Proprietăți ale divizorilor și multiplilor comuni a trei sau mai multe numere întregi

Luchian Dorel – Colegiul Național Emil Racoviță Iași

Încă din clasa a V-a programa școlară prevede prezentarea unor noțiuni de divizibilitate în mulțimea N , iar în clasa a VI- a se încheie prezentarea acestui tip de noțiuni cu chestiuni specifice divizibilității în Z. Cei care au doresc să participe la concursuri școlare trebuie să-și actualizeze și să completeze mereu cunostințele în acest domeniu , deoarece problemele ce presupun acest gen de cunoștinte se pot întâlni la orice nivel.

Materialul următor își propune să aducă în atenție , în special, unele propietăți ale c.m.m.d.c și c.m.m.m.c a trei sau mai multe numere.

Conform teoremei fundamentale a aritmeticii , orice număr întreg compus ***n*** se scrie in mod unic (abstracție facând de ordinea factorilor) sub forma $n=\varepsilon\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot...p_k^{x_k}$, $\varepsilon\in\{-1,+1\}$, unde p_i-sunt numere prime distincte în ordine crescătoare și $x_i\in\mathbb{N}$.

Considerând cunoscute definițiile pentru c.m.m.d.c și c.m.m.m.c. a două numere întregi, reamintim că pentru $a=\varepsilon\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot...p_k^{x_k}$ și $b=\varepsilon\cdot p_1^{y_1}\cdot p_2^{y_2}\cdot...p_k^{y_k}$ se calculează

$$(a,b)=\prod_{1\le i\le k} p_i^{\min(x_i,y_i)} \text{ și } [a,b]=\prod_{1\le i\le k} p_i^{\max(x_i,y_i)}.$$

- Se deduce cu ușurință rezultatul $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$.
- Dacă $(a,b)=1$, numerele date se numesc prime între ele.
- Dacă $(a,b)=d$, atunci $a=d\cdot x,\ b=d\cdot y$ cu $(x,y)=1$.
- În mod asemănator se deduc c.m.m.d.c și c.m.m.m.c pentru trei sau mai multe numere întregi.

Următoarele proprietăți conțin rezultate utile pe parcursul expunerii , însă pot constitui un exercițiu util de propus elevilor de clasa a VI-a.

Propoziția 1 Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ și $(a,b)=1$, atunci

1. $(a+b,a-b)\in\{1,2\}$;

2. $(2a+b,a+2b)\in\{1,3\}$;

3. $(a+b,a^2+b^2)\in\{1,2\}$;

4. $(a+b,a\cdot b)=1$;

5. $(a\cdot b,a^2-b^2)=1$.

Rezolvări

1. Dacă $d\mid a+b$ *și* $d\mid a-b$*, rezultă că* $d\mid 2a,\ d\mid 2b$*, deci* $d\mid 2(a,b)\to d\in\{1,2\}$.

3 Dacă $d\mid a+b$ *și* $d\mid a^2+b^2$*, rezultă că* $d\mid a^2-b^2,\ d\mid a^2+b^2$*, deci* $d\mid 2a^2,\ d\mid 2b^2$ $\to d\mid 2(a^2,b^2)$*, adică* $d\in\{1,2\}$.

4 Din $d\mid a+b, d\mid ab$*, rezultă că* $d\mid a^2,\ d\mid b^2$*, deci* $d\mid 1$.

5 Din $d\mid a^2-b^2$ *și* $d\mid ab$*, rezultă că* $d\mid a^3,\ d\mid b^3$*, deci* $d\mid 1$.

De asemenea , două rezultate utile a căror demonstrație se poate realiza cu elevii de clasa aVI-a sunt următoarele:

Propoziția 2 Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$**, atunci** $(a,b)=(a+b,(a,b))$ **și** $(a,b)=(a+b,[a,b])$**.**

Rezolvări

D*acă* $d=(a,b)$*, atunci* $a=dx,\ b=dy$*,* $(x,y)=1$*. În aceste condiții*

$(a+b,(a,b))=(dx+dy,d)=d(x+y,1)=d$ *, iar* $(a+b,[a,b])=(dx+dy,dxy)$

$=d(x+y,xy)=d$ *, deoarece* $(x+y,xy)=1.$

Propoziția 3 Dacă $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ **, atunci**

1. $(a,b,c)=((a,b),c)=(a,(b,c))$ **și** $[a,b,c]=[[a,b],c]=[a,[b,c]]$**(asociativitatea)**

2. $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$**și** $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$ **(distributivitatea)**

3. $(a,[b,c])=\dfrac{(a,b)\cdot(a,c)}{(a,b,c)}$

4. $(a,b,[c,d])=\dfrac{(a,b,c)\cdot(a,b,d)}{(a,b,c,d)}$ **Generalizați !**

5. $[a,b,c]=\dfrac{a\cdot b\cdot c\cdot(a,b,c)}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}$

6. $\dfrac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][a,c]}=\dfrac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$

7. $(a,b,c)=\dfrac{a\cdot b\cdot c\cdot[a,b,c]}{[a,b][b,c][c,a]}$

8. $a\cdot b\cdot c=(a,b,c)\cdot[a\cdot b,b\cdot c,c\cdot a]$

Rezolvări

1. *Se obțin imediat observând că* $\min(x_i,y_i,z_i)=\min(\min(x_i,y_i),z_i)$ $=\min(x_i,\min(y_i,z_i))$ *și* $\max(x_i,y_i,z_i)=\max(\max(x_i,y_i),z_i)$**.**
2. *Considerând descompunerile canonice în facotir primi ale numerelor a,b,c și presupunând că* $x_i\le y_i\le z_i$**,** *relați**a*** $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$ *se reduce la*

$\min(x_i,\max(y_i,z_i))=\max(\min(x_i,y_i),\min(x_i,z_i))\leftrightarrow\min(x_i,z_i)=\max(x_i,x_i)$,

ceea ce este adevărat. În mod analog se analizează și celelate cazuri și la fel se demonstrează $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$**.**

3.Pentru $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]=\dfrac{(a,b)\cdot(a,c)}{((a,b),(a,c))}=\dfrac{(a,b)\cdot(a,c)}{(a,b,c)}$**.**

4. *Pentru* $(a,b,[c,d])=(a,(b,[c,d]))=(a,[(b,c),(b,d)])=[(a,(b,c)),(a,(b,d))]$

$$=\frac{(a,b,c)\cdot(a,b,d)}{(a,b,c,d)}.$$

5. Pentru $[a,b,c]=[[a,b],c]=\frac{[a,b]\cdot c}{([a,b],c)}=\frac{[a,b]\cdot c}{[(a,c),(b,c)]}=\frac{a\cdot b\cdot c}{(a,b)\cdot[(a,c),(b,c)]}$

$$=\frac{a\cdot b\cdot c((a,b),(a,c))}{(a,b)\cdot(a,c)\cdot(b,c)}=\frac{abc\cdot(a,b,c)}{(a,b)\cdot(a,c)\cdot(b,c)}.$$

6. Pentru $\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][a,c]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$ *pornim de la*

$$[a,b,c]=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot(a,b,c)}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}\to[a,b,c]^2=\frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot(a,b,c)^2}{(a,b)^2\cdot(b,c)^2\cdot(c,a)^2}=\frac{[a,b][b,c][a,c]\cdot(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}.$$

7. Plecând de la $[a,b,c]=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot(a,b,c)}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}\to(a,b,c)=\frac{a\cdot b\cdot c[a,b,c]}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[a,c]}$.

Următoarele exerciții valorifică o parte dintre ideile prezentate

E 1. Dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$ **și** $(a,b)=(a,c)$ **iar** $[a,b]=[a,c]$**, atunci** $b=c$**.**

Din relația $(x,y)\cdot[x,y]=x\cdot y$*, deducem că* $a\cdot c=a\cdot b\to c=b$.

E2. **Dacă** a,b,c **sunt numere impare , atunci** $(a,b,c)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)$.

Fie $d=(a,b,c)$*.Atunci* $a=dx,b=dy,c=dz$, $(x,y,z)=1$*și a,b,c,d,x,y,z sunt numere intregi impare. Atunci* $\left(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}\right)=d\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}\right)$**.***Vom demonstra ca* $\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}\right)=1$. *Fie* $\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+z}{2},\frac{z+x}{2}\right)=\Delta$*.Se obtine usor ca* $\Delta\,|\,(x+y+z)$ *si* $\Delta\left|\frac{x+y}{2}\right.$*, deci* $\Delta\,|\,z$*.Analog se obtin relatiile* $\Delta\,|\,x$ *si* $\Delta\,|\,y$*, deci* $\Delta\,|\,1\to\Delta=1$.

E3. **Determinați numerele naturale *a,b*, care verifică** $a+b=1310$**și** $[a,b]=23100$**.**

Folosind rezultatele anterior demonstrate , din $(a,b)=(a+b,[a,b])=10$*, deducem ca* $a+b=1310$ *si* $a\cdot b=231000$*, deci* $a=210,b=1100$.

E4. Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ **și** $3\cdot[a,b]=a^2-b^2$**, atunci** $a=2b$.

Fie $d=(a,b)$. *Atunci* $a=dx, b=dy$, $[a,b]=dxy$, *unde* $(x,y)=1$.*Relatia devine* $d=\frac{3xy}{x^2-y^2}$.*Dar* $d\in\mathbb{N}$ *și* $(xy, x^2-y^2)=1$, *implică* $x^2-y^2\,|\,3$.*Analzând cazurile , deducem concluzia.*

E5. Dacă m,n sunt numere naturale, atunci $(2^m-1, 2^n-1)=2^{(m,n)}-1$.

Fie $d=(m,n)$ *și* $\Delta=(2^m-1,2^n-1)$. *Atunci* $m=dx, n=dy$, $(x,y)=1$ *si există* $k,t\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $mk-nt=d$. *Folosind relația* $2^m-1=2^{dx}-1=(2^d-1)(...)$, *deducem că* $2^d-1\,|\,2^m-1$ *si* $2^d-1\,|\,2^n-1$, *deci* $2^d-1\,|\,\Delta$. *Vom arăta că și* $\Delta\,|\,2^d-1$.*Din* $\Delta=(2^m-1,2^n-1)$, *rezultă că* $2^m=\Delta p+1$, *deci* $2^{mk}=M_\Delta+1$.*Pe de altă parte* $2^{mk}=2^{d+nt}=2^d(1+M_\Delta)$ *și egalând obținem* $\Delta\,|\,2^d-1$.

E6. Să se determine numerele naturale a,b,c știind că $(a,b,c)=6$, $[a,b,c]=1440$,$a+b+c=234$.

Din $(a,b,c)=6$, *rezultă* $a=6x$, $b=6y, c=6z$ *și* $(x,y,z)=1$. *Inlocuind vom obține* $x+y+z=39$ *și* $6\cdot[x,y,z]=1440\Leftrightarrow[x,y,z]=2^4\cdot3\cdot5$. *Considerând* $x=16t$, $t-impar$, *deducem că* $x=16, y+z=23$, *deducem că* $15\,|\,yz$ *și* $y+z=23$. *Convin y=15, z=8 sau y=20,z=3, deci solutiile sunt (96,90,38) sau (96,120,18) și permutarile lor circulare.*

Bibliografie :

I.Cucurezeanu- Probleme de aritmetică și teoria numerelor, Editura Tehnică , 1976

A.Gică, L Panaitopol- Probleme de aritmetică și teoria numerelor, Idei și metode de rezolvare, Editura Gil, 2006

M.Teleucă ș,.a –Probleme de teoria elementară a numerelor pentru concursurile școlare, Editura MEGA