cdot B + (tgA + tgB) \cdot C\right].$$

Cele trei relaţii prezentate anterior ne conduc către:

(76) $$\overrightarrow{OH} = \overline{r}_H - \overline{r}_O = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

şi

(77) $$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (H, O; G) = 2$$

În concluzie $H,\ O$ şi G sunt coliniare, iar raportul simplu al acestor puncte este $(H, O; G) = 2$ □

Bibliografie

[1] *Bucătaru Ioan* Note de seminar
[2] *Constantinescu Oana* Note de curs şi de seminar
[3] *Oniciuc Cezar* Note de seminar
[4] *Mohorianu Corina, Balmuş Adina* Elemente de geometrie afină şi euclidiană multidimensională, Editura Alexandru Myller, Iaşi, 2016