Șirul lui Fibonacci

prof. Crăciun Mihai
prof. Crăciun Alina

① Fie $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir definit astfel $F_0=0, F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n\geq 1$. Atunci avem relațiile

a) $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;
(Formula lui Binet, 1843)

b) $F_1+F_2+\dots+F_n=F_{n+2}-1$;

c) $F_1+F_3+\dots+F_{2n-1}=F_{2n}$;

d) $F_2+F_4+\dots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$;

e) $F_2-F_3+F_4-F_5+\dots+(-1)^nF_n=(-1)^nF_{n-1}$;

f) $F_1^2+F_2^2+\dots+F_n^2=F_nF_{n+1}$;

g) $F_{n-1}\cdot F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$.

Soluții.

a) Inducție relativ la n, avem

$$F_2=F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]=1.$$

Fie $n\geq 1$ astfel încât

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Atunci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\} = ?!$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

b) Din definiția șirului $(F_n)_{n\geq 1}$, avem

$F_1 = 1$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_0 \\ F_3 &= F_2 + F_1 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \\ &\vdots \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} F_{n+2} = 1 + F_1 + F_2 + \dots + F_n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

c) Avem succesiv

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= F_1 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \\ F_6 &= F_5 + F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} \end{aligned}\right. \quad \overset{(+)}{\Longrightarrow} F_{2n} = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}.$$

d) $F_3 = F_2 + F_1$

$F_5 = F_4 + F_3$

$F_7 = F_6 + F_5$

$\vdots$

$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}$

$F_{2n+1} = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + 1 \implies \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.

e) $F_2 = F_1$

$-F_3 = -F_2 - F_1$

$F_4 = F_3 + F_2$

$-F_5 = -F_4 - F_3$

$F_6 = F_5 + F_4$

$-F_7 = -F_6 - F_5$

$\vdots$

$(-1)^{n-1} F_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot F_{n-2} + (-1)^{n-1} F_{n-3}$

$(-1)^{n} F_{n} = (-1)^{n} F_{n-1} + (-1)^{n} F_{n-2}$

$F_2 - F_3 + F_4 - F_5 + F_6 - F_7 + \cdots + (-1)^n F_n = (-1)^n F_{n-1}$

f) Pentru $n=1$ avem $F_1^2 = F_1 F_2$

Fie $n \geq 1$ astfel încât

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} \quad , \forall n \geq 1 ;$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 =$$

$$(F_n + F_{n+1}) \cdot F_{n+1} = F_{n+1} \cdot F_{n+2} .$$

g) Pentru $n=2$ avem $F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 = (-1)^2$; fie $n \geq 2$ a.i. $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, atunci

$$F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n \cdot (F_{n+1} + F_n) - F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n-1})$$

$$= F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1} .$$

Prin urmare

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad , \forall n \geq 2 .$$

2) Să se arate că

a) $F_{2n} - F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 = 0$ (Lucas, 1876);

b) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$;

c) $F_{n-2} \cdot F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$;

d) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_{n-2} \cdot F_{n+2} = 2 \cdot (-1)^n$;

e) $F_{n+h} \cdot F_{n+k} - F_n \cdot F_{n+h+k} = (-1)^n \cdot F_h \cdot F_k \; (h, k \geq 1)$

5. Notăm $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, avem relațiile $\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$, $\alpha^2 = \alpha+1$; $\beta^2 = \beta+1$, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{5}$; $\beta + \frac{1}{\beta} = -\sqrt{5}$

$\alpha - \frac{1}{\alpha} = 1$; $\beta - \frac{1}{\beta} = 1$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ sau

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

a)

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left[(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\cdot\beta^{n+1} - \alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2} + 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\alpha^{2n}\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \beta^{2n}\left(\beta^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) \underbrace{- 2(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n-1}}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2n} + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\beta^{2n}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n} - \beta^{2n}\right) = F_{2n}.$$

b)

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left[(\alpha^n - \beta^n)^2 + (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2\beta^{n+1}\alpha^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\alpha^{2n}(1+\alpha^2) + \beta^{2n}(1+\beta^2) \underbrace{- 2\cdot(-1)^n - 2\cdot(-1)^{n+1}}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{5}\,\alpha^{2n+1} - \sqrt{5}\,\beta^{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}\right) = F_{2n+1}.$$

Am folosit $1+\alpha^2=\sqrt{5}\,\alpha$ și $1+\beta^2=-\sqrt{5}\,\beta$.

c) $F_{n-2}\cdot F_{n+2}-F_n^2=(F_n-F_{n-1})(F_{n+1}+F_n)-F_n^2$

$=F_n\cdot F_{n+1}-F_{n-1}\cdot F_{n+1}+\cancel{F_n^2}-F_{n-1}F_n-\cancel{F_n^2}=$

$=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})-F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2-F_{n-1}\cdot F_{n+1}$

$=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$

d) Avem

$F_{n-1}\cdot F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$

$F_{n-2}\cdot F_{n+2}-F_n^2=-(-1)^n$

$(-)$

$F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}\cdot F_{n+2}=2(-1)^n$

e) $F_{n+h}F_{n+k}-F_n\cdot F_{n+h+k}=\frac{1}{5}\Big[(\alpha^{n+h}-\beta^{n+h})(\alpha^{n+k}-\beta^{n+k})$

$-(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{n+h+k}-\beta^{n+h+k})\Big]$

$=\frac{1}{5}\Big(\alpha^{2n+h+k}+\beta^{2n+h+k}-\alpha^{n+h}\cdot\beta^{n+k}-\beta^{n+h}\cdot\alpha^{n+k}$

$-\alpha^{2n+h+k}+\alpha^n\beta^{n+h+k}+\beta^n\alpha^{n+h+k}-\beta^{2n+h+k}\Big)$

$=\frac{1}{5}(\alpha\beta)^n\cdot\Big(-\alpha^h\cdot\beta^k-\beta^h\cdot\alpha^k+\beta^{h+k}+\alpha^{h+k}\Big)$

$=(-1)^n\cdot\frac{1}{5}\Big[\alpha^h(\alpha^k-\beta^k)-\beta^h\cdot(\alpha^k-\beta^k)\Big]$

$=(-1)^n\,\frac{\alpha^h-\beta^h}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}=(-1)^n\,F_h\cdot F_k.$

(3) a) Fie $(F_n)_{n\geq 1}$ șirul lui Fibonacci. Atunci fiecare al cincilea termen al șirului se divide cu 5.

b) Calculați determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ F_2 & F_3 & \dots & F_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_n & F_{n+1} & \dots & F_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 3.$$

a) Arătăm relația

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}, \quad \forall n \geq 5.$$

Într-adevăr

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-3} + F_{n-4}$$

$$= F_{n-3} + F_{n-4} + 2F_{n-4} + 2F_{n-5} + F_{n-4} = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}.$$

Arătăm prin inducție că $F_{5n} \vdots 5$, $\forall n \geq 1$.

$F_5 = 5 \vdots 5$, fie $n \geq 1$ a.î. $F_{5n} \vdots 5$.

$$F_{5(n+1)} = 5F_{5n+1} + 3F_{5n} \vdots 5 \Rightarrow F_{5n} \vdots 5, \forall n \geq 1.$$

b) $\Delta = 0$, deoarece $L_1 + L_2 = L_3$.

(4) Se consideră șirul lui Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

41

Să se arate că printre primii 100000002 de termeni ai șirului există unul care se termină în 4 zerouri.

(L. Panaitopol)

S.

Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ resturile la împărțirea cu 10000 a termenilor șirului și să observăm că relația $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$ se menține modulo 10000.

Considerăm perechile (a_k, a_{k+1}), $k = \overline{1, 100.000.001}$; sunt $10^8 + 1$ perechi. Deoarece $a_k, a_{k+1} \in \{0, 1, \dots, 9999\}$ rezultă că a_k și a_{k+1} au 10^4 valori posibile, deci există $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ perechi distincte (a_k, a_{k+1}) posibile. Conform principiului lui Dirichlet, există $m < n$, $m, n \in \{1, 2, \dots, 10^8+1\}$ astfel încât $(a_m, a_{m+1}) = (a_n, a_{n+1})$, adică $a_m = a_n$ și $a_{m+1} = a_{n+1}$. Atunci

$a_{m-1} = a_{m+1} - a_m = a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$,

$a_{m-2} = a_m - a_{m-1} = a_n - a_{n-1} = a_{n-2}$,

$\vdots$

$a_2 = a_{n-m+2}$, $a_1 = a_{n-m+1}$. Cum $a_1 = a_2 = 1$

$\Rightarrow a_{n-m} = a_{n-m+2} - a_{n-m+1} = a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow$ termenul de rang $n-m$ din șirul Fibonacci se divide cu 10000.

(5) Avem relațiile

a) $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șirul lui Lucas ?!

$$\begin{cases} L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+1} = L_n + L_{n-1}; \\ L_n = \alpha^n + \beta^n,\ \alpha = \frac{1+\sqrt5}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt5}{2}. \\ \alpha^2 + 1 = \alpha + 2 = \frac{1+\sqrt5}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt5}{2} = \sqrt5\,\alpha,\ \text{analog } \beta^2+1 = -\sqrt5\,\beta \end{cases}$$

b) $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$.

S a) $5F_n^2 = 5\left[\frac{1}{\sqrt5}(\alpha^n - \beta^n)\right]^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n = (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(\alpha\beta)^n = L_n^2 - 4\cdot(-1)^n$.

b) $F_{n+1} + F_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} =$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\cdot\left[\alpha^{n-1}(\alpha^2+1) - \beta^{n-1}(\beta^2+1)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n\sqrt5 + \beta^n\sqrt5\right) = \alpha^n + \beta^n = L_n.$$

(6) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ și

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se demonstreze că a_n este pătrat perfect pentru orice n.

5 $\dfrac{a_2 - 3a_1 + a_0}{2} = -1 \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9,$ $a_5 = 25$, deci $a_0 = F_0^2$, $a_1 = F_1^2$, $a_2 = F_2^2$, $a_3 = F_3^2$, $a_4 = F_4^2$, $a_5 = F_5^2$, unde $(F_n)_{n\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Arătăm prin inducție că $a_n = F_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Presupunem $a_k = F_k^2$, pentru $k \leq n$.

Rezultă $a_n = F_n^2$, $a_{n-1} = F_{n-1}^2$,

$a_{n-2} = F_{n-2}^2$ (1).

Din relația de recurență deducem că $a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} = 2(-1)^n$

și

$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 2(-1)^{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

Prin sumarea ultimelor două egalități, avem

$a_{n+1} - 2a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, $\forall n \geq 2$ (2)

$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} a_{n+1} = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 + (F_n - F_{n-1})^2 - F_{n-2}^2 = F_{n+1}^2 + F_{n-2}^2 - F_{n-2}^2$

$= F_{n+1}^2 \Rightarrow a_n = F_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(7) Fie șirul lui Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ definit prin $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ determinați restul împărțirii numărului

$$L_{20n} - L_{16n} - L_{12n}$$

la 25.

(L. Pîrșan, Concursul G.M., 2007)

S. Dacă $(F_n)_{n\geq 0}$ este șirul lui Fibonacci și $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, atunci $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ și $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Avem

$$F_{2n} \cdot F_{4n} \cdot F_{6n} \cdot F_{8n} = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^{4n} - \beta^{4n}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^{6n} - \beta^{6n}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha^{8n} - \beta^{8n}}{\sqrt{5}}$$

$\in \mathbb{Z}$ este număr întreg, deci

$$(\alpha^{2n} - \beta^{2n})(\alpha^{4n} - \beta^{4n})(\alpha^{6n} - \beta^{6n})(\alpha^{8n} - \beta^{8n}) \vdots 25$$

$$\Leftrightarrow (L_{6n} - L_{2n})(L_{14n} - L_{2n}) \vdots 25$$

$$(\alpha^{2n} - \beta^{2n})(\alpha^{4n} - \beta^{4n}) = \alpha^{6n} - \beta^{6n} \cdot \alpha^{4n} - \alpha^{2n}\beta^{4n}$$

$$(\alpha^{2n} - \beta^{2n})(\alpha^{4n} - \beta^{4n}) + \beta^{6n} = \alpha^{6n} - \alpha^{2n}\beta^{2n}(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \beta^{6n}$$

$$= L_{6n} - L_{2n}$$

$$\Leftrightarrow L_{20n} + L_{8n} - L_{16n} - L_{12n} - L_{8n} - L_{4n} + L_{4n} + 2$$

$$= L_{20n} - L_{16n} - L_{12n} + 2 \vdots 25$$

(1) $L_{6n} \cdot L_{14n} = L_{20n} + L_{8n}$

Dem.

$(\alpha^{6n} + \beta^{6n})(\alpha^{14n} + \beta^{14n}) = \alpha^{20n} + \beta^{6n} \cdot \alpha^{14n}$
$+ \alpha^{6n} \cdot \beta^{14n} + \beta^{20n} = \alpha^{20n} + \beta^{20n} + \beta^{6n}\alpha^{6n}(\alpha^{8n} + \beta^{8n})$
$= \alpha^{20n} + \beta^{20n} + \alpha^{8n} + \beta^{8n} = L_{20n} + L_{8n}$.

(2) $L_{2n} \cdot L_{2n} = L_{4n} + 2 = L_{4n} + L_0 \quad (L_0 = 2, L_1 = 1)$

$L_{2n} L_{2n} = (\alpha^{2n} + \beta^{2n})(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = \alpha^{4n} + \alpha^{2n}\beta^{2n}$
$+ \alpha^{2n} \cdot \beta^{2n} + \beta^{4n} = \alpha^{4n} + 2\alpha^{2n} \cdot \beta^{2n} + \beta^{4n} = L_{4n} + 2$.

$\Leftrightarrow L_{20n} - L_{16n} - L_{12n} = M_{25} - 2 = M'_{25} + 23$,

restul cerut este 23.

(8) Fie $n \geq 2$ un număr întreg par și $(F_n)_{n \geq 1}$ șirul lui Fibonacci. Să se arate că ecuația

$$x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4 - 16 F_{n-1} \cdot F_{n+1} = 0,$$

are o infinitate de soluții.

(G.M.B, 1/2009, D. Savin)

S. Avem

$x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4 = x^2(x^2 - y^2) - 5y^2(x^2 - y^2)$
$= (x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2)$.

Deci $(x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2) = 16 F_{n-1} \cdot F_{n+1}$ (1)

Avem

$L_n^2 - 5F_n^2 = 4\cdot(-1)^n$ și $L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n-1}F_{n+1}$.

Putem scrie

$$(L_n^2 - F_n^2)\cdot(L_n^2 - 5F_n^2) = 16F_{n-1}F_{n+1}(-1)^n \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem că perechile (L_n, F_n), $n=2k$; $k\in\mathbb{N}^*$, sunt soluții ale ecuației date.

(9) Dacă șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea că $x_0 = L_0 = 2$, $x_1 = L_1 = 1$ și

$$\sqrt{F_n^2 + F_{2n}^2} + \sqrt{1 + x_n^2} = \sqrt{(x_n + F_{2n})^2 + (1+F_n)^2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

atunci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este șirul lui Lucas

S. Relația din enunț este echivalentă cu

$$F_n^2 + F_{2n}^2 + 1 + x_n^2 + 2\sqrt{(1+x_n^2)(F_n^2+F_{2n}^2)} = x_n^2 + 2x_nF_{2n} + F_{2n}^2 + 1 + 2F_n + F_n^2 \iff$$

$$\sqrt{(1+x_n^2)(F_n^2+F_{2n}^2)} = x_nF_{2n} + F_n \iff$$

$$F_n^2 + x_n^2F_n^2 + F_{2n}^2 + x_n^2\cdot F_{2n}^2 = x_n^2F_{2n}^2 + F_n^2 + 2F_nF_{2n}x_n$$

$$(x_nF_n - F_{2n})^2 = 0 \iff x_n = \frac{F_{2n}}{F_n}, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$x_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^n - \beta^n} = \alpha^n + \beta^n = L_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

şi deoarece $x_0 = L_0 \Rightarrow x_n = L_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(10) Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)} \geq \frac{3}{F_{n+2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu)

S. Fie

$$A_n = \frac{1}{a^3(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{1}{b^3(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{1}{c^3(F_n a + F_{n+1} b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(F_n b + F_{n+1} c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(F_n c + F_{n+1} a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(F_n a + F_{n+1} b)}$$

$$\geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{ab F_n + ac F_{n+1} + bc F_n + ab F_{n+1} + ac F_n + cb F_{n+1}}$$

$$= \frac{(ab + bc + ca)^2}{(abc)^2 \left[ab(F_n + F_{n+1}) + ac(F_{n+1} + F_n) + cb(F_n + F_{n+1})\right]}$$

$$= \frac{ab + bc + ca}{F_{n+2}} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{F_{n+2}} = \frac{3}{F_{n+2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(11) Au loc inegalitățile

a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^4}{k^2} \geq \frac{6 F_n^2 \cdot F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)};$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^6}{k^2} \geq \frac{4 F_n^3 \cdot F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2}.$$

S a) Avem succesiv

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^4}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(F_k^2)^2}{k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$$

$$= \frac{6 F_n^2 \cdot F_{n+1}^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k^6}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(F_k^2)^3}{k^2} \geq$$

$$\overset{\text{Radon}}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} F_k^2\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2} = \frac{4 F_n^3 \cdot F_{n+1}^3}{n^2(n+1)^2}.$$

(12) Are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k + F_{k+1}} \right) > \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

S. Din inegalitatea lui Nesbitt rezultă că

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}, \forall x, y, z > 0 \text{ cu}$$

egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$

Punem $x = F_k$, $y = F_{k+1}$, $z = F_{k+2}$ și deoarece $F_k \neq F_{k+1} \neq F_{k+2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\frac{F_k}{F_{k+1}+F_{k+2}} + \frac{F_{k+1}}{F_k+F_{k+2}} + \frac{F_{k+2}}{F_k+F_{k+1}} > \frac{3}{2},$$

$$\frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}} + 1 > \frac{3}{2} \iff \frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}} > \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{F_k}{F_{k+3}} + \frac{F_{k+1}}{2F_k+F_{k+1}} \right) > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{2}.$$

(13) Arătați că

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + 5F_{n+2}^2 \geq 4\sqrt{6}\sqrt{F_n \cdot F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

S. $\forall x, y, z > 0$ există un triunghi ABC cu lungimile laturilor $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$, semiperimetrul $p = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z$. Aria

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Din inegalitatea Ionescu - Weitzenböck avem

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S.$$

Avem

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{xyz(x+y+z)} \quad \forall x, y, z > 0.$$

$\iff$

$$x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{xyz(x+y+z)} \quad (1)$$
$$\forall x,y,z \in (0,\infty).$$

Dacă în (1) luăm $x = F_n$, $y = F_{n+1}$, $z = F_{n+2}$ obținem că

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})^2 \geq$$
$$4\sqrt{3}\sqrt{F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2} (F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} \Leftrightarrow$$
$$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + 4F_{n+2}^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2} \cdot 2F_{n+2}}$$
$$\Leftrightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 + 5F_{n+2}^2 \geq 4\sqrt{6}\sqrt{F_n \cdot F_{n+1}} \cdot F_{n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu are loc egalitate deoarece $F_n \neq F_{n+1} \neq F_{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(19) Fie $(F_n)_{n\geq 1}$ șirul lui Fibonacci. Pentru orice $k \geq 3$, suma a k termeni consecutivi ai șirului $(F_n)_{n\geq 1}$ nu aparține șirului.

S. Fie $m \geq 1$ fixat și $F_m, F_{m+1}, \dots, F_{m+k-1}$, k termeni consecutivi ai șirului $(F_n)_{n\geq 1}$ iar S suma lor. Atunci avem:

$$S > F_{m+k-2} + F_{m+k-1} = F_{m+k}.$$

$$F_{m+k+1} = (F_{m+k+1} - F_{m+k}) + (F_{m+k} - F_{m+k-1}) +$$
$$(F_{m+k-1} - F_{m+k-2}) + \dots + (F_{m+2} - F_{m+1}) + F_{m+1} =$$

$$\left(F_{m+k-1} + F_{m+k-2} + \dots + F_m\right) + F_{m+1} > S,$$

deci $F_{n+k} < S < F_{m+k+1}$ rezultă

$S \neq F_n, \ \forall n \geq 1.$

Altfel

Fie $A_k = F_k + F_{k+1} + \dots + F_{k+m-1}$, arătăm că

$$F_{k+m} < A_k < F_{k+m+1}.$$

Avem succesiv

$$F_{k+m} = F_{k+m-1} + F_{k+m-2} < F_{k+m-1} + F_{k+m-2} + \dots + F_k = A_k$$

Avem

$$S_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Prin urmare

$$A_k = S_{k+m-1} - S_{k-1} = F_{k+m+1} + (F_{k+1} - 1) < F_{k+m+1}.$$

(15) Șirul $\left(2^{2n} L_{2n}\right)_{n \geq 1}$ nu conține pătrate perfecte.

(D.M. Bătinețu Giurgiu, GMB 10/1980)

S. Avem

$$(1) \quad L_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = L_{2n} + (-1)^n \cdot 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$L_4 = 7$, deci $L_4 \equiv 7 \pmod{10}$.

Presupunem că $L_{2^n} \equiv 7 \pmod{10}$, $\forall n \geq 2$ și demonstrăm că

$$L_{2^{n+1}} \equiv 7 \pmod{10}. \text{ ?!}$$

Într-adevăr, conform (1) avem:

$$(2) \quad L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 2(-1)^{2^n} = L_{2^n}^2 - 2, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

Deoarece

$$L_{2^n} \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow L_{2^n}^2 \equiv 49 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10}$$

și atunci din (2) rezultă că

$$L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 2 \equiv (9-2) \pmod{10} = 7 \pmod{10}$$

Prin urmare L_{2^n} se termină cu cifra 7, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

2^{2n} se termină cu una din cifrele 4 sau 6 rezultă că $2^{2n} L_{2^n}$ se termină cu una din cifrele 2 sau 8, deci nu poate fi pătrat perfect (un pătrat perfect se termină cu una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6 sau 9).

Probleme propuse

Arătați că:

① $F_{n+k} \cdot F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n-k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Unde $(F_n)_{n\geq 1}$ este șirul lui Fibonacci.

(Catalan, 1879)

② Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit de relația de recurență

$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$. Să se arate că $n \mid a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

③ Arătați inegalitatea

$$n + 4 + 4 L_n L_{n+1} > 4 L_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(The Fibonacci Quarterly, 2013)

④ Să se determine în mod explicit termenul general al șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ știind că $x_n = 0$ dacă și numai dacă $n = 0$ și

$$x_{n+1} = x^2_{\left[\frac{n+3}{2}\right]} + (-1)^n x^2_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \forall n \in \mathbb{N}$$

⑤ Orice număr natural este suma unor termeni distincți ai șirului lui Fibonacci.

(V. E. Hogatt)

(6) Fie $(F_n)_{n\geq 1}$ termenul general al șirului lui Fibonacci. Să se demonstreze că între F_n și F_{n+1} există cel puțin un pătrat perfect, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$.

(7) Să se arate că au loc relațiile:

a) $\alpha^{n+1} = \alpha F_{n+1} + F_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

b) $\beta^{n+1} = \beta\cdot F_{n+1} + F_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

c) $L_n\cdot F_n = F_{2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

d) $L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;

e) $\alpha^m F_{n-m+1} + \alpha^{m-1} F_{n-m} = \alpha^n$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $n\geq m$

f) $\beta^m F_{n-m+1} + \beta^{m-1} F_{n-m} = \beta^n$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $n\geq m$

$(F_n)_{n\geq 1}$ este șirul Fibonacci, $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$(L_n)_n$ este șirul lui Lucas, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$

(8) Se consideră șirul Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și șirul lui Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ și $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Demonstrați că

a) $L_{6n} - L_{2n}$ se divide la F_{4n}, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

11'

b) $F_{6n} - F_{2n}$ se divide la L_{4n}, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(I. Pârșan, București, Concursul GMB, 2005)

9) Dacă șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n\ge 0}$ are proprietatea că $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și

$$\sqrt{L_{2n}^2 + F_{2n}^2} + \sqrt{1 + x_n^2} = \sqrt{(x_n + F_{2n})^2 + (1 + L_n)^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

atunci șirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este șirul lui Fibonacci.

10) Dacă $p > 5$ este un număr prim, atunci $p \mid F_p^2 - 1$.

11) Dacă $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \sin x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} F_k \cos x_k\right) \le n F_n \cdot F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(R.M.T. 1/2007)

Bibliografie

[1] I. Cucurezeanu, Aritmetică și Teoria numerelor, Ed. Tehnică, 1976.

[2] Ghe. Sirețchi, Analiză Matematică, vol I, II, Ed. Științifică și Enciclopedică, 1986.

[3] L. Panaitopol, D. Șerbănescu, Probleme de Teoria numerelor și combinatorică, Ed. Gil, 2003.

[4] N. N. Vorobiev, Numerele lui Fibonacci, Ed. Tehnică, 1952.

[5] Colecția Gazeta Matematică 1980-2016;

[6] Colecția R.M.T. 2000-2016.