Relevanța domeniului variabilei în demonstrarea inegalităților

Gabriel Popa[1]

Vineri, 13 mai 2016

De unde începem atunci când suntem în fața unei inegalități pe care trebuie să o demonstrăm? Se discută, în clasă sau la centrele de excelență, diverse strategii de abordare; o excelentă trecere în revistă a acestora poate fi găsită în $[1]$, la pagina 213.

Ne permitem să adăugăm un „sfat” celor 18 listate în lucrarea citată: *priviți cu atenție în ce domeniu se află variabila (variabilele)*! Această informație poate fi, de multe ori, decisivă în alegerea unei metode potrivite de a ataca inegalitatea.

- Evident, nu vom putea folosi inegalitatea mediilor pentru a demonstra o inegalitate în care variabilele parcurg întreaga mulțime a numerelor reale. Putem încerca însă să formăm pătrate sau să folosim alte inegalități remarcabile.
- Dacă variabila este număr natural, o abordare inductivă poate avea şanse de reuşită.
- Când variabila parcurge un interval $[-a,a]$ centrat în origine, de multe ori simplificăm rezolvarea cu ajutorul unei substituții trigonometrice de tipul $x=a\sin t$.

În continuare, încercăm să justificăm utilitatea acestui „sfat” prin câteva exemple. Problemele alese nu sunt deloc simple şi necesită un anumit antrenament al citiorului în domeniul inegalităților algebrice. Dealtfel, acest capitol ridică probleme majore când este predat la clasă, doar o minoritate a elevilor fiind capabilă de un progres semnificativ; putem deci afirma că aproape nu există inegalități simplu de demonstrat. Cele ce urmează constituie, mai degrabă, o temă de studiu pentru centrele de excelență.

1. Dacă a,b şi c sunt numere naturale nenule astfel încât $ab<c$, arătați că $a+b\le c$.

Soluție. Ipoteza $ab<c$ implică faptul că $ab+1\le c$ (numerele întregi apar pe axa numerelor din 1 în 1!). În aceste condiții, dacă reuşim să dovedim că $a+b\le ab+1$, inegalitatea dorită va fi urma imediat. Ultima relație revine la $(a-1)(b-1)\ge 0$ şi este evidentă pentru a,b numere naturale nenule.

2. Numerele x, y, z, t, a şi b sunt naturale nenule. Ştiind că $xt-yz=1$ şi $\frac{x}{y}>\frac{a}{b}>\frac{z}{t}$, demonstrați că

$$ab\ge(x+z)(y+t).$$

Dan Nedeianu, O.N.M. 2011

Soluție. Din $\frac{x}{y}>\frac{a}{b}$ rezultă că $xb>ya$, deci $xb-ya\ge 1$. Analog se arată că $at-bz\ge 1$. Înmulțim prima inegalitate cu t, pe a doua cu y şi adunăm relațiile obținute; deducem că $bxt-byz\ge t+y$, de unde $b\ge t+y$. La fel se arată că $a\ge y+z$ şi, prin înmulțirea membru cu membru a acestor inegalitați, rezultă cerința problemei.

[1] Profesor, Colegiul Național, Iaşi

3. Dacă a, b şi c sunt numere naturale prime distincte, arătaţi că

$$30(ab+bc+ca) \leq 31abc\,.$$

Marius Ghergu

Soluție. Împărţim inegalitatea prin $30abc$ (avem voie!) şi vom avea de demonstrat că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{31}{30}$. Numerele a, b şi c fiind prime şi distincte, numitorii celor trei fracţii nu pot fi prea mici, deci fracţiile nu pot fi prea mari! Avem că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$ şi, cu aceasta, rezolvarea este completă.

4. Fie $a<b$ două numere reale şi $x_1, x_2, \ldots, x_{100} \in [a,b]$ astfel încât $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=100$. Arătaţi că

$$ab+\frac{1}{100}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2\right) \leq a+b\,.$$

Gazeta Matematică 9/2015 (Supliment)

Soluție. Ne folosim de ipoteza $x_1 \in [a,b]$ scriind-o sub forma $(x_1-a)(x_1-b) \leq 0$; deducem că $x_1^2-(a+b)x_1+ab \leq 0$. Analog se obţin încă 99 de inegalităţi care, prin sumare, conduc la relaţia din concluzie dacă mai ţinem seama şi de ipoteza $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=100$.

5. Dacă numerele reale $a, b, c \in [0,1]$ sunt astfel încât $ab+bc+ca=1$, demonstraţi că

$$a^2+b^2+c^2 \leq 2\,.$$

Mircea Becheanu, Concursul Alexandru Myller, 2003

Soluție. Numerele a, b şi c, fiind în intervalul $[0,1]$, nu se măresc prin ridicare la putere, aşadar $a^2+b^2+c^2 \leq a+b+c$. Pentru a demonstra inegalitatea cerută, ar fi destul să dovedim că $a+b+c \leq 2$. Ne folosim din nou de faptul că a, b şi c aparţin domeniului $[0,1]$: din $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$ rezultă că $a+b+c \leq 1-abc+ab+bc+ca=2-abc \leq 2$. Egalitatea se atinge când două dintre numerele a, b şi c sunt egale cu 1, cel de-al treilea fiind egal cu 0.

6. Fie a şi b două numere reale având modulele cel puţin egale cu 2. Demonstraţi că

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) \geq (a+b)(ab+1)+5\,.$$

Marius Durea, Concursul Alexandru Myller, 2004

Soluție. Încercăm o spargere a inegalităţii din enunţ, încât să putem valorifica poziţionarea pe axă a numerelor a şi b. Observăm că

$$\begin{aligned}
&\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-(a+b)(ab+1)-5= \\
&\quad=\left(a^2b^2-a^2b-ab^2+ab\right)+\left(a^2+b^2-a-b-ab\right)-4= \\
&\quad=\left[a(a-1)\cdot b(b-1)-4\right]+\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+a(a-2)+b(b-2)\right].
\end{aligned}$$

Avem că $a(a-1)\ge 2$ şi $b(b-1)\ge 2$, prin urmare prima paranteză pătrată este nenegativă. Apoi, $(a-b)^2\ge 0$, $a(a-2)\ge 0$ şi $b(b-2)\ge 0$, aşadar şi cea de-a doua paranteză pătrată este nenegativă, deci este adevărată inegalitatea din enunț. Egalitatea se atinge când $a=b=2$.

7. Dacă $a,b,c\in[0,1]$, demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^2}{2b^3+2c^3+5}+\frac{b^2}{2c^3+2a^3+5}+\frac{c^2}{2a^3+2b^3+5}\le\frac{1}{3}.$$

Dan Nedeianu, Recreații Matematice 1/2011

Soluție. Putem încerca o majorare a celor trei fracții din membrul stâng cu trei fracții care să aibă acelaşi numitor. Întrucât $a^3\in[0,1]$, avem că $2b^3+2c^3+5\ge 2a^3+2b^3+2c^3+3$, prin urmare $\frac{1}{2b^3+2c^3+5}\le\frac{1}{2a^3+2b^3+2c^3+3}$. Scriem încă două inegalități similare şi le sumăm; membrul stâng se majorează astfel cu $\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3}$.

Pe de altă parte, $2a^3+1\ge 3a^2$; într-adevăr, această relație este echivalentă cu $(a-1)^2(2a+1)\ge 0$ şi aceasta este evident adevărată când $a\in[0,1]$. Scriem încă două inegalități analoage şi, prin sumare, obținem că $2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, de unde concluzia problemei.

8. Fie a,b,c numere reale nenule astfel încât $a+b+c=abc$. Demonstrați inegalitatea

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}\ge 2\sqrt{3}.$$

Andrei Nicolaescu şi Cristian Pătraşcu, Recreații Matematice 1/2015

Soluție. Cum $a+b+c=abc$, există un triunghi ABC astfel încât $a=\operatorname{tg}A$, $b=\operatorname{tg}B$ şi $c=\operatorname{tg}C$. Inegalitatea din enunț revine la $\sum\frac{1}{\sin A}\ge 2\sqrt{3}$. Folosind inegalitatea lui Bergström şi binecunoscuta $\sum\sin A\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, obținem că $\sum\frac{1}{\sin A}\ge\frac{(1+1+1)^2}{\sum\sin A}\ge\frac{9\cdot 2}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ şi, astfel, soluția este completă.

9. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=abc$. Demonstrați inegalitatea

$$xy+yz+zx\ge 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}.$$

Marian Tetiva, Recreații Matematice 1/2005

Indicație. Procedăm ca la problema precedentă.

10. Dacă $x_1,x_2,\ldots,x_{100}\in[0,1]$, demonstrați că

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2-x_1x_2-x_2x_3-\cdots-x_{99}x_{100}-x_{100}x_1\le 50.$$

Când se atinge egalitatea?

O.N.M. 2000

Soluție. Funcția $f(x_k) = x_k^2 - (x_{k-1} + x_{k+1})x_k + \cdots$ este convexă pe intervalul compact $[0,1]$, deci își atinge maximul în unul dintre capetele domeniului. Rezultă că valoarea maximă a expresiei E din membrul stâng al inegalității din enunț se atinge când $x_1, x_2, \ldots, x_{100} \in \{0,1\}$. În aceste condiții, $(x_k - x_{k+1})^2 \in \{0,1\}$ și atunci

$$E = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{100} - x_1)^2\right] \leq 50.$$

Egalitatea se atinge dacă și numai dacă $x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 1, x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 0$ sau invers.

Bibliografie

1. A. Engel – *Probleme de matematică - strategii de rezolvare*, GIL, Zalău, 2006

2. Colecția *Recreații Matematice*, 2000-2015

3. Colecția *Gazeta Matematică*, 2000-2015