Numere prime. O selecţie de probleme pentru gimnaziu

Adrian Zanoschi

Colegiul National "Costache Negruzzi" Iasi

1. **(Clasa a V-a)** *Determinați submulțimea B a mulțimii* $A=\{0,1,2,...,49,50\}$ *, formată din toate elementele lui A care sunt numere prime. Aflați cardinalul mulțimii B.*
(Recunoaşterea numerelor prime mai mici decât 50. Memorarea lor prin repetare. Folosirea noțiunilor de mulțime, submulțime și cardinalul unei mulțimi.)

Soluție. Evident, $B=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$ și $\text{card}(B)=15$.

2. **(Clasa a V-a)** *Stabiliți care dintre următoarele numere naturale este prim:* 103, 203, 435, 1111.
(Învățarea unui algoritm pentru recunoaşterea numerelor prime mai mici, de exemplu, ca 10^5)

Soluție. Deorece

103 împărțit la 2 dă câtul 51 și restul 1,
103 împărțit la 3 dă câtul 34 și restul 1,
103 împărțit la 5 dă câtul 20 și restul 3,
103 împărțit la 7 dă câtul 14 și restul 5,
103 împărțit la 11 dă câtul 9 și restul 4,

iar la ultima împărțire câtul este mai mic decât împărțitorul, rezultă că numărul 103 este prim.
Analog, avem

203 împărțit la 2 dă câtul 101 și restul 1,
203 împărțit la 3 dă câtul 67 și restul 2,
203 împărțit la 5 dă câtul 100 și restul 3,
203 împărțit la 7 dă câtul 29 și restul 0,

deci numărul 203 nu este prim.
Se observă ușor că 5 divide 435 și 11 divide 1111, ceea ce înseamnă că 435 și 1111 nu sunt numere prime.

Observații.

- O altă metodă pentru a determina numerele prime (nu prea mari) este ciurul lui Eratostene.
- Se poate folosi și programul de pe internet cu adresa https://www.wolframalpha.com/

- Cel mai mare număr prim cunoscut până acum este $2^{74\ 207\ 281}-1$, un număr cu 22 338 618 cifre, care a fost găsit în ianuarie 2016 de către Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS).
- Se știe că mulțimea numerelor prime este infintă. Cea mai veche demonstrație cunoscută a acestui rezultat aparține lui Euclid (323-283 î.e.n)

3. **(Clasa a V-a)** *Determinați numerele prime, a, b, c, știind că*

$$a+2b+6c=590.$$

(Singurul divizor mai mare decât 1 al unui număr prim este numărul însuși. Proprietăți ale relației de divizibilitate)

Soluție. Fie a, b, c trei numere prime care verifică relația dată. Cum 590 este divizibil cu 2 și suma $2b+6c$ este, de asemenea, divizibilă cu 2, rezultă că și a este divizibil cu 2, deci $a=2$. Înlocuind pe a cu 2 în egalitatea din enunț, obținem

$$b+3c=294,$$

de unde, având în vedere că 294 și $3c$ se divid cu 3, rezută că b este divizibil cu 3, deci $b=3$. Drept urmare, $c=97$, care este număr prim.

Observație. Ipoteza ca c să fie număr prim nu este necesară. O putem lăsa, totuși, pentru a atrage atenția elevilor că este de preferat ca ipoteza unei probleme să fie minimală.

4. **(Clasa a V-a)** *Determinați toate numerele naturale n pentru care numerele $3n-4, 4n-5$ și $5n-3$ sunt prime.* $[2]$

(Numere prime și paritate)

Soluție. Întrucât suma celor trei numere este $(3n-4)+(4n-5)+(5n-3)=12n-12$, adică un număr par, rezultă că măcar unul dintre termeni este 2 (altfel toate cele trei numere prime ar fi impare și ar avea suma impară). Analizând toate cazurile posibile, obținem soluția $n=2$.

5. **(Clasa a V-a)** *Fie n un număr natural mai mare decât 2. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $2^n-1, 2^n+1$ este număr compus. Există vreo valoare a lui n pentru care ambele numere sunt compuse*?

(Numere compuse. Divizibilitate)

Soluție. Deoarece numerele $2^n-1, 2^n, 2^n+1$ sunt consecutive, înseamnă că unul dintre ele se divide cu 3. Cum 2^n nu se divide cu 3, rezultă că unul dintre numerele $2^n-1, 2^n+1$ se divide cu 3. Dacă n este mai mare decât 2, atunci numerele $2^n-1, 2^n+1$ sunt mai mari decât 3, deci unul dintre ele este compus. Pentru $n=6$, cele două numere sunt 63 și 65, deci ambele sunt compuse.

6. **(Clasa a VI-a)** *Stabiliți care dintre numerele* 1260, 2592 *are mai mulți divizori*.
(Descompunerea numerelor în factori primi. Numărul divizorilor unui număr întreg)

Soluție. Numărul divizorilor întregi pozitivi ai unui număr întreg $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, unde p_j sunt numere prime distincte, iar a_j sunt numere întregi pozitive, este $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$. Descompunând numerele considerate în factori primi obținem $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ și $2592 = 2^5 \cdot 3^4$, deci $\tau(1260) = (2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$ și $\tau(2592) = (5+1)(4+1) = 30$. Numărul 1260 are mai mulți divizori decât 2592.

7. **(Clasa a VI-a)** *Calculați suma divizorilor întregi ai numărului* $a = 2016 \cdot 10^{2016}$.
(Divizorii întregi ai unui număr întreg)

Soluție. Opusul oricărui divizor întreg al numărului *a* este și el divizor al numărului *a* (divizorii întregi ai lui *a* sunt $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \dots$). Suma cerută este egală cu 0.

8. **(Clasa a VI-a)** Determinați numărul $n = \overline{3aa3a}$, știind că este produs de numere prime consecutive. [3]
(Descompunerea unui număr întreg în factori primi. Criterii de divizibilitate)

Soluție. Deoarece suma cifrelor numărului *n* este $3a+6$, deducem că *n* se divide cu 3, deci 3 este unul dintre factorii primi ai lui *n*. De aici, având în vedere că $n > 2 \cdot 3$ și *n* este produs de numere prime consecutive, rezultă că *n* conține factorul 5, deci $a = 0$ sau $a = 5$. Dacă $a = 0$, atunci $n = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, ceea ce arată că 30030 este o soluție a problemei. Dacă $a = 5$, atunci $n = 35535 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 103$, care nu satisface condiția din enunț.

9. **(Clasa a VI-a)** *Să numim un număr natural straniu dacă este mai mare decât* 1 *și, în descompunerea lui în factori primi, fiecare număr prim are exponentul impar. De exemplu,* 22, 23 *și* 24 *formează un grup de trei numere stranii consecutive, deoarece* $22 = 2^1 \cdot 11^1, 23 = 23^1, 24 = 2^3 \cdot 3^1$. *Determinați lungimea celui mai mare grup de numere stranii consecutive.* [4]
(Descompunerea unui număr în facori primi)

Soluție. Observăm că lungimea celui mai mare grup nu poate fi mai mare decât 7, deoarece printre opt numere naturale consecutive există un număr care se divide cu 4, dar nu se divide cu 8 și care, evident, nu este straniu. Întrucât există cel puțin un grup de șapte numere întregi consecutive:

$$29 = 29^1, 30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1, 31 = 31^1, 32 = 2^5, 33 = 3^1 \cdot 11^1, 34 = 2^1 \cdot 17^1, 35 = 5^1 \cdot 7^1,$$

rezultă că lungimea celui mai mare grup de numere stranii consecutive este 7.

10. (Clasa a VI-a) *Fie n un număr natural pentru care* $110n^3$ *are* 110 *divizori naturali. Aflați câți divizori naturali are numărul* $81n^4$. [1]

(Numărul divizorilor naturali ai unui număr întreg)

Soluție. Fie $110n^3 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, unde p_j sunt numere prime distincte, iar a_j sunt numere întregi pozitive. Numărul divizorilor naturali ai numărului $110n^3$ este egal cu

$$\tau\left(110n^3\right) = \left(a_1+1\right)\left(a_2+1\right)\dots\left(a_k+1\right) = 110.$$

De aici, având în vedere că $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$, obținem $k = 3$ și $\{p_1, p_2, p_3\} = \{2, 5, 11\}$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a_1 = 1, a_2 = 4$ și $a_3 = 10$. Astfel, avem

$$n^3 = \frac{p_1 \cdot p_2^4 \cdot p_3^{10}}{110} = p_2^3 \cdot p_3^9, \text{ deci } n = p_2 \cdot p_3^3.$$

Prin urmare, $81n^4 = 3^4 \cdot p_2^4 \cdot p_3^{12}$ și, deoarece 3, p_2 și p_3 sunt numere prime distincte, rezultă că $\tau\left(81n^4\right) = 5 \cdot 5 \cdot 13 = 325.$

11. (Clasa a VII-a) *Determinați toate numerele naturale n pentru care numărul* $n^4 + n^2 + 1$ *este număr prim.*

(Numere prime. Descompunerea polinoamelor în factori)

Soluție. Deoarece $n^4 + n^2 + 1 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2 - n + 1\right)\left(n^2 + n + 1\right)$ și $0 < n^2 - n + 1 < n^2 + n + 1$, rezultă că numărul $n^4 + n^2 + 1$ este prim dacă și numai dacă $n^2 - n + 1 = 1$ și $n^2 + n + 1$ este prim. Așadar, $n = 1$.

12. (Clasa a VII-a) *Fie p un număr natural. Arătați că, dacă p și* $8p^2+1$ *sunt simultan prime, atunci și* $8p^2 - 1$ *este număr prim*. [3]

(Numere prime. Pătratul uni binom**)**

Soluție. Dacă $p = 3$, atunci $8p^2 + 1 = 73$, care este număr prim. Orice număr prim, diferit de 3, este de forma $3k+1$ sau $3k+2$, cu k numar natural nenul. În primul caz, $8p^2+1 = 8(3k+1)^2+1 = 8\left(9k^2+6k+1\right)+1 = 3\left(24k^2+16k+3\right)$, care este număr compus, iar în al doilea caz, $8p^2+1 = 8(3k+2)^2+1 = 8\left(9k^2+12k+4\right)+1 = 3\left(24k^2+32k+11\right)$, care este număr compus. Așadar, p și $8p^2+1$ sunt simultan prime dacă și numai dacă $p = 3$. Pentru $p = 3$, $8p^2 - 1 = 71$, care este număr prim.

13. (Clasa a VII-a) *Determinați toate numerele întregi n pentru care există numerele prime p și q astfel încât*

$$p(p+1)-q(q+2)=n(n+3).$$

[A. Dragomir, L. Dragomir, ONM 2012, lista scurta]

(Numere prime. Relația de divizibilitate în $\mathbb{Z}$. Descompunerea polinoamelor în factori)

Soluție. Fie n un număr cu proprietatea din enunț. Cum $p(p+1)$ și $n(n+3)$ sunt numere pare, rezultă că 2 divide numărul $q(q+2)$, deci $q=2$ (căci q este prim). Astfel, avem:

$p^2+p-8=n^2+3n \Leftrightarrow 4p^2+4p-32=4n^2+12n \Leftrightarrow (2p+1)^2-33=(2n+3)^2-9 \Leftrightarrow$

$(2p+1)^2-(2n+3)^2=24 \Leftrightarrow (2p+2n+4)(2p-2n-2)=24 \Leftrightarrow (p+n+2)(p-n-1)=6$,

de unde obținem $n\in\{-4,-2,-1,1\}$.

14. (Clasa a VII-a) *Fie n un număr întreg mai mare decât* 1. *Demonstrați că există n numere compuse consecutive*.

(Numere compuse. Factorial)

Soluție. Numerele $a_1=(n+1)!+2,\ a_2=(n+1)!+3,...,a_n=(n+1)!+(n+1)$ îndeplinesc condițiile cerute.

15. (Clasa a VII-a) *Opt persoane au vârstele exprimate prin numere prime cu media* 15. *Persoanele care au* 19 *ani sunt cele mai multe dintre cele opt, iar media vârstelor celor două persoane situate la mijloc, în ordinea vârstelor, este* 11. *Determinați vârsta maximă a celei mai bătrâne persoane*.

(Numere prime. Media aritmetică. Logică)

Soluție. Suma vârstelor celor opt persoane este 120, iar suma vârstelor oamenilor din mijloc este 22. Numărul 22 se poate scrie doar în trei moduri ca o sumă de numere prime:

$$22=11+11=1+17=3+19.$$

Cazul I. $22=11+11$.

Deoarece 19 apare mai des ca 11, trebuie ca cele mai în vârstă trei persoane să aibă 19 ani și niciuna din cele mai tinere trei nu poate avea 11 ani. Suma vârstelor celor mai tinere trei persoane este, în acest caz, $120-2\cdot 11-3\cdot 19=41$, dar suma numerelor prime mai mici decât 11 este cel mult $7+7+7=21$. Acest caz este imposibil.

Cazul al II-lea. $22=5+17$.

Vârstele celor patru oameni mai tineri pot fi 2, 3, 5 (ani). Conform principiului cutiei, doi dintre aceștia trebuie să aibă aceeași vârstă, deci cele mai în vârstă trei persoane au câte 19 ani fiecare. Vom avea aceeași contradicție ca la cazul I.

Cazul al III-lea. $22=3+19$.

Cele mai în vârstă trei persoane nu pot avea 19 ani fiecare, deci sunt cel mult trei persoane de 19 ani. Vârstele celor mai tinere patru persoane pot fi 2 sau 3 (ani), deci sunt două de 2 ani și două de 3 ani. Astfel, cea mai în vârstă persoana are $120-2\cdot 2-2\cdot 3-3\cdot 19=53$, care este număr prim.

16. (Clasa a VIII-a) Determinați numerele prime *p* și *q*, știind că ecuația $x^2-px+q=0$ are rădăcini întregi pozitive și distincte. $[1]$

(Numere prime. Relațiile lui Viète)

*Soluție***.** Dacă notăm cu x_1 și x_2, $x_1<x_2$, rădăcinile naturale ale ecuației considerate, atunci $x_1+x_2=p$ și $x_1x_2=q$. Cum *q* este număr prim, rezultă că $x_1=1$ și $x_2=q$, deci $p=1+q$, de unde deducem că $p=3$ și $q=2$.

17. (Clasa a VIII-a) *Fie x, y, z trei numere prime distincte. Arătați că*

$$30(xy+yz+zx)\le 31xyz.$$

(Numere prime. Inegalități)

Soluție. Deoarece inegalitatea de demonstrat este simetrică în *x*, *y*, *z* putem presupune, fără a restrânge genarilitatea, că $x<y<z$. Astfel, ținând cont că *x*, *y*, *z* sunt numere prime, deducem că $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 5$. Avem

$$30(xy+yz+zx)\le 31xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{31}{30}.$$

Ultima inegalitate este adevărată, deoarece $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$.

18. (Clasa a VIII-a) *Fie a, b, c trei numere naturale nenule,* $a\ne c$, *astfel încât* $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$.

Demonstrați că $a^2+b^2+c^2$ *este număr compus***.** $[2]$

(Numere prime. Calcul algebric. Inegalități.)

Soluție. Avem $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\Leftrightarrow ac^2+ab^2=a^2c+b^2c \Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac)=0 \Leftrightarrow b^2=ac$, deci $a^2+b^2+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b)$. Este clar că $0<a+c-b<a+c+b$. Dacă $a+c-b=1$, atunci $a+c+b=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 2b+1=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 2=a^2+c^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow a=b=c=1$, imposibil în condițiile problemei. Așadar, $a+c-b>1$, ceea ce înseamnă că numărul $a^2+b^2+c^2$ este compus.

19. (Clasa a VIII-a) *Rezolvați ecuația* $2^q = 1999 + p^2$, *unde p și q sunt numere prime*. $[2]$

(Numere prime. Relația de congruență)

Soluție. Dacă $q = 3$, atunci $p^2 = 8 - 1999$, imposibil. Deci $q \neq 3$ și atunci $q = 3k + 1$ sau $q = 3k + 2$, unde k este numar natural nenul. Dacă $q = 3k + 1$, atunci $p^2 = 2^q - 1999 \equiv 2 - 4 \equiv 5 \pmod{7}$, ceea ce este fals, iar dacă $q = 3k + 2$, atunci $p^2 = 2^q - 1999 \equiv 4 - 4 \equiv 0 \pmod{7}$, de unde rezultă că $p = 7$, deci $q = 11$.

20. (Clasa a VIII-a) *Fie numerele prime* $n_1 < n_2 < ... < n_{31}$ *astfel încât* $n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{31}^4 = 30n$, *unde n este un număr natural. Arătați că printre cele* 31 *de numere prime considerate există trei numere prime consecutive.* [Baraj OBMJ 2003, V. Berghea]

(Numere prime. Relația de congruență)

Soluție. Fie $S = n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{31}^4$.Dacă $n_1 > 2$, atunci $S \equiv 1 \pmod{2}$, deci $S \neq 30n$. Dacă $n_2 > 3$, atunci $S \equiv 1 \pmod{3}$, deci $S \neq 30n$. Dacă $n_3 > 5$, atunci $S \equiv 1 \pmod{5}$, deci $S \neq 30n$. Prin urmare, $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$, ceea ce înseamnă că printre cele 31 de numere prime considerate există trei numere prime consecutive.

21. (clasa a IX-a sau a X-a) Determinați numerele prime *p* și *q*, știind că $p^q - q^p = p + q$. [GM 9/2014, B. G. Niculescu]

(Numere prime. Relația de congruență. Teorema lui Fermat. Inducție)

Soluție. Fie p și q două numere prime care verifică ecuația dată. Evident $p \neq q$ și $q^p + q = p^q - p \equiv 0 \pmod{p}$. Conform teoremei lui Fermat, avem $q^p \equiv q \pmod{p}$, deci $2q \equiv 0 \pmod{p}$, de unde, având în vedere că p și q sunt numere prime diferite, deducem că $p = 2$.Prin urmare, $2^q = q^2 + q + 2$. Deoarece $2^q > q^2 + q + 2$, pentru orice $q \geq 7$, rezultă că $q \in \{3, 5\}$. Soluția este $p = 2, q = 5$.

Temă. Compuneți câte o problemă folosind ca model următoarele probleme:1, 2, 3, 6, 7, 11, 12.

Bibliografie

1. American Mathematics Competitions
2. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin
3. T. Cohal, *Vă place matematica?*, Editura Moldova, Iași
4. A. Lyu, *Upper Elementary School Mathematics*, Chiu Chang Math. Books & Puzzles Co. Press 2014, Taiwan