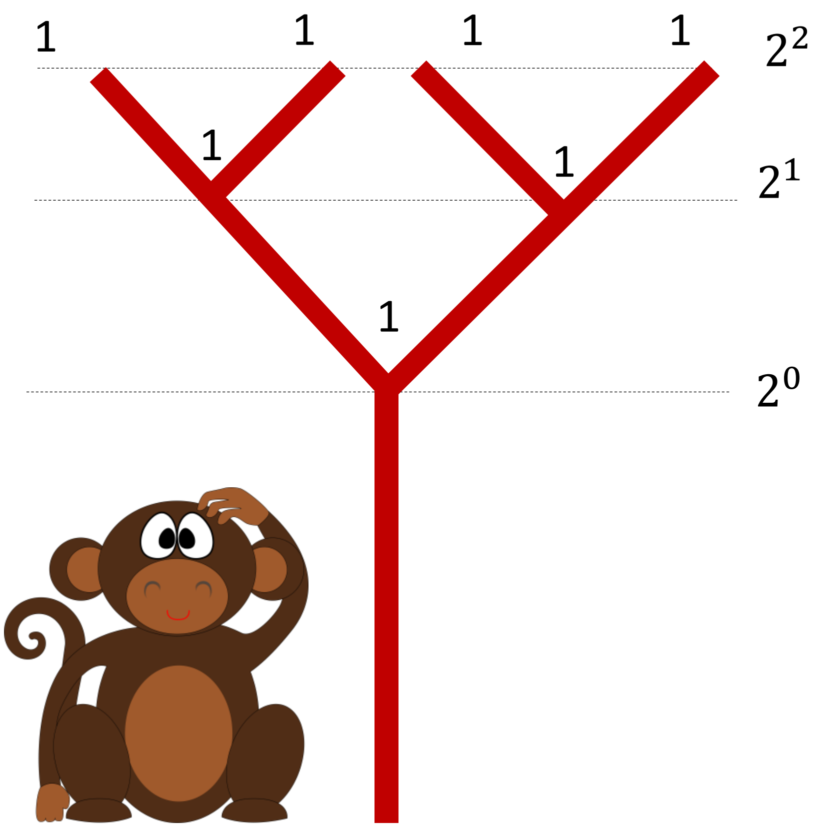
Probleme de numărare

Drd. Iulia – Cătălina Pleșca
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iași

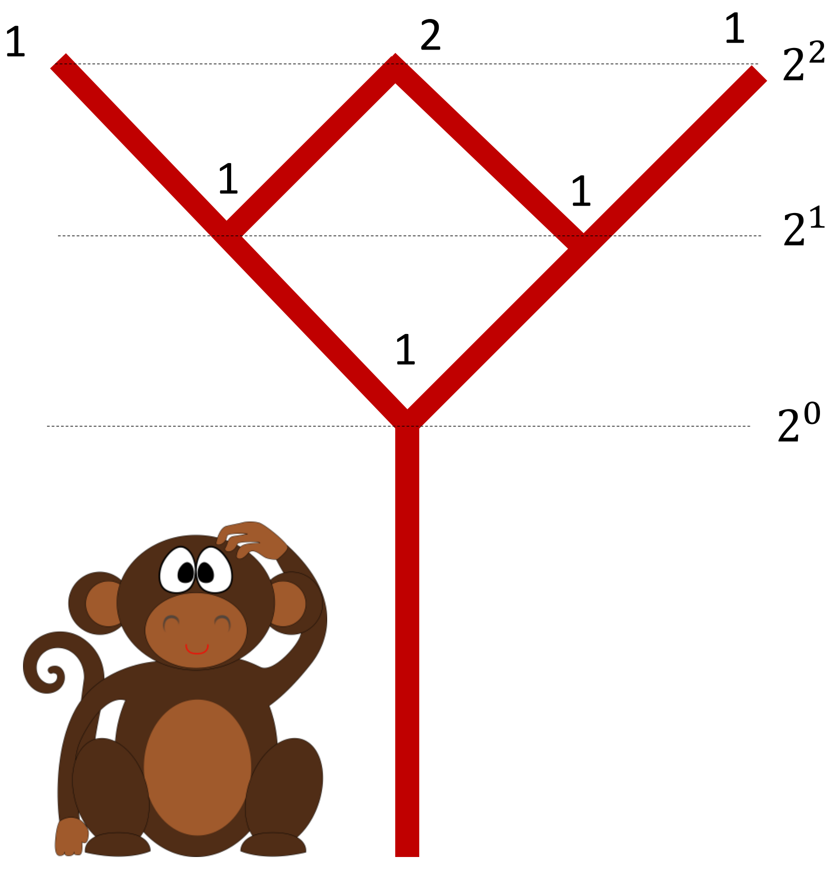
16.01.2017

Drumurile maimuței - I



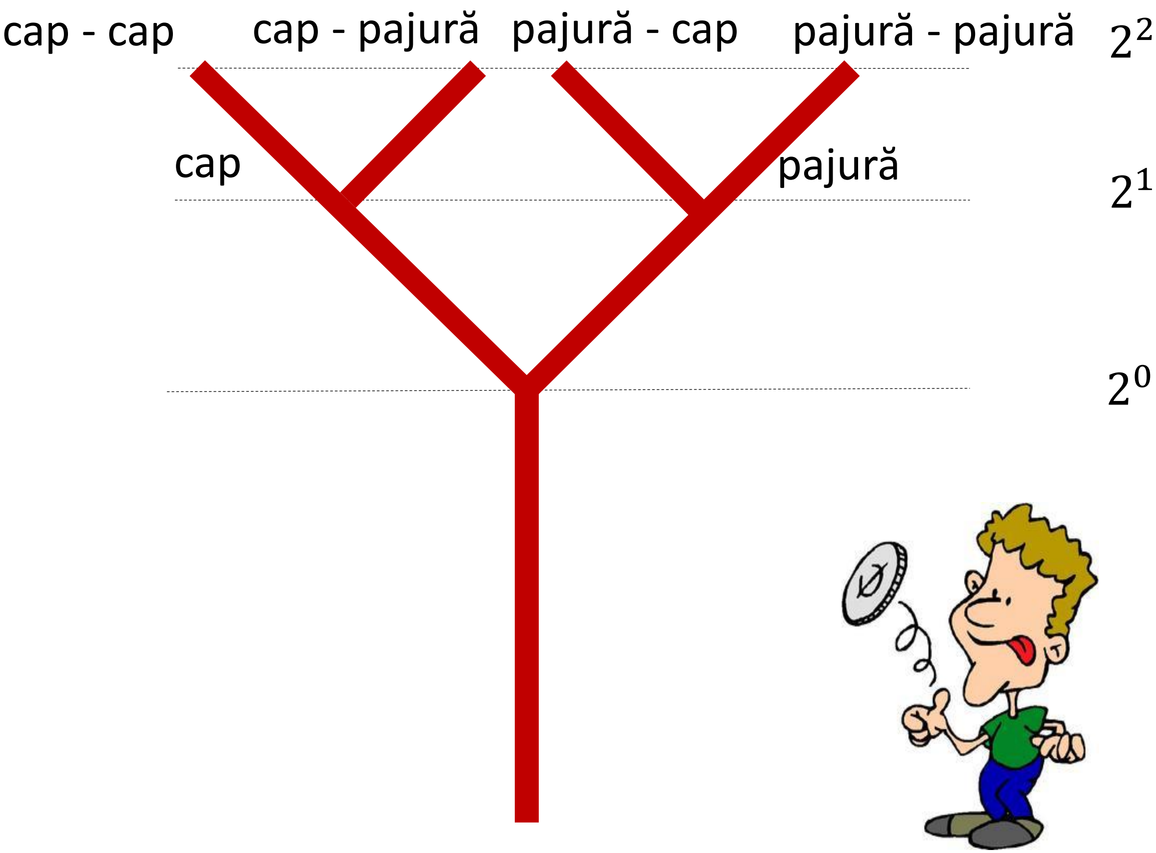
Câte drumuri are maimuța până în vârful copacului?

Drumurile maimuței - II



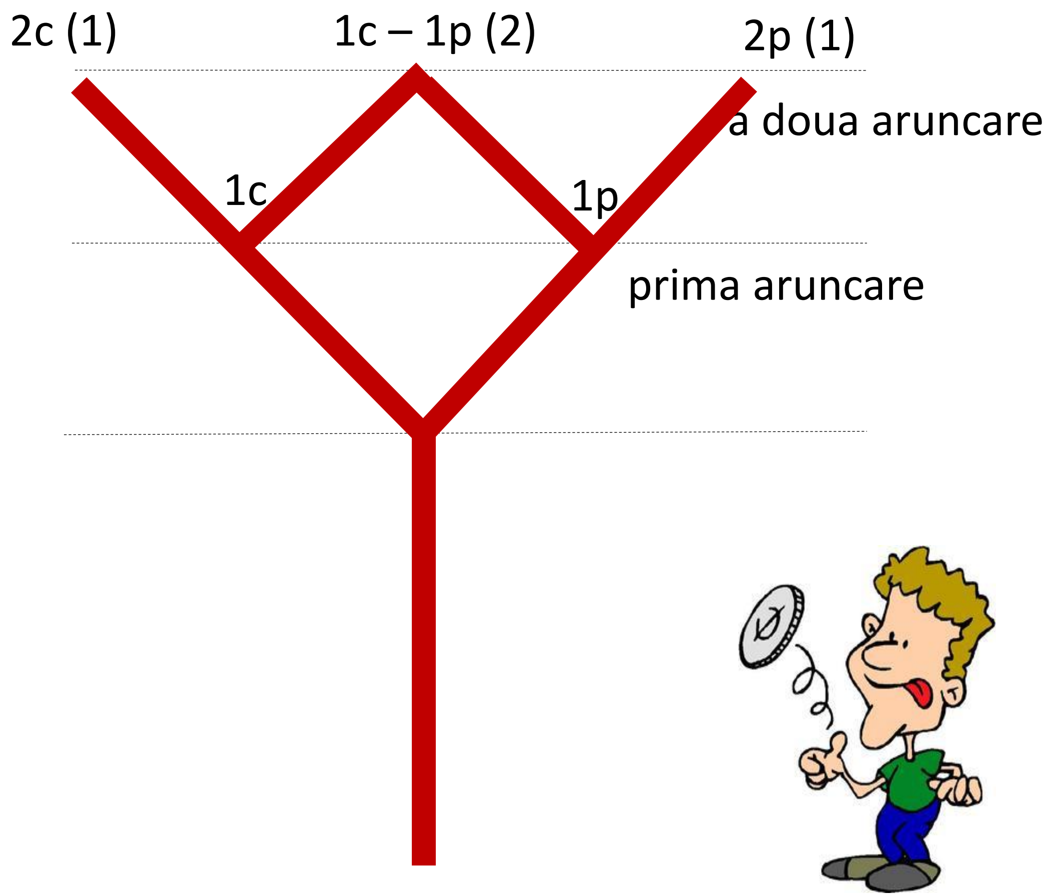
Câte drumuri are maimuța până în vârful copacului?

Aruncarea unei monede - I



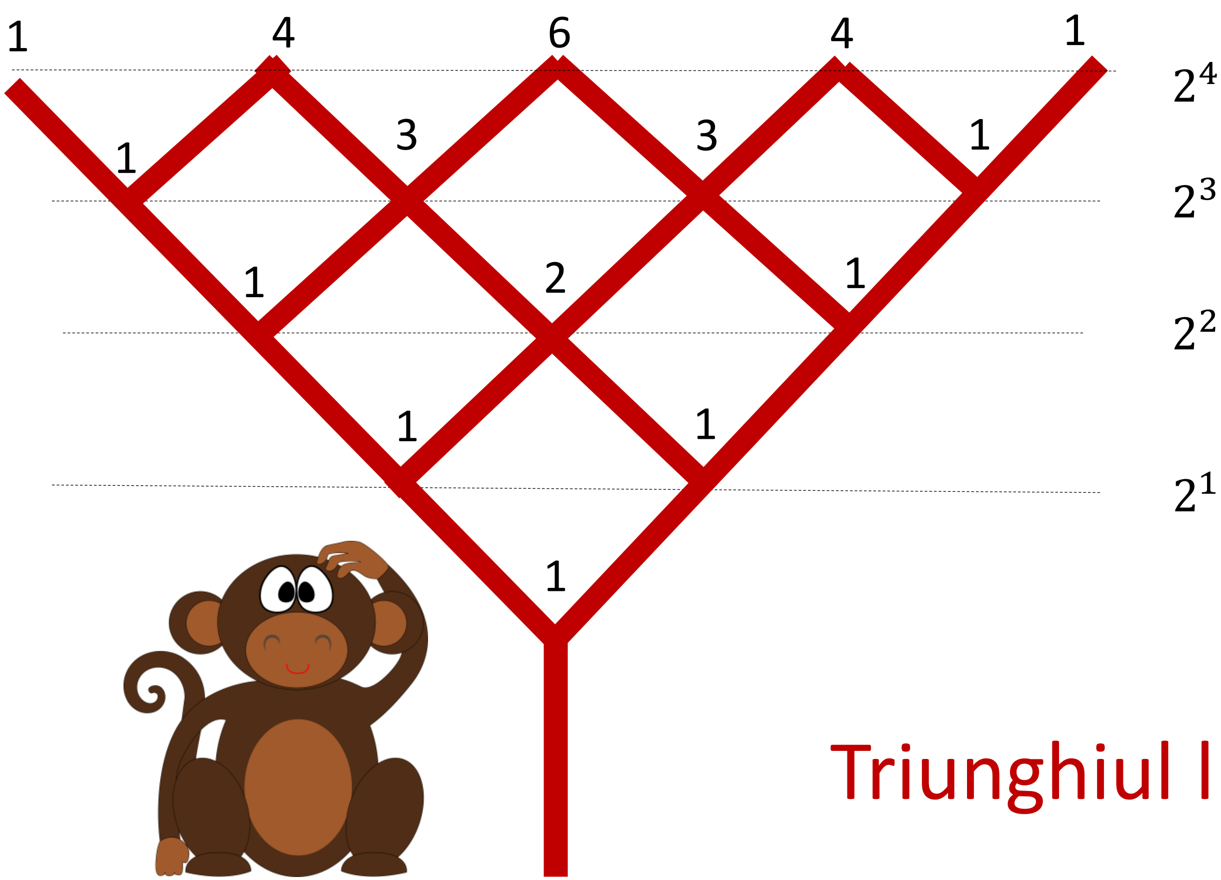
Câte rezultate diferite obținem la aruncarea de două ori a unei monede (ținând cont de ordine)?

Aruncarea unei monede - II



Cu ce probabilitate obținem fiecare rezultat la aruncarea de două ori unei (neținând cont de ordinea aruncărilor)?

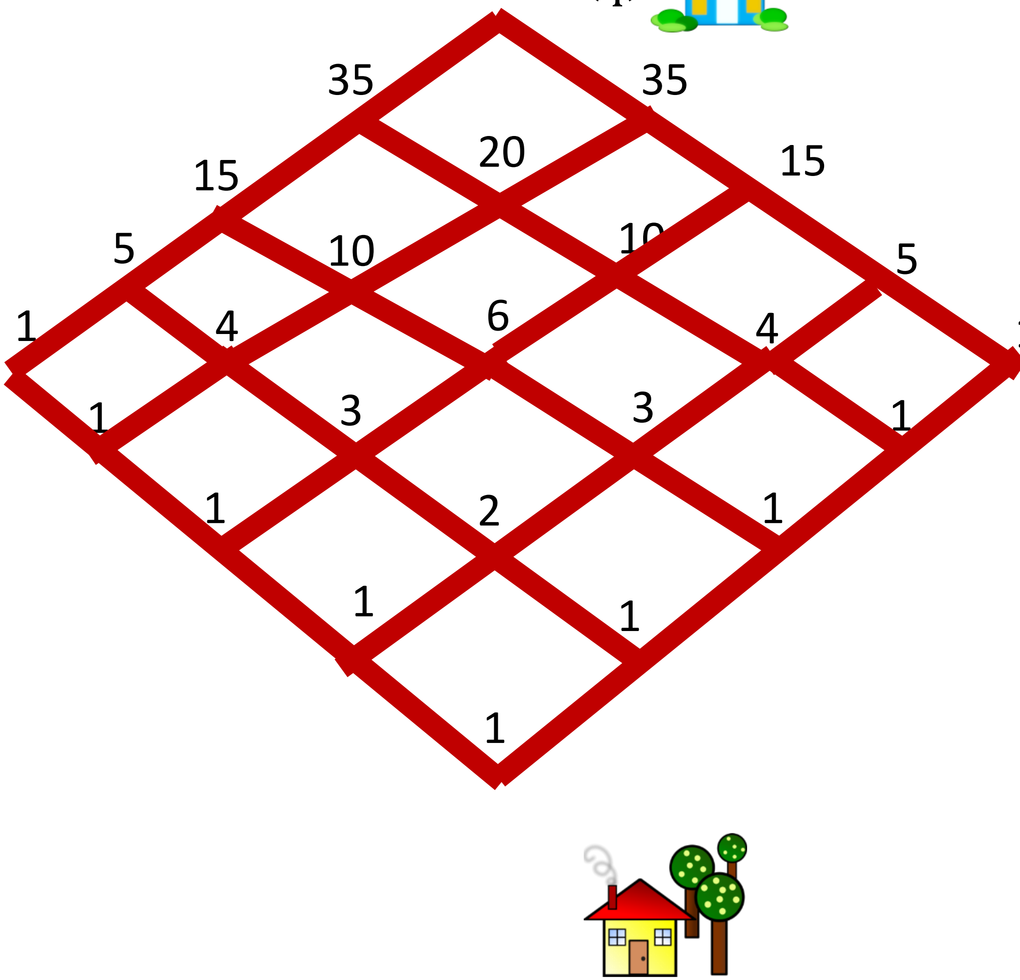
Drumurile maimuței - III



Triunghiul lui Pascal

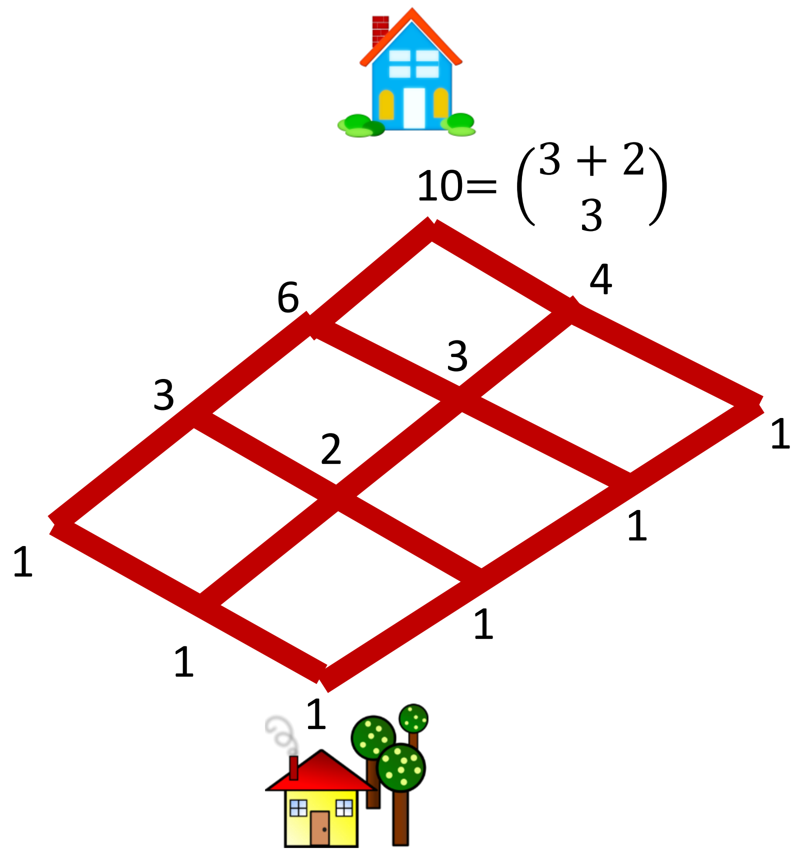
Drumuri între case - I

$$70 = \binom{8}{4}$$



Câte drumuri există de la casa galbenă la casa albastră mergând doar în sus pe drumuri?

Drumuri între case - II



$10 = \binom{3+2}{3}$

Câte drumuri există de la casa galbenă la casa albastră mergând doar în sus pe drumuri?

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n-1}{n} + \binom{m+n-1}{n-1}$$

Drumuri laticeale NE

Coeficienții binomiali

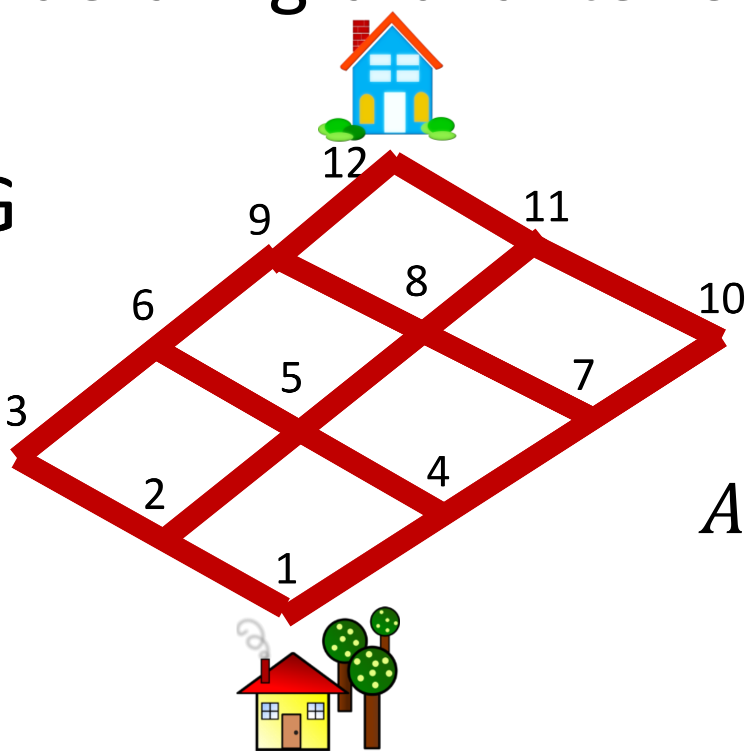
- Un drum poate fi codificat ca un cuvânt de lungime 5 cu caracterele “c” și “p” în care “p” apare de 3 ori.
- Pentru a determina un cuvânt este suficient să alegem pozițiile pe care “p” apare, indiferent de ordinea lor: $\frac{5!}{3!2!}$.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Drumuri în grafuri - I

Considerăm graful anterior și matricea sa de adiacență

G



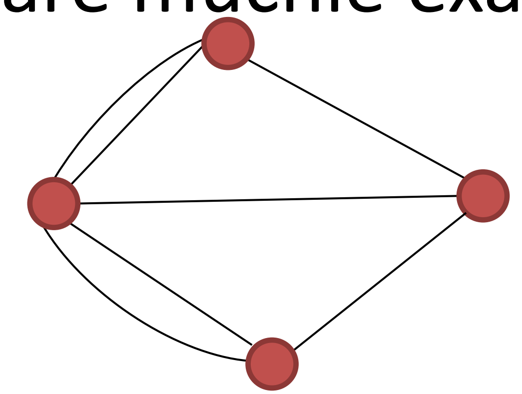
$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Deoarece drumurile dintre cele două case văzute ca drumuri în graful G de la nodul 1 la nodul 12 sunt toate drumurile de lungime 5, putem calcula numărul lor folosind puterea a cincea a matricei de adiacență.

$$A^5 = \begin{matrix}
0 & 34 & 0 & 35 & 0 & 30 & 0 & 35 & 0 & 13 & 0 & 10 \\
34 & 0 & 34 & 0 & 65 & 0 & 35 & 0 & 35 & 0 & 23 & 0 \\
0 & 34 & 0 & 30 & 0 & 35 & 0 & 35 & 0 & 10 & 0 & 13 \\
35 & 0 & 30 & 0 & 69 & 0 & 48 & 0 & 40 & 0 & 35 & 0 \\
0 & 65 & 0 & 69 & 0 & 69 & 0 & 88 & 0 & 35 & 0 & 35 \\
30 & 0 & 35 & 0 & 69 & 0 & 40 & 0 & 48 & 0 & 35 & 0 \\
0 & 35 & 0 & 48 & 0 & 40 & 0 & 69 & 0 & 35 & 0 & 30 \\
35 & 0 & 35 & 0 & 88 & 0 & 69 & 0 & 69 & 0 & 65 & 0 \\
0 & 35 & 0 & 40 & 0 & 48 & 0 & 69 & 0 & 30 & 0 & 35 \\
13 & 0 & 10 & 0 & 35 & 0 & 35 & 0 & 30 & 0 & 34 & 0 \\
0 & 23 & 0 & 35 & 0 & 35 & 0 & 65 & 0 & 34 & 0 & 34 \\
10 & 0 & 13 & 0 & 35 & 0 & 30 & 0 & 35 & 0 & 34 & 0
\end{matrix}$$

Drumuri în grafuri - II

Numărarea drumurilor în grafuri pornește de la o problemă relativ diferită: problema podurilor din Königsberg rezolvată de Euler în 1736: având graful de mai jos, trebuie să numărăm ciclurile sale euleriene, i.e. drumurile care parcurg fiecare muchie exact o dată.



Problema nu are soluție.

Drumuri în grafuri - II

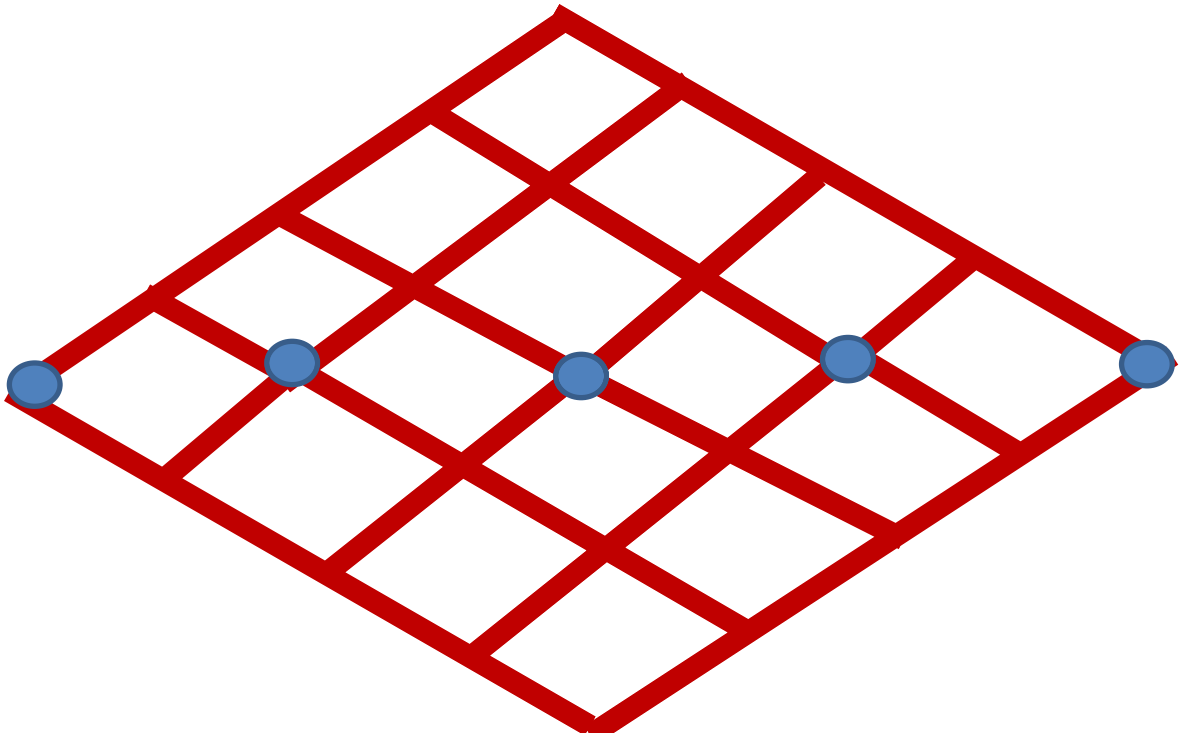
Problema găsirii numărului de drumuri într-un graf oarecare este complicată (de tip #P).

Variante mai simple ale problemei sunt găsirea drumurilor minimale și maximale (în grafuri aciclice).

Identități combinatoriale

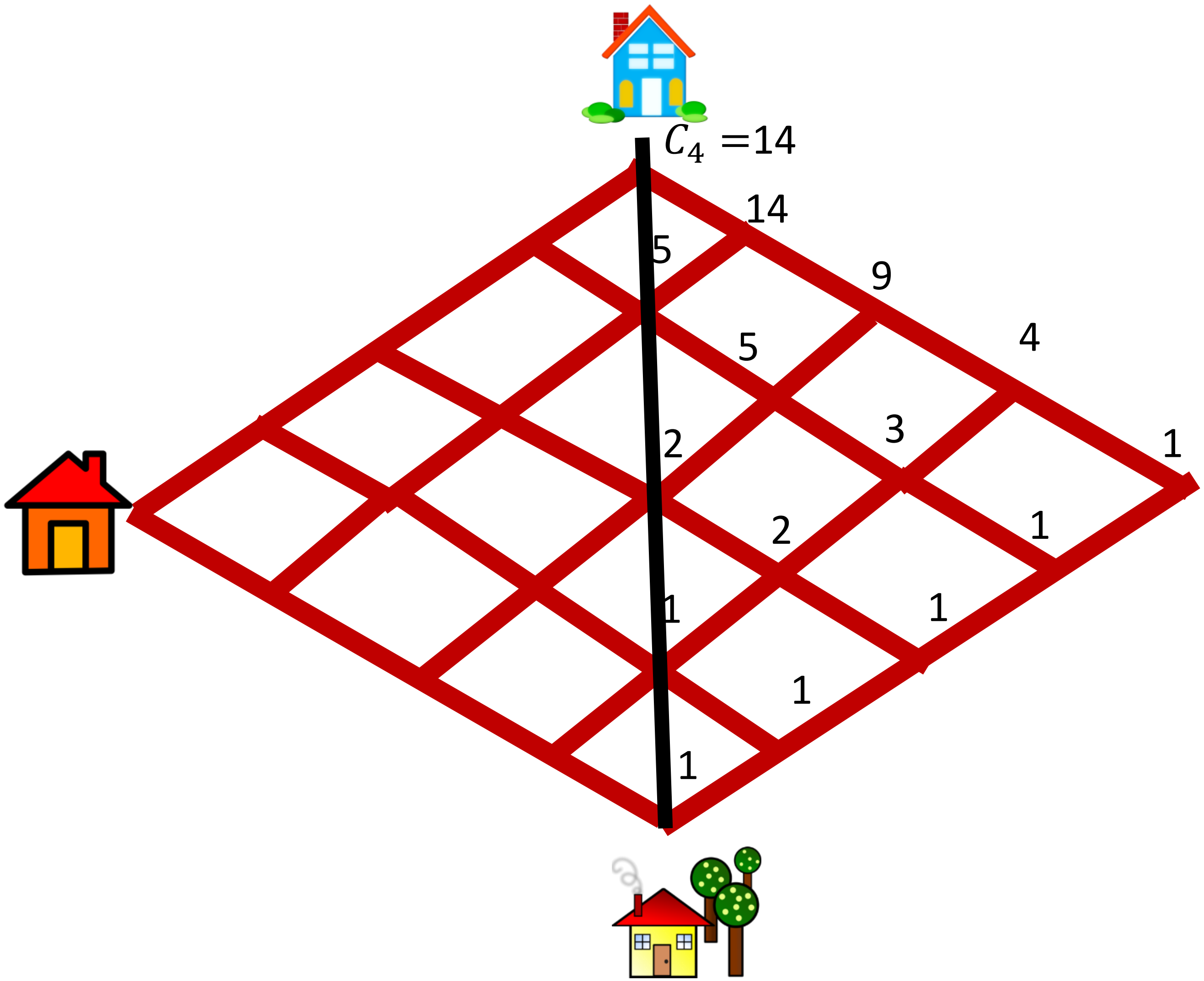
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Fiecare drum laticeal NE intersectează un singur punct de pe diagonală.



Termenul $\binom{n}{k}^2$ dă numărul drumurilor laticeale NE care trec prin punctul k.

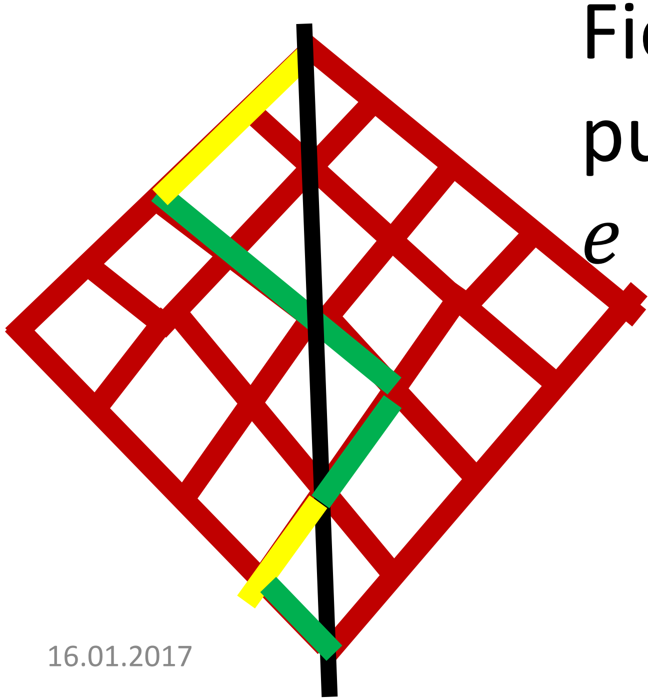
Drumuri între case - III



Câte drumuri există de la casa galbenă la casa albastră mergând doar în sus pe drumuri și netrecând de linia neagră?

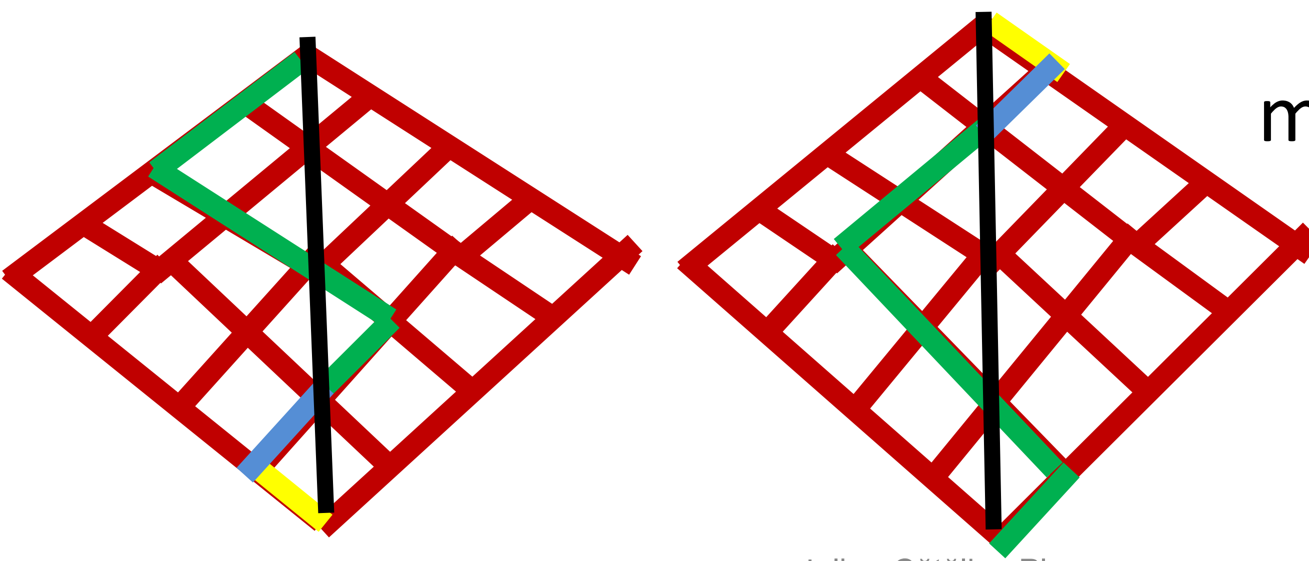
Numere Catalan - I

Pentru a calcula numerele Catalan, considerăm inițial toate drumurile între case. Definim excesul unui drum ca numărul de muchii la dreapta în stânga diagonalei. Pentru drumul din figură excesul este 3.



Fiecare drum cu exces $e > 0$ poate fi pus în bijecție cu un drum cu exces $e - 1$.

- Identificăm prima porțiune care depășește diagonala și marcăm muchia ei finală de pe diagonală și apoi schimbăm ordinea celor două porțiuni de drum din jurul său.
- Singura muchie spre dreapta care își schimbă poziția față de diagonală este cea albastră.
- Transformarea este reversibilă.

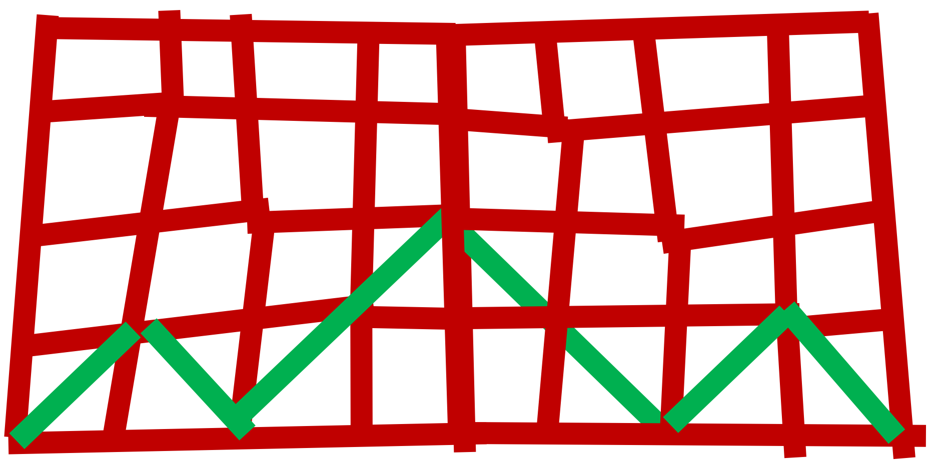


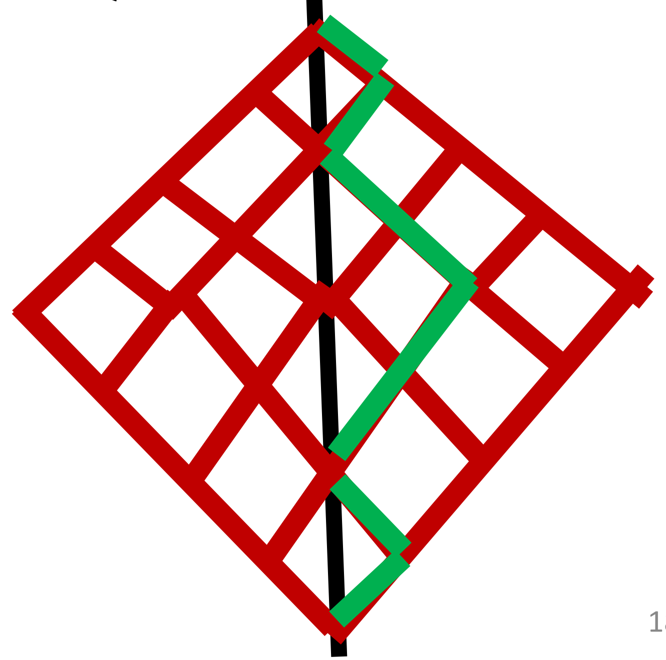
Cele $n+1$ mulțimi cu excese $0,1,\cdots,n-1$ au același cardinal $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Numere Catalan - II

Numărul de drumuri Dick de lungime 2n, i.e. drumuri laticeale de la $(0,0)$ la $(0,2n)$ cu pași de forma $(1,1)$ sau $(1,-1)$ fără a coborî sub axa OX.

Obținem numerele Catalan înlocuind pașii $(1,1)$ cu pași la dreapta și pașii $(1,-1)$ cu pași la stânga.





Numere Catalan - III

- Numărul de șiruri de tip ballot de lungime $2n$, i.e. șiruri de n de $+1$ și n de -1 astfel încât sumele parțiale sunt nenegative.
- Problema voturilor lui Bertrand

Având 2 candidați: A și B care obțin în final același număr de voturi, care este probabilitatea ca la numărarea voturilor A să nu fie niciodată depășit de B?

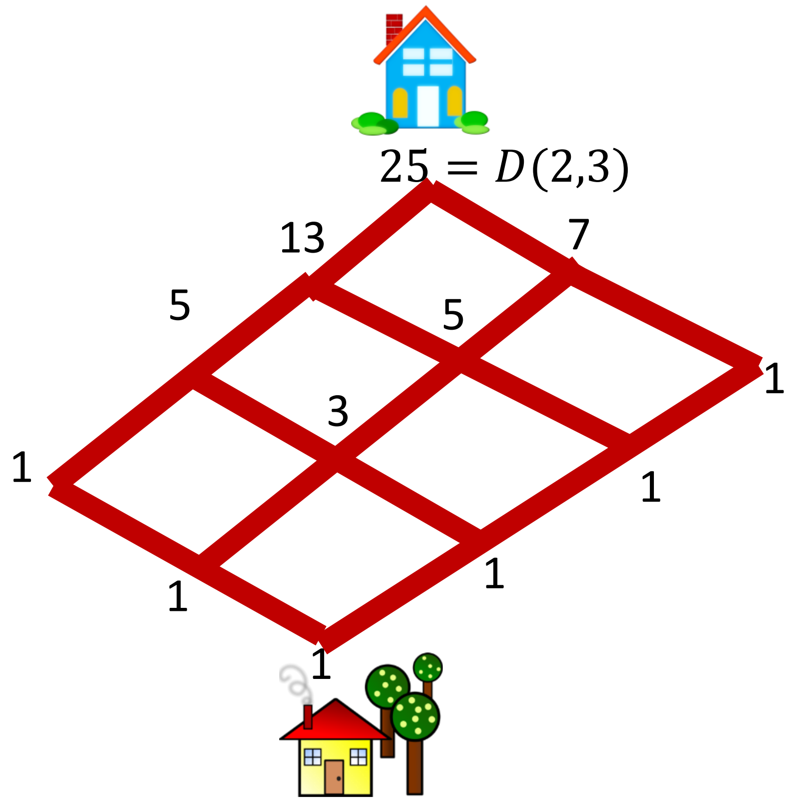
Corespondența: pentru +1 mergem la dreapta și pentru -1 la stânga. Fiecare drum de la casa galbenă la casa albastră are n muchii dreapta și n muchii stânga. Condiția ca sumele parțiale să fie pozitive este echivalentă cu condiția ca drumurile să nu treacă de diagonală.

Numere Catalan - IV

- Numărul de parantezări cu n paranteze ale unui șir de $n + 1$ elemente compuse cu o operație binară neasociativă.
- Exemplu pentru șiruri de lungime 4:

$$\mathrm{x(x(xx)), x((xx)x), (xx)(xx), (x(xx))x, ((xx)x)x.}$$

Drumuri între case - IV



Câte drumuri există de la casa galbenă la casa albastră mergând doar în sus (inclusiv pe diagonalele pătratelor) pe drumuri?

Numere Delannoy

- Evident

$$\mathrm{D(a,b)} = D(a-1,b) + D(a,b-1) + D(a-1,b-1)$$

și $D(0,b) = D(a,0) = 1.$

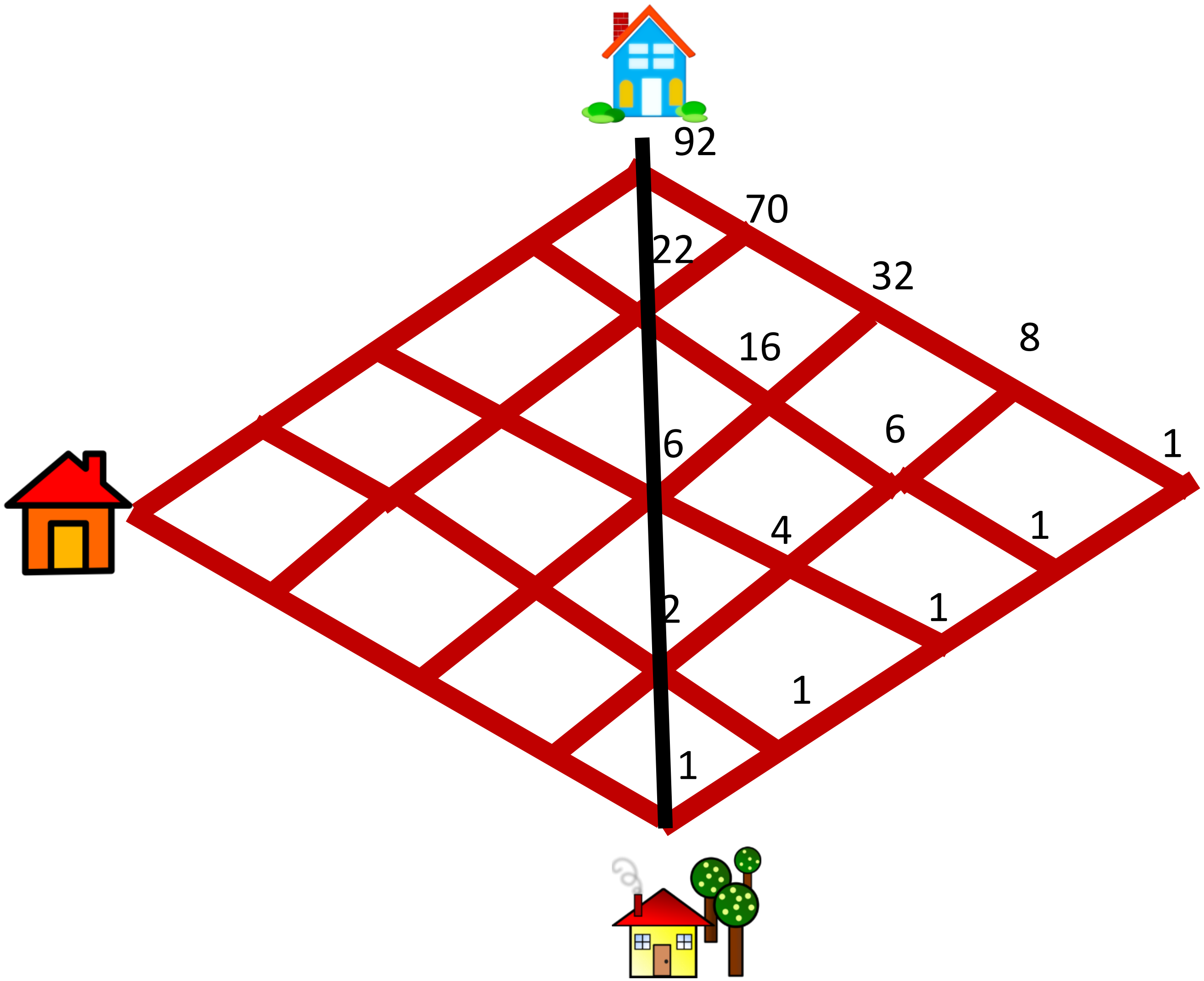
- Vom studia drumurile după numărul de muchii diagonale pe care le conțin. Pentru i muchii diagonale, trebuie să avem $a\ -\ i$ muchii la stânga $b-i$ muchii la dreapta pentru a ajunge în punctul (a,b). Acești pași pot fi făcuți în orice ordine, deci numărul acestor drumuri este coeficientul multinomial

$$\binom{a+b-i}{i, a-i, b-i} = \binom{a+b-i}{a}\binom{a}{i}.$$

- Expresia pentru numere Delannoy devine

$$D\,(\,a\,,b\,) = \sum_{i=0}^{\min(a,b)} \binom{a+b-i}{a}\binom{a}{i}.$$

Drumuri între case - III



Câte drumuri există de la casa galbenă la casa albastră mergând doar în sus pe drumuri și diagonale și netrecând de linia neagră?

Numere Schröder

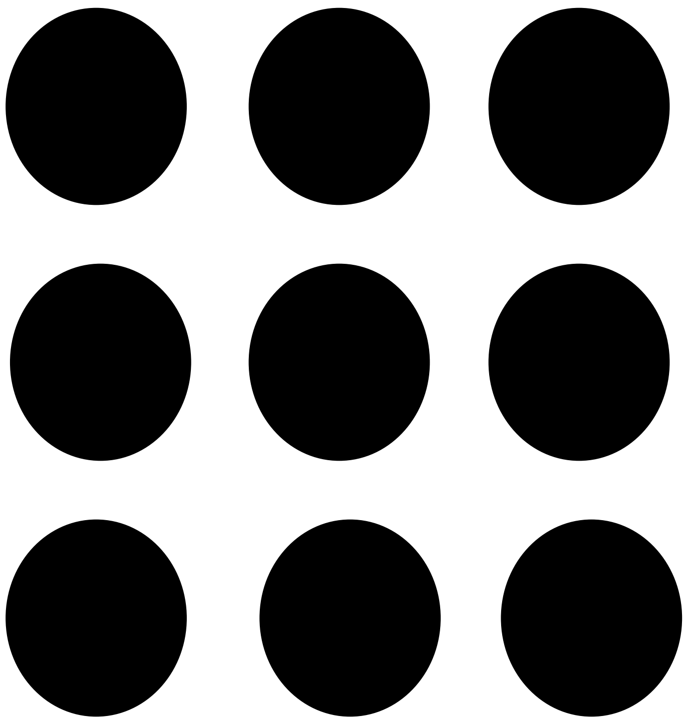
Numerele Schröder au aceeași relație cu numerele Delannoy ca numerele Catalan cu coeficienții binomiali.

Formula lor explicită este:

$$s_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{i}.$$

Deblocarea unui telefon Android

Care este numărul de coduri de deblocare a unui telefon Android?



Reguli:

- drumurile au orientare
- nu se poate trece de două ori prin același vârf
- lungimea unui drum este minim 4
- dacă două vârfuri care nu sunt incidente au vârful dintre ele folosit deja în drum, atunci ele devin incidente.

Răspuns: 389112.

Bibliografie

- Adam J. Aviv, Katherine Gibson, Evan Mossop, Matt Blaze, and Jonathan M. Smith (2010). *“Smudge Attacks on Smartphone Touch Screens”*
- *Philippe Boulanger (1998). “Suntem cei mai tari la mate!”. Compania.*
- Josef Rukavicka (2011). *“On Generalized Dyck Paths”, Electronic Journal of Combinatorics*
- *Richard P. Stanley (2015). “Catalan Numbers”. Cambridge University Press.*
- *Leslie G. Valiant (1979). "The Complexity of Computing the Permanent". Theoretical Computer Science. Elsevier.* ***8*** *(2): 189–201.*