Polinomul caracteristic și polinomul minimal al unei matrice

Prezentare de prof. Doru Buzac

Câteva noțiuni teoretice

Definiția 1. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ se numește **valoare proprie** pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$, dacă există un vector nenul $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, astfel încât $AX = \lambda X$.
Un astfel de vector *X* se numește **vector propriu** pentru matricea *A*, corespunzător valorii proprii λ.

Proprietăți. Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$, iar $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ este vectorul propriu corespunzător atunci:
a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, numărul λ^k este valoare proprie pentru matricea A^k, iar *X* este vector propriu pentru A^k;
b) Pentru orice polinom $p \in \mathbb{C}[X]$ numărl $p(\lambda)$ este valoare proprie pentru matricea $p(A)$, iar *X* este vector propriu pentru $p(A)$;
c) Dacă *A* este inversabilă, atunci $\lambda \neq 0$ și numărul $\frac{1}{\lambda}$ este valoare proprie pentru matricea A^{-1}.

Teoremă. Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$, dacă și numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Definiția2. Polinomul $p_A \in \mathbb{C}[X]$, $p_A(X) = \det(XI_n - A)$ se numește polinomul caracteristic al matricei *A*.

Propoziție. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $p_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - .... + (-1)^n \sigma_n$, unde σ_k este suma minorilor diagonali de ordin *k* din matricea *A*.

Deci dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui *A*, atunci din relațiile lui Viete obținem

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr(A), \quad \sigma_2 = \sum_{1 \le i \le i \le n} \lambda_i \lambda_j, \ ...., \quad \sigma_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = \det(A).$$

În particular pentru o matrice de ordinul doi, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avem

$p_A(X) = X^2 - Tr(A) \cdot X + \det(A)$;
Iar pentru o matrice de ordinul trei $A \in M_3(C)$, avem

$$p_A(X) = X^3 - Tr(A)X + Tr(A^*)X^2 - \det(A).$$

Folosindu-ne acum de relațiile lui Viete avem

$$Tr(A^*) = \sum_{1\le i\le j\le n} \lambda_i\lambda_j = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}{2} = \frac{\left(Tr(A)\right)^2 - Tr(A^2)}{2}.$$

Teoremă (*Hamilton-Cayley*). Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $p_A(A) = O_n$, adică orice matrice pătratică este rădăcină a polinomului său caracteristic.

Definiția 3. Spunem că două matrici $A, B \in M_n(K)$, sunt asemenea dacă există o matrice inversabilă $T \in M_n(K)$ astfel încât $A = T^{-1}BT$.

Propoziție. Dacă *A* și *B* sunt două matrice pătratice asemenea atunci au același polinom caracteristic.
Demonstrație:
Deoarece $XI_n - A = XT^{-1}T - T^{-1}BT = T^{-1}\left(XI_n - A\right)T$, atunci rezultă că
$\det\left(XI_n - A\right) = \det\left(XI_n - B\right)$
Definiția 4. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, polinomul monic $m_A \in \mathbb{C}[X]$, de grad minim care admite pe *A* ca rădăcină, se numește **polinomul minimal** al matricei *A*.
Observație. Orice polinom ce admite pe *A* ca rădăcină este divizibil cu m_A.

Exemplu. Fie $A \in M_3(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al lui *A* este

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = \left(X-1\right)^2\left(X+1\right),$$

cu divizorii $1, X-1.X+1, \left(X-1\right)^2, X^2-1, \left(X-1\right)^2\left(X+1\right)$. Polinomul m_A fiind de grad minim, va fi din lista de mai sus a divizorilor lui p_A. Cum $A^2 = I_2$, rezultă că X^2-1 admite pe *A* ca rădăcină, deducem că $m_A(X) = X^2-1$.

Teoremă (Frobenius) Fie *K* un corp de numere și $A \in M_n(K)$. Polinoamele p_A și m_A admit aceiași divizori ireductibili peste *K*.

Aplicații
1. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice oarecare, atunci polinoamele caracteristice asociate matricelor *AB* și *BA* sunt egale.
Demonstrație:
Presupunem mai întâi că $\det(A) \ne 0$. Atunci $BA = A^{-1}\left(AB\right)A$, deci matricele *AB* și *BA* sunt asemenea, ceea ce, conform unei propoziții de mai sus rezultă că au același polinom caracteristic.

Dacă $\det(A) = 0$, luăm un $x \in \mathbb{C}$ care să nu fie valoare proprie pentru $-A$, deci $\det(xI_n + A) \neq 0$. Prin urmare $xI_n + A$ este o matrice inversabilă, ceea ce implică faptul că $\left(xI_n + A\right)B$ și $B\left(xI_n + A\right)$ au același polinom caracteristic, deci $p_{(xI_n+A)B} = p_{B(xI_n+A)}$, relație care are loc pentru o infinitate de valori ale lui *x*, deci are loc pentru $(\forall)x \in \mathbb{C}$. În particular luăm $x = 0$ și obținem concluzia.

2. Pentru orice matrice $A, B \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ au loc relațile:

a) $Tr(AB) = Tr(BA)$;

b) $\det\left(\lambda I_n + AB\right) = \det\left(\lambda I_n + BA\right)$.

Demonstrație:

a) Deoarece $p_{AB} = p_{BA}$ iar coeficienții lui X^{n-1} sunt $Tr(AB)$ și $Tr(BA)$, rezultă concluzia.

b) $\det\left(\lambda I_n + AB\right) = \left(-1\right)^n p_{AB}\left(-\lambda\right) = \left(-1\right)^n p_{BA}\left(-\lambda\right) = \det\left(\lambda I_n + BA\right)$.

3. Fie $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$. Dacă $Tr(A) = Tr(A^2) = Tr(A^3) = ... = Tr(\mathrm{A}^n) = 0$, atunci $A^n = O_n$.

Demonstrație.

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei *A*, atunci $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$ sunt valorile proprii ale matricei A^k. Din condițiile inițiale se obține sistemul

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = 0 \\ .... \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + ... + \lambda_n^n = 0 \end{cases}$$

Arătăm că $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, este singura soluție.

Dacă rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + ... + \lambda_n \cdot 1 = 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \cdot \lambda_2 + ... + \lambda_n \cdot \lambda_n = 0 \\ .... \\ \lambda_1 \cdot \lambda_1^{n-1} + \lambda_2 \cdot \lambda_2^{n-1} + ... + \lambda_n \cdot \lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

rezultă că $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ este soluție a sistemului de ecuații liniare cu determinantul de tip Vandermonde $\Delta = \mathrm{V}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Dacă $\Delta \neq 0$ atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Dacă $\Delta = 0$, atunci $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ nu sunt distincte. Să presupunem că $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sunt distincte cu multiplicitățile $k_1, k_2, ...k_p$ $\left(k_1 + k_2 + ... + k_p = n\right)$.Reținem din sistem primele *p* ecuații:

$$\begin{cases}(k_1\lambda_1)\cdot 1+(k_2\lambda_2)\cdot 1+...+(k_p\lambda_p)\cdot 1=0\\(k_1\lambda_1)\cdot \lambda_1+(k_2\lambda_2)\cdot \lambda_2+...+(k_p\lambda_p)\cdot \lambda_p=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\(k_1\lambda_1)\cdot \lambda_1^{p-1}+(k_2\lambda_2)\cdot \lambda_2^{p-1}+...+(k_p\lambda_p)\cdot \lambda_p^{p-1}=0\end{cases}.$$

Sistemul are determinantul $V(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p)\neq 0$ și soluția $(k_1\lambda_1,k_2\lambda_2,...,k_p\lambda_p)$ care trebuie să fie soluția banală, deci $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_p=0$.
Dacă toate valorile proprii ale lui A sunt nule, atunci polinomul caracteristic este $p_A(X)=X^n$, deci din teorema Hamilton-Cayley rezultă că $A^n=O_n$.

4. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$, o matrice cu proprietatea că $\exists m\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $A^m=O_n$. Atunci $A^n=O_n$.
Demonstrație:
Dacă $m<n$, atunci înmulțind succesiv cu A ajungem la relația $A^n=O_n$.
Dacă $m>n$, atunci conform teoremei Hamilton-Cayley, avem $A^n+a_1A^{n-1}+....a_{n-1}A+a_nI_n=O_n$. Înmulțind relația dată cu A^{m-1}, obținem $a_nA^{m-1}=O_n$, deci $a_n=0$ (lucru care reiese și din $a_n=(-1)^n\det A=0$). Deci relația devine $A^n+a_1A^{n-1}+....a_{n-1}A=O_n$. O înmulțim acum cu A^{m-2} și obținem fie că $A^{m-1}=O_n$, fie că $a_{n-1}=0$. Ambele situații convin, iar in final prin înmulțiri succesive obținem că $A^n=O_n$.
O altă demonstrație mai rapidă se bazează pe polinomul minimal.
Din $A^m=O_n\Rightarrow m_A\,|\,X^m$, deci $m_A=X^p$ și atunci conform teoremei lui Frobenius $p_A=X^n$, adică $A^n=O_n$.
5. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu $Tr(A)>2$. Să se arate că , $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n\neq I_2$.
Demonstrație:
Preupunem prin absurd că $A^n=I_2$ pentru un *n*, deci $A^n-I_2=O_2$ și atunci $m_A\,|\,(X^n-1)$.
Dacă $grad(m_A)=1$, atunci $m_A=X\pm 1$, deci $A\pm I_2=O_2\Rightarrow A=\pm I_2\Rightarrow Tr(A)=\pm 2$, fals.
Dacă , $grad(m_A)=2$ atunci $m_A=p_A\in\mathbb{R}[X]$.Cum X^n-1 are rădăcinile simple $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=\overline{0,n-1}$ și p_A are coeficienți reali, reiese că p_A este produsul a doi factori corespunzând unor rădăcini complexe conjugate:
$p_A(X)=\left(X-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\left(X-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$, deci
$p_A=m_A=X^2-2X\cos\frac{2k\pi}{n}+1$ și cum $p_A=X^2-2Tr(A)X+\det(A)$ ar rezulta că
$Tr(A)=2\cos\frac{2k\pi}{n}\leq 2$, fals. În concluzie $A^n\neq I_2\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

6. Fie $A\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $\exists n\in N^*,\ (n,6)=1$, astfel încât $A^n=I_2$, atunci $A=I_2$.

Demonstrație:

Avem $A\in M_2(\mathbb{Z})\subset M_2(\mathbb{R})$, deci $m_A\in\mathbb{R}[X]$. Din $A^n-I_2=O_2\ \Rightarrow m_A\,|\left(X^n-1\right)$ deci avem iarăși cazurile:

- $grad(m_A)=1$ și atunci $m_A=X\pm1$, dar cum *n* este impar, polinomul X^n-1 are ca singură rădăcină reală , pe 1 și atunci $m_A=X-1$, deci $A=I_2$.
- $grad(m_A)=2$, atunci la fel ca mai sus $p_A=m_A=X^2-2X\cos\frac{2k\pi}{n}+1$. Dar acum avem în plus că $m_A=p_A\in\mathbb{Z}[X]$, de unde rezultă că $\cos\frac{2k\pi}{n}\in\left\{0,-1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$. Cum $\Delta<0$, rezultă că $\cos\frac{2k\pi}{n}=0$ sau $\cos\frac{2k\pi}{n}=\pm\frac{1}{2}$. Folosind iarăși că *n* este impar o să avem că $\cos\frac{2k\pi}{n}\neq0$, iar din $(n,3)=1$ rezultă că $\cos\frac{2k\pi}{n}\neq\pm\frac{1}{2}$. Deci cazul $grad(m_A)=2$ nu este posibil și atunci $A=I_2$.

7. Să se arate că dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$ și $A^3=A+I_n$, atunci $\det(A)>0$.

Demonstrație:

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată de $f(x)=x^3-x-1$, are derivata $f'(x)=3x^2-1$, cu rădăcinile $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Aplicăm șirul lui *Rolle* și obținem

$f(-\infty)<0,\ f(x_1)<0,\ f(x_2)<0,\ f(\infty)>0$. Mai mult, din $f(1)\cdot f(2)<0$, deducem că singura rădăcină reală *a* este în intervalul $(1,2)$. Rezultă că

$m_A\,|\left(X^3-X-1\right)=(X-a)\left(X^2+bX+c\right)$, cu $ac=1$ și $a>0,$ deci $c>0$. Astfel

$m_A=(X-a)^s\left(X^2+bX+c\right)^t$ și conform teoremei lui Frobenius o să avem că

$p_A=(X-a)^u\left(X^2+bX+c\right)^v=(-1)^n\det\left(A-XI_n\right)$ cu $u+2v=n$. Deducem că

$p_A(0)=(-a)^u\cdot c^v=(-1)^n\det(\mathrm{A})$, deci $\det(\mathrm{A})=(-1)^{n+u}a^uc^v=(-1)^{2u+2v}a^uc^v=a^uc^v>0$.

8. Fie matricea $A\in M_n(\mathbb{R})$ cu $A^3=4I_n-3A$. Să se arate că $\det\left(A+I_n\right)=2^n$.

Demonstrație:

$A^3-4I_n+3A=O_n$ și $X^3+3X-4=(X-1)\left(X^2+X+4\right)$ implică

$m_A=(X-1)^s\left(X^2+X+4\right)^t$. Aplicăm teorema lui *Frobenius* și obținem:

$p_A(X)=(X-1)^u\left(X^2+X+4\right)^v=(-1)^n\det\left(A-XI_n\right),\ u+2v=n$.

Deducem $p_A(-1)=(-2)^u4^v=(-1)^n\det\left(A+I_n\right)$, deci

$\det\left(A+I_n\right)=(-1)^{n+u}2^u4^v=(-1)^{2u+2v}2^{u+2v}=2^n$.

9. Considerăm $A\in M_n(\mathbb{R})$ cu $A^3=3A-2I_n$. Să se calculeze $\det\left(A^2+A+I_n\right)$.

Soluție:

$A^3-3A+2I_n=O_n \Rightarrow m_A \mid \left(X^3-3X+2\right)$ și $X^3-3X+2=\left(X-1\right)^2\left(X+2\right)$, deci $m_A=\left(X-1\right)^s\left(X+2\right)^t$ și atunci $p_A=\left(X-1\right)^u\left(X+2\right)^v=\left(-1\right)^n\det\left(A-XI_n\right)$, $u+v=n$. Avem $\det\left(A^2+A+I_n\right)=\det\left(A-\varepsilon I_n\right)\det\left(A-\varepsilon^2 I_n\right)$, unde ε este rădăcina cubică a unității.

Obținem succesiv $p_A\left(\varepsilon\right)=\left(\varepsilon-1\right)^u\left(\varepsilon+2\right)^v=\left(-1\right)^n\det\left(A-\varepsilon I_n\right)$ și

$p_A\left(\varepsilon^2\right)=\left(\varepsilon^2-1\right)^u\left(\varepsilon^2+2\right)^v=\left(-1\right)^n\det\left(A-\varepsilon^2 I_n\right)$.

$p_A\left(\varepsilon\right)p_A\left(\varepsilon^2\right)=\left(\varepsilon-1\right)^u\left(\varepsilon+2\right)^v\left(\varepsilon^2-1\right)^u\left(\varepsilon^2+2\right)^v=\det\left(A^2+A+I_n\right)$, deci

$\det\left(A^2+A+I_n\right)=\left(\varepsilon^3-\varepsilon-\varepsilon^2+1\right)^u\left(\varepsilon^3+2\varepsilon+2\varepsilon^2+4\right)^v=3^u3^v=3^n$.

10. Fie $A,B\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ astfel încât $AB=BA$ și există numerele naturale nenule *m* și *n* astfel încât $A^m=O_2$ și $B^n=O_2$. Să se arate că $AB=O_2$.

Demonstrație:

Este cunoscut faptul că din $A^m=O_2$ rezultă $A^2=O_2$ și analog $B^2=O_2$.

Rezultă că $\left(A+B\right)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4=O_2$, deci $m_{A+B}\mid X^4$.

Dacă $grad\left(m_{A+B}\right)=1\Rightarrow m_{A+B}=X,\Rightarrow A+B=O_2,\ A=-B$, deci $AB=-A^2=O_2$. Dacă $grad\left(m_{A+B}\right)=2$, atunci $m_{A+B}=p_{A+B}=X^2$, deci $\left(A+B\right)^2=O_2$ ceea ce implică $A^2+2AB+B^2=2AB=O_2$, deci $AB=O_2$.

11. Arătați că, dacă matricea $A\in M_2\left(\mathbb{Z}\right)$ satisface $A^4=I_2$, atunci $A^2=I_2$ sau $A^2=-I_2$.

Demonstrație: Din $A^4-I_2=O_2\Rightarrow m_A\mid\left(X-1\right)\left(X+1\right)\left(X^2+1\right)$. Dacă $grad(m_A)=1$, atunci $m_A=X-1,\ A=I_2$, sau $m_A=X+1,\ A=-I_2$, în ambele cazuri $A^2=I_2$.

Dacă $grad(m_A)=2$, atunci $m_A=X^2-1=p_A$, deci $A^2=I_2$, sau $m_A=X^2+1=p_A$, deci $A^2=-I_2$.

12. Fie $A,B\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ și $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că

$\det\left(A+B\right)+\det\left(A+\varepsilon B\right)+....+\det\left(A+\varepsilon^{n-1}B\right)=n\left(\det A+\det B\right)$.

Demonstrație:

Considerăm polinomul $P=\det(A+XB)=\det\left(B\right)X^n+a_1X^{n-1}+...+a_{n-1}X+\det(A)$.

Atunci $P\left(\varepsilon^k\right)=\det\left(B\right)\left(\varepsilon^k\right)^n+a_1\left(\varepsilon^k\right)^{n-1}+...+a_{n-1}\varepsilon^k+\det\left(A\right),\ (\forall)k=\overline{0,n-1}$.

Adunând aceste relații obținem:

$\sum_{k=0}^{n-1}P\left(\varepsilon^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\det\left(A+\varepsilon^kB\right)=n\left(\det A+\det B\right)+a_1\left[1+\varepsilon^{n-1}+\left(\varepsilon^{n-1}\right)^2+..+\left(\varepsilon^{n-1}\right)^{n-1}\right]+$

$a_2\left[1+\varepsilon^{n-2}+\left(\varepsilon^{n-2}\right)^2+...+\left(\varepsilon^{n-2}\right)^{n-1}\right]+...+a_{n-1}\left[1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{n-1}\right]=$

$n\left(\det A+\det B\right)+a_1\dfrac{\varepsilon^{n(n-1)}-1}{\varepsilon^{n-1}-1}+a_2\dfrac{\varepsilon^{n(n-2)}-1}{\varepsilon^{n-2}-1}+...+a_{n-1}\dfrac{\varepsilon^n-1}{\varepsilon-1}=n\left(\det A+\det B\right)$, deoarece

$\varepsilon^n=1$ și $\varepsilon^k\neq 1,\ (\forall)k=\overline{1,n-1}$.

Ca un caz particular la relația de mai sus avem binecunoscuta relație

$\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B)$, pentru $A,B\in M_2(\mathbb{C})$.

13. Fie matricea $A\in M_2(\mathbb{C})$. Să se arate că pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, avem

$\det\left(A^p+I_2\right)=\det^p(A)+tr\left(A^p\right)+1$.

Demonstrație:

Demonstrația acestei probleme cat și pentru următoarele se bazează pe următoarea teoremă.

Teoremă. Fie $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ valorile proprii ale matricei $A\in M_n(\mathbb{C})$ și polinomul $f\in\mathbb{C}[X],\ f=a_0X^k+a_1X^{k-1}+...+a_{k-1}X+a_k$. Atunci valorile proprii ale lui *f(A)* sunt $f(\lambda_1), f(\lambda_2),.., f(\lambda_n)$ și $\det f(A)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)....f(\lambda_n)$.

Revenind la problemă, pentru $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, valorile proprii ale matricei *A* și pentru $f=X^p+1$, avem

$\det\left(A^p+I_2\right)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)=\left(\lambda_1^p+1\right)\left(\lambda_2^p+1\right)=\left(\lambda_1\lambda_2\right)^p+\left(\lambda_1^p+\lambda_2^p\right)+1=\det^p(A)+Tr\left(A^p\right)+1$

14. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det A=d\neq 0$, astfel încât $\det\left(A+dA^*\right)=0$. Să se arate că $\det\left(A-dA^*\right)=4$.

Demonstrație: Dacă $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ sunt valorile proprii ale lui *A*, ipoteza $\det\left(A+dA^*\right)=0$ implică $0=\det\left(A+d^2A^{-1}\right)=\det A^{-1}\det\left(A^2+d^2I_2\right)=\det A^{-1}\cdot\left(\lambda_1^2+d^2\right)\left(\lambda_2^2+d^2\right)$, de unde iese că $\lambda_1=id$ și $\lambda_2=-id$. Pe de altă parte din $d=\lambda_1\lambda_2$ reiese că $d=\lambda_1\lambda_2=id\cdot(-id)=d^2$, deci $d=1,\ \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$. Astfel avem că

$$\det\left(A-dA^*\right)=\det\left(A-d^2A^{-1}\right)=\det A^{-1}\det\left(A^2-d^2I_2\right)=$$
$$=\frac{1}{d}\left(\lambda_1^2-d^2\right)\left(\lambda_2^2-d^2\right)=(-1-1)(-1-1)=4$$

Bibliografie.

[1] Vasile Pop, Dana Heuberger, *Matematică de excelență*, Ed. Paralela 45, 2014

[2] Crăița Doniga, Sorin Țiplea, *Polinomul caracteristic asociat unei matrice*, Ed. Pim

[3] Colecția *Gazeta Matematică*, (Gm 1/2014, Gm 11/2014 etc.)