# Aspecte metodice în predarea capitolului „Funcții derivabile”

## 1. Structura pe unități de învățare a capitolului „Funcții derivabile” la clasa a XI-a profil real, specializarea *Matematică-informatică*

Unitatea de învățare I - Funcții derivabile - 7 ore

Unitatea de învățare II - Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - 12 ore

Unitatea de învățare III - Reprezentarea grafică a funcțiilor - 8 ore

**Unitatea de învățare I - Funcții derivabile**

I.1 Probleme care conduc la noțiunea de derivată: tangenta la o curbă într-un punct

I.2 Derivata unei funcții într-un punct. Funcție derivabilă pe mulțime

I.3 Derivate laterale

I.4 Interpretarea geometrică a derivatei. Puncte remarcabile pentru graficul unei funcții

I.5 Continuitatea unei funcții derivabile

I.6 Derivabilitatea pe un interval. Funcția derivată. Reguli de derivare. Derivatele funcțiilor elementare

I.7 Operații cu funcții derivabile

I.8 Calculul derivatelor de ordinul I și al II-lea pentru funcțiile studiate

**Unitatea de învățare II - Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor**

II.1 Puncte de extrem ale unei funcții. Teorema lui Fermat

II.2 Teorema lui Rolle. Șirul lui Rolle

II.3 Teorema lui Lagrange. Consecințele teoremei lui Lagrange

II.4 Regulile lui l’Hospital

II.5 Rolul derivatei întai în studiul funcțiilor: puncte de extrem, monotonia funcțiilor

II.6 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune

**Unitatea de învățare III - Reprezentarea grafică a funcțiilor**

III.1 Reprezentarea grafică a funcțiilor

III.2 Rezolvarea grafică a ecuațiilor, utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații

III.3 Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă)

**2. Greşeli tipice ale elevilor**

1. Se confundă noțiunile de <u>funcție care are derivată într-un punct</u> și <u>funcție derivabilă într-un punct</u>.

2. Continuitatea unei funcții într-un punct este o condiție necesară, nu și suficientă pentru derivabilitatea funcției în acel punct. Se recomandă utilizarea unor exemple de genul funcției $f(x)=|x|, x\in\mathbb{R}$.

3. Există totuși situații când o funcție este discontinuă într-un punct și totuși are derivată în acel punct.

De exemplu, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$

4. Calculul derivatei unei funcții fără a stabili domeniul de derivabilitate. Se insistă pe exemple de tipul: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x},\ \ f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x.$

5. Aplicarea regulilor lui l'Hospital.

6. Stabilirea punctelor de extrem local sau global ale unei funcții.

**3. Soluții pentru probleme de algebră și geometrie utilizând derivabilitatea funcțiilor**

1. Dacă $a_i\in(0,\infty), i\in\{1,2,...,n\}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, să se demonstreze inegalitatea mediilor:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

***Soluție:*** Aplicăm metoda inducției matematice.

Pentru $n=2$ verificarea este imediată:

$$\sqrt{a_1a_2}\leq\frac{a_1+a_2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{a_1a_2}\leq a_1+a_2\Leftrightarrow\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0,\forall a_1,a_2\in(0,\infty).$$

Presupunem relația adevărată pentru *n* numere $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,\infty)$ și vom demonstra că este adevărată și pentru *n*+1 numere strict pozitive.

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n+x}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2...a_nx}$ .

Funcția *f* este derivabilă, prin operații cu funcții derivabile și

$$f'(x)=\frac{1}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2...a_n}\cdot\frac{1}{(n+1)\sqrt[n+1]{x^n}}.$$

Rezolvând ecuația $f'(x)=0$, se obține $\sqrt[n+1]{x^n}=\sqrt[n+1]{a_1a_2...a_n}\Rightarrow x^n=a_1a_2...a_n\Rightarrow\ x=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Studiind semnul lui $f'$, se constată că *f* este strict descrescătoare pe $\left(0,\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)$ și strict crescătoare pe $\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n},\infty\right)$, deci $x=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ este punct de minim al funcției.

Avem $f\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}-(n+1)\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{n+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{n+1}\geq 0$, conform ipotezei inducției.

Rezultă că $f(x)\geq 0, \forall x\in(0,\infty)$. Astfel inegalitatea mediilor este justificată pentru *n*+1 numere strict pozitive.

Conform principiului inducției matematice, inegalitatea mediilor este adevărată pentru orice *n* numere strict pozitive, pentru orice $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Egalitatea are loc dacă $a_1=a_2=...=a_n$.

2. Dacă $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, demonstrați că au loc relațiile: $\dfrac{2^n}{n(n+1)}<\ln 2\cdot\ln 3\cdot...\cdot\ln n<(n-1)!$.

***Soluție:*** Considerăm funcția $f:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

Se obține $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2},\ \forall x\geq 2$. Deoarece $f'(x)>0,\ \forall x\geq 2$, rezultă că funcția *f* este strict crescătoare pe $[2,\infty)$ și cum $f(x)>f(2)>0$, rezultă că $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}, \forall x\geq 2$.

Dând lui *x* valori din $\{2,3,...,n\}$ și înmulțind relațiile astfel obținute, avem:

$$\prod_{k=2}^{n}\ln k>2^{n-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=2^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2}}=\frac{2^n}{n(n+1)}.$$

Considerăm funcția $g:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln x-x+1$ , care este derivabilă. Avem

$g'(x)=\dfrac{1-x}{x}, \forall x\ge 2$ și $g'(x)<0, \forall x\ge 2$, deci $g$ este strict descrescătoare pe $[2,\infty)$. Cum $g(x)<g(2)<0 \Rightarrow \ln x < x-1,\ \forall x\ge 2$.

Dând lui $x$ valori din $\{2,3,...,n\}$ și înmulțind relațiile astfel obținute, avem:

$$\prod_{k=2}^{n}\ln k<\prod_{k=2}^{n}(k-1)=(n-1)!.$$

Astfel, relațiile $\dfrac{2^n}{n(n+1)}<\ln 2\cdot\ln 3\cdot...\cdot\ln n<(n-1)!,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ sunt justificate.

3. Să se calculeze următoarele sume:

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n,\ n\in\mathbb{N}, n\ge 2$;

b) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+...+\dfrac{n}{3^{n-1}},\ n\in\mathbb{N}$.

***Soluție:***

a) Aplicând binomul lui Newton pentru dezvoltarea $(1+x)^n,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$, obținem

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n.$$

Prin derivare, avem $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1},\ x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=1$ se obține $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

b) Aplicând formula sumei primilor $n+1$ termeni ai unei progresii geometrice cu rația $x\ne 1$ și primul termen egal cu 1, obținem:

$$1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},\ x\ne 1.$$

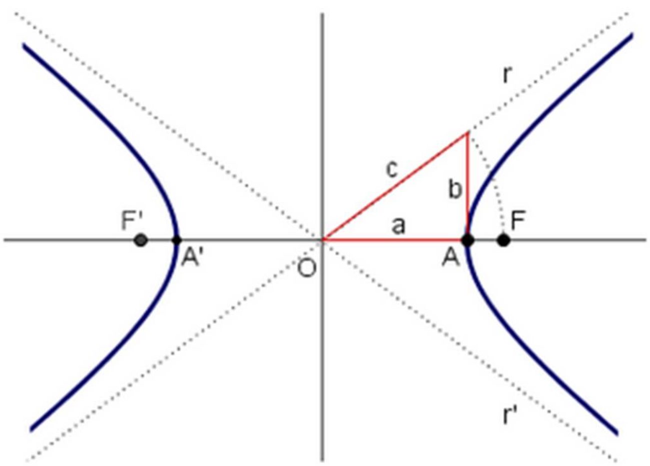
Prin derivare, avem $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}=\dfrac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}, x\ne 1$.

Pentru $x=\dfrac{1}{3}$ rezultă: $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+...+\dfrac{n}{3^{n-1}}=\left[1-\dfrac{2(n+1)+1}{3^{n+1}}\right]\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$.

4. Să se arate că o tangentă oarecare la hiperbolă formează cu asimptotele un triunghi de arie constantă. Să se interpreteze geometric rezultatul. (Gradul didactic II, 2009, Universitatea “Al. I Cuza” Iași)

***Soluție:***

Ecuația canonică a hiperbolei, ale cărei focare sunt situate pe axa absciselor și sunt simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale, are forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, unde $b^2=c^2-a^2>0$.




Ecuațiile asimptotelor hiperbolei sunt $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Ecuația hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ este echivalentă cu $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$.

Pentru $x\in(-\infty,a]\cup[a,\infty)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Considerăm funcția $f:(-\infty,a]\cup[a,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ a cărei reprezentare grafică este porțiunea din hiperbolă situată deasupra axei O*x*.

Funcția *f* este derivabilă pe $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$ și $f'(x)=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Fie $x_0\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$ un punct oarecare. Vom calcula aria triunghiului determinat de tangenta la graficul funcției *f* în $x_0$ și cele două asimptote.

**<u>Cazul I</u>** Dacă $x_0=a\Rightarrow f'(x_0)=f'(a)=+\infty$, deci funcția *f* are derivată în $x_0=a$ de ecuație $x=a$.

Folosind notațiile $(T):\ x=a$, $(A_1):\ y=\frac{b}{a}x$ și $(A_2):\ y=-\frac{b}{a}x$, triunghiul determinat de tangenta *(T)* și asimptotele $(A_1),(A_2)$ are vârfurile de coordonate $O(0,0), A(a,b), B(a,-b)$, iar aria sa este $A_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a & b & 1\\ a & -b & 1\end{vmatrix}=-2ab$. Obținem $A_{\triangle OAB}=ab$.

**<u>Cazul II</u>** Dacă $x_0=-a\Rightarrow f'(x_0)=f'(-a)=+\infty$. În mod analog se obține $A_{\triangle OAB}=ab$.

**<u>Cazul III</u>** Dacă $x_0\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$, ecuația tangentei în punctul $x_0$ este

$$(T):\ y-\frac{b}{a}\sqrt{x_0^{\,2}-a^2}=\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2}-a^2}}(x-x_0).$$

Rezolvând sistemul determinat de ecuația tangentei *(T)* și asimptotei $(A_1)$, se obține punctul

$$A\left(\sqrt{x_0^{\,2}-a^2}+x_0,\frac{b}{a}\left(\sqrt{x_0^{\,2}-a^2}+x_0\right)\right).$$

Punctul $B\left(x_0-\sqrt{x_0^{\,2}-a^2},-\frac{b}{a}\left(x_0-\sqrt{x_0^{\,2}-a^2}\right)\right)\in T\cap A_2$.

Astfel, aria triunghiului *OAB* este $A_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\Delta|=ab$.

Deci, o tangentă oarecare la hiperbolă formează cu asimptotele un triunghi de arie constantă, egală cu produsul semiaxelor sale.