Metoda reducerii la absurd

Lect. dr. Adriana-Ioana Lefter

Facultatea de Matematică
Universitatea "Al.I. Cuza" Iași

Seminarul informal de Didactica Matematicii
10 noiembrie 2017

Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd (*reductio ad absurdum*)

- este folosită de elevi încă din primele clase de gimnaziu și, la centrele de excelență, chiar din clasele primare
- în ciuda aparentei simplități, permite rezolvarea unor probleme interesante și grele, din ramuri variate ale matematicii (și nu numai)
- este principala metodă de demonstrație în probleme de **unicitate**
- ne poate ajuta să demonstrăm una dintre implicații într-o condiție necesară și suficientă

Presupunem că vrem să demonstrăm propoziția $p \to q$.
A nu se confunda metoda de demonstrație prin reducere la absurd cu demonstrația prin contrapoziție. Ambele sunt demonstrații indirecte, dar:
• **demonstrația prin contrapoziție** se bazează pe echivalența logică $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ și este o demonstrație directă a contrarei reciprocei propoziției respective;
• **demonstrația prin reducere la absurd** se bazează pe echivalența $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \to q)$. Ea urmărește să arate că din propoziția $p \wedge \neg q$ rezultă o contradicție (adică o propoziție de forma $r \wedge \neg r$), ceea ce se poate întâmpla numai dacă propoziția $\neg(p \to q)$ este falsă sau, echivalent, dacă propoziția $p \to q$ este adevărată.

Exemplu

Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că dacă $a \nmid bc$, atunci $a \nmid b$ și $a \nmid c$.

- **Demonstrația prin contrapoziție:**

Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se arate că dacă $a \mid b$ sau $a \mid c$, atunci $a \mid bc$.

Presupunem că $a \mid b$ (celălalt caz se tratează analog).
Prin definiție, există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $b = ma$. Atunci $bc = (ma)c = (mc)a$, deci există $p = mc \in \mathbb{Z}$ astfel încât $bc = pa$. În concluzie, $a \mid bc$.

- **Demonstrația prin reducere la absurd:**

Se dau $a, b, c \in \mathbb{Z}$, cu $a \nmid bc$. Presupunem că $a \mid b$ sau $a \mid c$.

Procedând ca mai sus, obținem $a \mid bc$, ceea ce contrazice ipoteza $a \nmid bc$.
Prin urmare, presupunerea făcută este falsă. În concluzie, $a \nmid b$ și $a \nmid c$.

Se pare că prima demonstrație prin reducere la absurd a fost făcută acum aproximativ 2500 de ani și aparține matematicianului și filosofului grec HIPASSUS, din Școala lui PITAGORA.

Teoremă

Numărul $\sqrt{2}$ este irațional.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ (m, n) = 1$ astfel încât $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m = 2m_1$
$\Rightarrow 2n^2 = 4m_1^2 \Rightarrow n^2 = 2m_1^2 \Rightarrow 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$
Prin urmare, 2 este divizor comun pentru m și n, ceea ce contrazice $(m, n) = 1$.
În concluzie, presupunerea că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ este *falsă*, deci $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Cum recunoaștem o problemă care s-ar putea rezolva prin metoda reducerii la absurd?

- probleme în care ni se cere să demonstrăm că **nu** există obiecte matematice cu anumite proprietăți sau ni se cere să stabilim **dacă** există asemenea obiecte și bănuim că răspunsul este negativ
- probleme în enunțul cărora apare una dintre expresiile "cel mult" sau "cel puțin", în particular, probleme de unicitate

Unicitate - exemple

Presupunem că s-a demonstrat rezultatul:

Teoremă

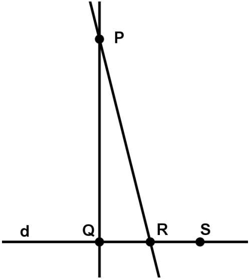
Fie o dreaptă d și un punct $A \notin d$. Atunci există o dreaptă perpendiculară pe d care trece prin punctul A.

Vrem să arătăm că:

Teoremă

Printr-un punct exterior unei drepte există o **singură** *dreaptă perpendiculară pe acea dreaptă.*

DEMONSTRAȚIE. Fie o dreaptă d și un punct $A \notin d$. Presupunem prin reducere la absurd că din P putem duce **două** perpendiculare pe d, PQ și PR, unde $Q, R \in d$, $Q \neq R$.



Fie $S \in d$ astfel încât $R \in (QS)$.
Atunci $\measuredangle PRS$ este unghi exterior triunghiului PQR și, conform teoremei unghiului exterior, $\measuredangle PRS$ are măsura mai mare decât orice unghi al triunghiului PQR neadiacent lui.
În particular, $m(\measuredangle PRS) > m(\measuredangle PQR)$, ceea ce contrazice $m(\measuredangle PRS) = m(\measuredangle PQR) = 90^\circ$.

Problema 1

Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ *ecuația:*

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \cdots + \frac{x+n}{n+1} = n \tag{1}$$

are o soluție unică.

Problema 1

Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuația:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \cdots + \frac{x+n}{n+1} = n \tag{1}$$

are o soluție unică.

SOLUŢIE. Se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației.

Problema 1

Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ecuația:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \cdots + \frac{x+n}{n+1} = n \qquad (1)$$

are o soluție unică.

SOLUŢIE. Se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației. Presupunem prin reducere la absurd ca ecuația admite și o altă soluție $y \neq 1$. Dar dacă $y < 1$, atunci

$$\frac{y+1}{2} + \frac{y+2}{3} + \cdots + \frac{y+n}{n+1} < n,$$

iar dacă $y > 1$, atunci

$$\frac{y+1}{2} + \frac{y+2}{3} + \cdots + \frac{y+n}{n+1} > n,$$

contradicție. Deci $x = 1$ este **unica** soluție a ecuației considerate.

Problema 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $f(a+b) \geq f(a-b)$ *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(a+b) \geq f(a-b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

SOLUŢIE. Evident, funcțiile constante verifică ipotezele problemei.

Problema 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $f(a+b) \geq f(a-b)$ *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$.

SOLUȚIE. Evident, funcțiile constante verifică ipotezele problemei. Presupunem prin reducere la absurd că există o funcție f neconstantă cu proprietatea din enunț. Atunci există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) \neq f(x_2)$ și presupunem fără a micșora generalitatea că $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\begin{cases} a - b = x_1 \\ a + b = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in \mathbb{R} \\ b = \dfrac{x_2 - x_1}{2} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pentru aceste valori ale lui a, b se obține

$$f(a-b) = f(x_1) > f(x_2) = f(a+b),$$

contradicție cu ipoteza.

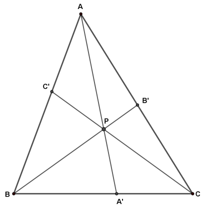
Demonstrarea reciprocei unui rezultat

Teorema lui Ceva

Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente, atunci

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $\{P\} = AA' \cap BB' \cap CC'$.



$$\triangle AA'B,\ C - P - C' : \ \frac{CB}{CA'} \cdot \frac{PA'}{PA} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \tag{3}$$

$$\triangle AA'C,\ B - P - B' : \ \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{PA}{PA'} = 1 \tag{4}$$

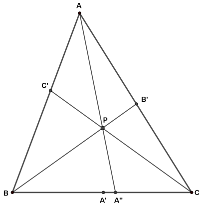
Înmulțim cele două relații.

Reciproca teoremei lui CEVA

Fie ABC un triunghi și punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Dacă

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1, \tag{5}$$

atunci dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.



DEMONSTRAȚIE. Presupunem prin reducere la absurd că dreptele nu sunt concurente. Fie $\{P\} = BB' \cap CC'$și $\{A''\} = PA \cap BC \Rightarrow A'' \neq A'$. Aplicăm teorema lui CEVA pentru $\triangle ABC$ și dreptele concurente AA'', BB', CC' și obținem

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \tag{6}$$

Din relațiile (5) și (6) rezultă $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$.

Deoarece $A', A'' \in (BC)$,

are loc $A' = A''$, ceea ce contrazice $A'' \neq A'$.

Problema 3

Să se rezolve în numere întregi sistemul

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \tag{7}$$

SOLUŢIE. Se observă că $(0,0,0,0)$ este soluție a sistemului. Presupunem prin reducere la absurd că sistemul admite măcar o soluție nebanală. Observăm că dacă (x,y,z,t) este soluție, atunci $(|x|,|y|,|z|,|t|) \neq (0,0,0,0)$ este soluție cu componentele naturale. Dintre toate soluțiile (x,y,z,t) având componentele naturale o alegem pe cea cu suma $x+y+z+t$ minimă.

Adunând ecuațiile din sistem, găsim

$$7(x^2 + y^2) = z^2 + t^2, \tag{8}$$

de unde $7 \mid (z^2 + t^2)$. Din tabelul cu resturi modulo 7 deducem că $7 \mid z$ și $7 \mid t$. Cu alte cuvinte, există $z_1, t_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $z = 7z_1$, $t = 7t_1$. Înlocuind în (8), rezultă că $x^2 + y^2 = 7(z_1^2 + t_1^2)$, deci $7 \mid (x^2 + y^2)$. Prin urmare, $7 \mid x$ și $7 \mid y$, adică există $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 7x_1$, $y = 7y_1$.
Se constată că (x_1, y_1, z_1, t_1) este o nouă soluție nebanală, având componentele naturale, a sistemului inițial. În plus,

$$x_1 + y_1 + z_1 + t_1 < x + y + z + t,$$

ceea ce contrazice minimalitatea alegerii de mai sus.
În concluzie, $(0, 0, 0, 0)$ este singura soluție a sistemului din problemă.

Problema 4

În sistemul solar Tau Cetus se găsește o planetă (sferică) pe care uscatul acoperă mai mult de jumătate din suprafață. Să se arate că locuitorii ar putea - dacă ar dori - să construiască un tunel drept prin centrul planetei, care să aibă ambele capete pe uscat.

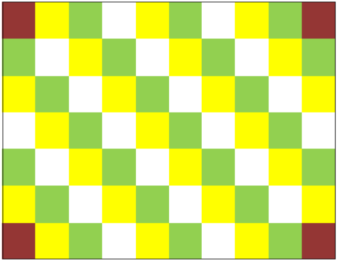
SOLUȚIE. Colorăm cu roșu uscatul și fiecare punct opus unui punct aflat pe uscat cu verde. Dacă am presupune prin reducere la absurd că nu există niciun punct care să fi fost colorat și cu roșu, și cu verde, atunci ar rezulta că cel mult jumătate din suprafața planetei e acoperită de uscat, contradicție cu ipoteza problemei. În concluzie, există măcar un punct colorat cu roșu și verde... și din el ar trebui început tunelul.

(Tot) o problemă de colorare

Problema 5

O cameră dreptunghiulară are dimensiunile 10 m x 7 m. În cele patru colțuri ale camerei se află câte o sobă, fiecare ocupând o suprafață pătrată cu latura de 1 m. Pentru pardosirea camerei se folosesc 22 de plăci dreptunghiulare cu dimensiunile 3 m x 1 m. Este posibil ca toate plăcile să fie folosite fără a fi tăiate?

SOLUŢIE. Împărţim camera în pătrate cu latura de 1 m (70 de pătrate). Colorăm toate pătratele, cu excepția celor ocupate de sobe, cu 3 culori, ca în figură. Colorarea a fost făcută în așa fel încât, oricum poziționăm un dreptunghi 3x1 pe figură, el acoperă exact câte un pătrat din fiecare culoare. Prin urmare, dacă presupunem prin reducere la absurd că putem pardosi încăperea fără a tăia nicio placă, numărul pătratelor colorate cu fiecare culoare trebuie să fie același. Dar figura conține 23 pătrate galbene, 23 verzi și 20 albe, contradicție !



Deci presupunerea făcută este falsă.

Problema 6

La plecarea în vacanță, 9 elevi stabilesc că fiecare dintre ei va trimite câte un mesaj la exact 5 colegi din grup.

a) *Este posibil ca fiecare dintre cei 9 elevi să primească mesaje numai de la acei copii cărora le-a scris un mesaj? Justificați răspunsul.*

b) *Arătați că există cel puțin doi elevi care își trimit mesaje unul altuia.*

Concursul Național de Matematică "Euclid", etapa finală, clasa a II-a

Generalizare

a) *La plecarea în vacanță,* $2k+1$ *elevi stabilesc că fiecare dintre ei va trimite câte un mesaj la exact* $2p+1$ *colegi din grup* $(k, p \in \mathbb{N}^*,\ p < k)$. *Este posibil ca fiecare elev să primească mesaje numai de la acei copii cărora le-a scris un mesaj?*

Generalizare

a) *La plecarea în vacanță, $2k+1$ elevi stabilesc că fiecare dintre ei va trimite câte un mesaj la exact $2p+1$ colegi din grup ($k, p \in \mathbb{N}^*$, $p < k$). Este posibil ca fiecare elev să primească mesaje numai de la acei copii cărora le-a scris un mesaj?*

SOLUȚIE. Răspunsul este nu. Presupunând prin reducere la absurd că fiecare dintre cei $2k+1$ elevi primește mesaje numai de la cei $2p+1$ copii cărora le-a scris, rezultă că putem împărți mesajele în perechi, punând într-o pereche mesajele pe care le schimbă între ei doi copii. Prin urmare, numărul total de mesaje este par. Pe de altă parte, numărul total de mesaje este, evident, $(2k+1)(2p+1)$, adică un număr impar. Contradicția la care am ajuns arată că presupunerea făcută inițial este falsă.

b) *Dacă fiecare dintre cei* $2k+1$ *elevi trimite câte un mesaj la măcar* $k+1$ *colegi, arătați că există cel puțin doi elevi care își trimit mesaje unul altuia.*

b) *Dacă fiecare dintre cei $2k+1$ elevi trimite câte un mesaj la măcar $k+1$ colegi, arătați că există cel puțin doi elevi care își trimit mesaje unul altuia.*

Presupunem prin reducere la absurd că nu există doi elevi care își trimit mesaje unul altuia, adică, mai precis, că oricum am alege o pereche de elevi, între aceștia nu s-au schimbat exact două mesaje. În condițiile problemei, aceasta înseamnă că oricărei perechi de elevi îi corespunde cel mult un mesaj. Prin urmare, numărul total de mesaje poate fi cel mult egal cu numărul de perechi de elevi, adică $(2k+1)2k : 2 = k(2k+1)$. Dar numărul total de mesaje este cel puțin $(k+1)(2k+1)$, iar $(k+1)(2k+1) > k(2k+1)$, contradicție.

Deci presupunerea făcută este falsă. În concluzie, există cel puțin o pereche de elevi care schimbă între ei mesaje.

Problema 7

Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 7

Arătați că $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leq 2-\dfrac{1}{n}$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$.

SOLUŢIE. Pentru $n=1$ relația este adevărată (cu egalitate).

Problema 7

Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE. Pentru $n = 1$ relația este adevărată (cu egalitate). Presupunem prin reducere la absurd că există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care relația este falsă.

Problema 7

Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE. Pentru $n = 1$ relația este adevărată (cu egalitate). Presupunem prin reducere la absurd că există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care relația este falsă. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ cel mai mic număr pentru care relația este falsă.

Problema 7

Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Pentru $n = 1$ relația este adevărată (cu egalitate). Presupunem prin reducere la absurd că există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care relația este falsă. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ cel mai mic număr pentru care relația este falsă. Atunci:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} > 2 - \frac{1}{m} \tag{9}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2} \leq 2 - \frac{1}{m-1}, \tag{10}$$

de unde rezultă că $2 - \frac{1}{m} < 2 - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m^2}$ sau, echivalent, $\frac{1}{m(m-1)} < \frac{1}{m^2}$, contradicție. Deci presupunerea făcută este falsă și, prin urmare, inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Bibliografie (selectivă)

- D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg, *Mathematical circles (Russian experience)*, Universities Press, 2003.
- M. Linț, D. Linț ș.a., *Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de execelență, clasa a V-a*, Editura Paralela 45, Pitești, 2013.
- Liliana Niculescu, *Metoda reducerii la absurd*, Editura GIL, Zalău, 2007.
- L. Niculescu, V. Boskoff, *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1990.
- M. Perianu, *Principiul extremal*, ViitoriOlimpici.ro.
- C. Volf, I.I. Vrabie, *Logică și teoria mulțimilor*, note de curs pentru anul I, Facultatea de Matematică, Universitatea "Al. I. Cuza" din Iași.